

ДЕРЖАВНЕ ПІДПРИЄМСТВО «КОНСТРУКТОРСЬКЕ БЮРО «ПІВДЕННЕ»

ІМ. М. К. ЯНГЕЛЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

МЕДНІКОВА МАРГАРИТА АНАТОЛІЇВНА

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ
ВПЛИВ КРУГОВИХ ОТВОРІВ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ
СТАН ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ ПРИ
КРУЧЕННІ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ М.А. Меднікова

Науковий керівник

Колодяжний Анатолій Павлович, кандидат технічних наук, доцент

Дніпро – 2020

АНОТАЦІЯ

Меднікова М.А. Вплив кругових отворів на напружено-деформований стан циліндричних оболонок скінченної довжини при крученні. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2020.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню напружено-деформованого стану (НДС) пружних ізотропних циліндричних тонкостінних оболонок скінченних довжин, ослаблених круговим отвором при дії крутного моменту.

У несучі оболонкові конструктивні елементи з технологічних міркувань часто вводяться вирізи, що значною мірою впливає на НДС конструкції. Біля отвору при навантаженні оболонки виникає складне швидкозмінне поле напружень із зонами різкого їх підвищення, так званими зонами концентрації напружень. Класичною мірою локального збільшення напружень є коефіцієнт концентрації напружень (ККН), який визначається як відношення величини максимальних напружень біля отворів до напружень, званими референсними, що діють в аналогічній оболонці без отворів при тому ж рівні навантаження.

Уперше метод визначення напруженого стану і ККН в циліндричній оболонці з круговим отвором запропонований А. І. Лур'є (1946 р.) в лінійній постановці. Загальне НДС розглядається як сума основного стану, що виникає в суцільній оболонці без отворів, і збуреного, такого, що вноситься отвором, при однаковому рівні навантаження того ж виду. Передбачається, що поле збурюючих напружень, що виникає біля отвору, має локальний характер і швидко згасає при віддаленні від нього. Математично таке припущення може бути сформульоване як рівність напружень нулю на нескінченності, завдяки якому формулюється крайова задача. Розв'язок будується для малих отворів. Метод послужив основою для багатьох досліджень, проведених вченими з України, США, Нідерландів, Німеччини та ін.

У своїх роботах автори розширювали межі його застосування шляхом збільшення розміру отвору, його кількості і розглядом різних його форм.

А. І. Лур'є виконав дослідження на прикладах дії на оболонку з малими отворами розтягуючих зусиль і внутрішнього тиску. Надалі вченими вивчалася концентрація напружень в оболонках під впливом інших стандартних видів навантажень, таких як: осьовий стиск, зовнішній тиск, кручення, що зустрічаються в ракетній техніці, літакобудуванні, кораблебудуванні, в трубопроводах. Особливості процесу деформації при крученні, в порівнянні з іншими варіантами навантажень, вивчені у меншій мірі унаслідок складності задачі, у зв'язку з чим зазначеному випадку і присвячено дане дисертаційне дослідження.

Слід мати на увазі, що вплив граничних умов на краях оболонок скінченної довжини, викликане збуренням НДС за рахунок отвору, практично не досліджено. Вказані обставини послужили основою для визначення цілей і завдань дисертаційної роботи. В якості основного інструменту для вирішення поставлених завдань вибраний метод скінченних елементів (МСЕ). Перевага МСЕ полягає у свободі від обмежень, що стосуються розмірів оболонки, форми і величини отвору, реалізації складних граничних умов і особливостей навантаження. Використовується МСЕ, реалізований в програмному комплексі NASTRAN.

Виходячи з аналізу стану проблеми, сформульовано два основні завдання даного дослідження:

1 Аналіз НДС, зокрема ККН залежно від геометричних параметрів оболонки в лінійній постановці.

2 Аналіз НДС і ККН з урахуванням геометричної нелінійності деформації, для визначення впливу нелінійності по відношенню до лінійного розв'язку задачі.

У зв'язку з тим, що розглядалися оболонки в широкому діапазоні розмірів отворів, для кожної його величини розроблялася своя індивідуальна скінченно-елементна сітка. Задача створення адекватних сіткових моделей, здатних правильно описувати НДС в зонах концентрації напружень, вимагає особливої уваги у зв'язку з швидкозмінністю поля напружень. Для таких зон характерне

різке зростання рівня напружень в десятки разів, у порівнянні з напруженнями далеко від отвору, при цьому сама область концентрації може бути досить малою. Внаслідок цього, при застосуванні МСЕ проявляється істотна залежність точності результатів розрахунку від вибору сітки.

Одним із загальноприйнятих способів визначення помилки отриманих розв'язків є аналіз їх збіжності за результатами, отриманими при збільшенні кількості скінченних елементів на адаптивних сітках. Чисельне дослідження послідовностей таких сіток показало, що при простому подрібненні чотирикутних елементів процес підвищення точності виявляється повільним. У цій роботі використаний прийом заміни чотирикутних елементів уздовж межі отвору на пари трикутних, що істотно покращує збіжність обчислювального процесу. Для визначення точності обчислень і контролю якості сіток розроблено ефективний метод, в основі якого лежить незалежність ККН від довжини в задачах лінійного аналізу для досить довгих оболонок при фіксованих значеннях параметра, що називається в публікаціях параметром кривизни. Крім того, для порівняння використовуються існуючі аналітичні розв'язки інших авторів.

Застосування МСЕ-розв'язку для лінійної задачі дає можливість порівнювати і аналізувати застосовність моделі А. І. Лур'є до оболонок скінченних довжин у широкому діапазоні розмірів отворів. Показано, що вона застосована до оболонок великої довжини та для малого розміру отвору і непридатна для коротких оболонок, і для оболонок, ослаблених великим отвором. Припущення про швидке згасання збуреного поля напружень по віддаленню від отвору не узгоджується з оболонками скінченних довжин. Така модель може багаторазово завищувати результати по відношенню до деформації оболонок скінченних довжин.

За допомогою лінійного аналізу досліджено вплив зміни геометричних параметрів на напружений стан, зокрема на ККН. Уперше показано, що існує деяка, визначена розрахунками довжина, зі зменшенням якої починає позначатися підтримувальний вплив краю оболонки, що виражається в істотному зниженні рівня концентрації напружень.

На основі геометрично нелінійного аналізу проаналізовано формування полів напруженого стану і тривимірних полів переміщень у процесі навантаження, а також визначені відповідні ККН.

Для оцінки впливу геометричної нелінійності деформації на НДС проведено порівняльний аналіз результатів лінійного і нелінійного розв'язків завдання. Уперше показано, що для широкого діапазону зміни геометричних параметрів оболонок результати, отримані в нелінійній постановці, близькі до результатів із лінійного розв'язку тільки для початкового етапу навантаження і в досить вузькому діапазоні навантажень. При врахуванні геометричної нелінійності деформації, поля напружень і компонентні поля переміщень із зростанням навантаження, особливо при наближенні до вичерпання несучої здатності, зазнають якісних змін, розвиваються і змінюють свою топологію як на межі, так і в значній області навколо отвору.

Основна увага приділена дослідженню концентрації напружень і залежностям ККН від величини навантаження, довжини оболонки і розміру отвору. У першій половині повного діапазону навантаження ККН безперервно зростає для усіх досліджуваних оболонок, у другій – залежить від розміру отвору і довжини оболонки. Як виняток – оболонки великої довжини з малим розміром отвору, для яких ККН практично не залежить від рівня навантаження. Для усіх оболонок з отворами середньої величини, включаючи довгі оболонки, спостерігається тенденція монотонного зростання ККН. Для великих отворів, у другій половині навантаження, він може падати із зростанням навантаження, а іноді і мати в передграничному стані повторні ділянки інтенсивного зростання. Виявлено, що вкорочення оболонки веде до зниження рівня концентрації напружень.

Наукова новизна результатів полягає в наступному:

1 Уперше виконано параметричний порівняльний лінійний і геометрично нелінійний аналіз напружено-деформованого стану оболонок скінченної довжини, ослаблених круговим отвором при дії кручення. Встановлено, що процедура

лінійного аналізу методу скінченних елементів застосовна тільки на початковому етапі навантаження і для оболонок з малими отворами.

2 Уперше визначено межі області застосування широкоживаної лінійної моделі А. І. Лур'є, яка ґрунтується на припущенні про швидке згасання поля збурюючих напружень, викликаного появою отвору, стосовно до оболонок скінченних довжин. Показано, що таке припущення стає невірним для оболонок достатньо широкого діапазону скінченних довжин. Зазначена модель може використовуватися для визначення рівня концентрації напружень до оболонок великої довжини з малим розміром отворів.

3 Виявлено ефекти впливу країв оболонок скінченної довжини і отвору на напружений стан і коефіцієнт концентрації напружень. Залежно від розміру отвору існує певна довжина оболонки, при зменшенні якої починає позначатися підтримуючий вплив краю, що виражається в істотному зниженні рівня концентрації напружень. Отримано, що вкорочення оболонки приводить до зниження коефіцієнта концентрації напружень.

4 Уперше встановлена наявність істотного впливу геометричної нелінійності деформації на напружено-деформований стан і коефіцієнт концентрації напружень у процесі навантаження. На відміну від лінійного розв'язку, при урахуванні нелінійності деформацій поля напружень та переміщень зазнають якісної зміни не лише біля отвору, а й по усій поверхні оболонки. Поля збурюючих напружень, які виникають біля отвору на початковому етапі навантаження, зі зростом навантаження досягають країв оболонки. Коефіцієнт концентрації напружень із зростанням крутного моменту може збільшуватися на десятки відсотків.

Практичне значення отриманих результатів полягає в наступному:

1 Розроблено рекомендації щодо вибору ефективної скінченно-елементної сітки в задачах про визначення напружено-деформованого стану оболонок, ослаблених круговим отвором.

2 Запропоновано алгоритм оцінки і контролю точності розв'язку, заснований на властивості лінійної задачі, яка полягає у тому, що при

фіксованому значенні параметра кривизни коефіцієнт концентрації напружень є постійним для оболонок великих довжин.

3 Отримано залежності коефіцієнта концентрації напружень від довжини оболонок для широкого діапазону розмірів отвору та їх товщини на основі лінійного аналізу методом скінченних елементів, які грають роль довідкових даних у знаходженні конкретного значення коефіцієнта концентрації напружень при заданих геометричних розмірах оболонки, та оцінки впливу зміни окремих геометричних розмірів на його величину.

4 Показано, що для правильної оцінки міцності, при розрахунку потрібно враховувати геометричну нелінійність деформації.

5 Представлені картини полів напружень і компонентних полів переміщень залежно від геометричних параметрів оболонки й від рівня навантаження несуть інформаційний характер та є корисними в використанні на практиці для проектування нових систем.

6 Отримані закономірності розвитку напружень і переміщень біля отвору, а також дані про залежності коефіцієнта концентрації напружень у процесі навантаження, можуть використовуватися для розробки раціонального підкріплення вирізу, призначеного для зниження рівня концентрації напружень.

7 Знайдений ефект зниження рівня концентрації напружень із зменшенням довжини оболонки може застосовуватися при проектуванні несучої конструкції, що дозволить знижувати вагу несучих конструкцій.

8 Отримані результати є базовими для дослідження реальних конструкцій з урахуванням пружнопластичних властивостей матеріалу, характеру анізотропії і впливу підкріплюючих силових елементів отвору на напружений стан.

Результати дослідження впроваджені у практиці державного підприємства «Конструкторське Бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля при проектуванні ракети космічного призначення, зокрема адаптеру та головного обтічника в рамках роботи за міжнародним контрактом за темою «АКРК-2».

Ключові слова: метод скінченних елементів, циліндрична оболонка, круговий отвір, кручення, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень.

ABSTRACT

Mednikova M. The influence of circular holes on the stress-strain state of shells during torsion. – Qualification scientific study on rights of the manuscript.

A Dissertation for a Candidate Degree in Technical sciences in the specialty 01.02.04 "Mechanics of deformable solids". – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2020.

The dissertation work is devoted to the study of the stress-strain state (SSS) of elastic isotropic cylindrical thin-walled shells of finite lengths, weakened by a circular hole under the action of a torque.

For technological reasons, cutouts are often implemented into load-bearing shell structural elements, that significantly affects the stress-strain state of the structure. In the vicinity of the hole, when the shell is loaded, a rapidly changing complex stress field with zones of sharp increase, the so-called stress concentration zones, arises. The classical measure of the local increase of stresses is the stress concentration factor k_t (SCF), which is defined as the ratio of the maximum stresses magnitude in the holes vicinity to the stresses, called reference stresses that act in a similar shell without holes at the same load level.

For the first time, a method for determining the stress state and SCF in a cylindrical shell with a circular hole was proposed by A. Lurie (1946) in a linear formulation. The total SSS is considered as the sum of the principal state arising in a continuous shell without holes and the disturbed state contributed by the hole at the same load level of the same load type. It is assumed that the field of disturbing stresses arising in the vicinity of the hole is local in nature and rapidly decays with distance from it. Mathematically, this assumption can be formulated as the equality of stresses to zero at infinity, due to which the boundary value problem is formulated. The solution is built for small holes. The method provided a basic for many studies carried out by scientists from Ukraine, the USA, the Netherlands, Germany, etc. In their works, the authors expanded the limits of its applicability by increasing the size of the hole, its number and considering its various forms.

A. Lurie carried out a study on examples of the action of tensile forces and internal pressure on the shell with small holes. From then on, scientists studied the concentration of stresses in the shells under the influence of other standard types of loads, such as axial compression, external pressure and torsion, found in rocketry, aircraft construction, shipbuilding, pipelines. The features of the deformation process during torsion, in comparison with other types of loads, have been studied in a lesser degree due to the complexity of the problem, and therefore this dissertation research is devoted to this case.

It should be kept in mind that the effect of boundary conditions at the edges of shells of finite length, caused by SSS disturbance due to the hole, has not been practically studied. These circumstances served as the basis for determining the goals and objectives of this dissertation research. The finite element method (FEM) was chosen as the main tool for solving the assigned tasks. The advantage of FEM is the freedom from restrictions on the shell size, the shape and size of the hole, the implementation of complex boundary conditions and loading characteristics. To carry out this dissertation research, FEM is used, realized in NASTRAN software package.

Based on the analysis of the problem state, two main objectives of this study were formulated:

1. Carrying out the analysis of SSS, in particular SCF, depending on the geometric parameters of the shell in a linear formulation.
2. Performing the analysis of SSS and SCF taking into account the geometric nonlinearity of deformation, in order to determine the nonlinearity with respect to the linear solution.

Due to the fact that shells were analyzed in a wide range of hole sizes, a separate finite element mesh was developed for each of its sizes. The task of creating adequate of mesh models capable to correctly describe SSS in stress concentration zones requires special attention due to the rapidly changing stress field. Such zones are characterized by a sharp increase of the stress level by ten times, compared with stresses far from the hole, while the concentration region itself can be quite small. As

a result, when using FEM, there appears a significant dependence of calculation results accuracy on the mesh selection.

One of generally accepted methods for determining the error of obtained solutions is to analyze their reproducibility obtained with an increase in the number of finite elements on adaptive meshes. A numerical study of sequences of such meshes had shown that the process of increasing the accuracy by simple refinement of quadrangular elements turns out to be slow. In this work, the technique of replacing quadrangular elements at the boundary of hole on pairs of triangular ones is used, which improves the convergence of the computational process. To determine the calculation accuracy and to control the mesh quality, an effective method is developed here, which is based on SCF independence on the length in linear analysis tasks for sufficiently long shells at fixed values of the parameter, which is called the curvature parameter. In addition, the existing analytical solutions of other authors are used for comparison.

Application of FEM–solution for a linear task gives the ability to compare and analyze the applicability of A. Lurie model for shells of finite lengths in a wide range of hole sizes. It is shown that this approach is applicable for large length shells and for small size of a hole, and is unsuitable for short shells and for shells weakened by a large hole. The assumption that the disturbed stress field decays rapidly with distance from the hole does not agree with shells of finite lengths. This model can overestimate the results many times over in relation to the deformation of shells of finite lengths.

With the help of linear analysis, the influence of changes of geometric parameters on the stress state, in particular on SCF, has been investigated. For the first time it is shown that there is a certain length determined by calculations, with a decrease of this length the supporting effect of the shell edge begins to bear on, which significantly decrease level of stress concentration.

On the basis of geometrically nonlinear analysis, the formation of the stress state fields and 3-dimensional displacement fields during loading, as well as the corresponding states of SCF were analyzed.

To assess the effect of geometric nonlinearity of deformation on SSS, a comparative analysis of results of linear and nonlinear problems solutions was carried out. It is shown, for the first time, that for a wide range of changes in geometric parameters of shells, the results obtained in the nonlinear formulation are close to results from the linear solution only for the initial stage of loading and in a rather narrow range of loads. Taking into account the geometric nonlinearity of deformation, stress fields and component displacement fields with increasing load, especially when approaching the depletion of the bearing capacity, undergo qualitative changes, develop and change their topology, both at the boundary and in a significant area around the hole.

The main attention is paid to the study of the stress concentration and dependences of SCF on the load value, shell length and hole size. In the first half of the full range of loading, SCF increases continuously for all shells under study, in the second half - it depends on the hole size and the shell length. The exception is shells of large length with a small hole size, for which SCF is practically independent from the load level. For all shells with medium-sized holes, including long shells, there is a tendency for monotonic growth of SCF. For large holes, in the second half of the loading, SCF can fall during increase of the load, and sometimes can have repeated sections of intensive increase in the pre-limiting state. The shortening of the shell leads to a decrease of the stress concentration level.

The scientific novelty of the results is as follows:

- 1 For the first time, a parametric comparative linear and geometrically nonlinear analysis of the stress-strain state of finite length shells, weakened by a circular hole under torsion, has been carried out. It has been found that the procedure of linear analysis of the finite element method is applicable only at the initial stage of loading and for shells with small holes.

- 2 For the first time, the boundaries of applicability range of the widely used linear A. Lurie design model are determined. This model uses the assumption of rapid attenuation of the field of disturbing stresses caused by the appearance of the hole, relative to the shells of finite lengths. It is shown that this assumption becomes incorrect

for shells of a sufficiently wide range of finite lengths. This model can be used to calculate the level of stress concentration of large length shells with a small hole size.

3 The effects of edges influence of finite length shells and the hole on the stress state and SCF are found. Depending on the size of the hole, there is a certain length of the shell, the reduction of which begins to affect the supporting effect of the edge, which is expressed in a significant reduction of the level of stress concentration. It is obtained that the shortening of the shell leads to a decrease of the stress concentration factor.

4 The influence of the geometric nonlinearity of deformation on the stress-strain state and stress concentration coefficient during loading has been investigated. In contrast to the linear solution, taking into account the nonlinearity of deformations during the analysis shows that stress and displacement fields undergo qualitative changes not only near the hole, but also over the entire surface of the shell. The fields of disturbing stresses that occur near the hole at the initial stage of loading, with increase of loading reach the edges of the shell. With increasing torque the stress concentration factor can increase by tens of percent.

The practical significance of the results obtained is as follows:

1 Recommendations have been developed for the selection of an effective finite element mesh in tasks of determining the stress-strain state of shells weakened by a circular hole.

2 An algorithm for estimating and controlling the solution accuracy has been proposed. It is based on the properties of a linear problem, which consists in the fact that at a fixed value of the curvature parameter the stress concentration coefficient is constant for shells of large lengths.

3 The dependences of the stress concentration factor on the length of shells for a wide range of hole sizes and their thickness are obtained based on linear analysis by finite element method, which play the role of reference data in finding a specific value of stress concentration factor for given geometric dimensions of the shell and on its size.

4 It is shown that for a correct strength assessment, it is necessary to take into account the geometric nonlinearity of deformation in the analysis.

5 The presented pictures of stress fields and component displacement fields, depending on the geometrical parameters of the shell and on the load level, are for informational purposes and can be used in the design of new systems.

6 The obtained regularities of the evolvment of stresses and displacements in the vicinity of the hole, as well as data on the dependence of the stress concentration coefficient during loading can be used to develop an optimal reinforcement of the cut designed to reduce the level of stress concentration.

7 The found effect of reducing the stress concentration level by shortening the length of the shell can be used at the design of the load-bearing structure. It will reduce the weight of load-bearing structures.

8 The obtained results are basic for the study of real structures, taking into account the elastic-plastic properties of the material, the character of the anisotropy and the influence of the reinforcing elements of the hole on the stress state.

The results of the research were intruded in practice of the State “Design Office “Yuzhnoye” named after M. K. Yangel” in the design of a space rocket, in particular adapter and head fairing as part of an international contract.

Key words: finite element method, cylindrical shell, circular hole, torsion, stress-strain state, stress concentration factor.

ПЕРЕЛІК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у виданнях, занесених у наукометричні бази даних (Index Copernicus, SCOPUS):

1 Kolodiazhnyi A. The influence of the deformation nonlinearity on stress concentration in cylindrical shells with holes under torsion / A. Kolodiazhnyi, M. Mednikova. // Materials Science, Vol. 968, 2019. PP. 548 – 559.

2 Медникова М. А. Контроль точности решения при определении напряженного состояния в ослабленных отверстием цилиндрических оболочках / М. А. Медникова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкції – Вип. 29. – 2019. – С. 175 – 187.

Статті у фахових виданнях України:

3 Колодяжний А. П. Напряженное состояние цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием, при кручении / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. : Механіка. – 2015. – Вип. 19. – Т. 2. – С. 64 – 76.

4 Колодяжний А. П. Трехмерные поля перемещений при кручении цилиндрических оболочек с отверстием / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. : Механіка неоднорідних структур. – 2016. – Вип. 1(20). – С. 21 – 37.

5 Колодяжний А. П. Напряжения в тонкой цилиндрической оболочке с круговым отверстием при кручении / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // Вісник Дніпровського університету. Сер. : Механіка неоднорідних структур. – 2017. – Вип. 2(21). – С. 55 – 68.

Роботи у матеріалах наукових конференцій і збірниках тез доповідей:

6 Колодяжний А. П. КЭ-моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с отверстием / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // Человек и космос: Тез. докл. XIX междунар. науч.-практ. конф., 12 – 14 апреля, 2017 г. – Днепр, 2017. – С. 174.

7 Колодяжний А. П. Дослідження переміщень при крученні циліндричних оболонок з отвором / А. П. Колодяжний, М. А. Меднікова // Актуальні проблеми інженерної механіки : Тез. доп. IV міжнар. наук.-практ. конф., 16 – 19 травня, 2017 р. – Одеса, 2017. – С. 70 – 71.

8 Колодяжний А. П. Концентрация напряжений в оболочечных конструкциях с отверстиями при кручении / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // Космические технологии: настоящее и будущее : Тез. докл. 6-й междунар. конф., 23 – 26 мая 2017 г. – Днепр, 2017. – С. 29.

9 Колодяжний А. П. О влиянии нелинейного деформирования на концентрацию напряжений в цилиндрических оболочках, ослабленных круговым отверстием / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні : Тези доп. I міжнар. наук.-техн. конф., 10 – 14 вересня 2018 р. – Харків, 2018. – С. 33.

10 Колодяжний А. П. Про межі застосовності моделі А. І. Лур'є в задачах напружено-деформованого стану оболонок з круговим отвором / А. П. Колодяжний, М. А. Меднікова // Сучасні проблеми механіки та математики: Зб. наук. праць міжнар. наук.-техн. конф, 22 – 25 травня 2018 р. – Львів, 2018. – С. 103 – 104.

11 Колодяжний А. П. Геометрически нелинейный анализ напряженного состояния цилиндрических оболочек с отверстием при кручении / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // Актуальні проблеми інженерної механіки: Тези доп. VI міжнар. наук.-практ. конф., 20 – 24 травня 2019 р. – Одеса, 2019. – С. 364 – 365.

12 Медникова М. А. Напряженное состояние в цилиндрических оболочках конечной длины с отверстием / М. А. Медникова, А. П. Колодяжний, В. Н. Сиренко // Космические технологии: настоящее и будущее : Тез. докл. 7-й междунар. конф., 21 – 24 мая 2019 г. – Днепр, 2019. – С. 38.

13 Колодяжний А. П. Эффекты влияния отверстия на устойчивость цилиндрических оболочек при кручении. Численные и модельные эксперименты / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // Актуальні проблеми механіки суцільного

середовища і міцності конструкцій: Тези доп. II міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка В. І. Моссаковського, 10 – 12 жовтня 2019 р. – Дніпро, 2019. – С. 165.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	2
ABSTRACT.....	9
ВСТУП.....	20
Розділ 1 Аналітичний огляд сучасного стану проблеми напружено-деформованого стану оболонок з отворами.....	27
1.1 Огляд літератури, присвяченій вирішенню задач щодо визначення напружено-деформованого стану тонких оболонок....	27
1.2 Оцінка точності розв’язків на базі метода скінченних елементів.....	39
1.3 Висновки до розділу і постановка завдань дослідження.....	43
Перелік джерел посилань до розділу 1.....	46
Розділ 2 Алгоритм методу скінченних елементів вирішення задачі визначення напружено-деформованого стану оболонок з отворами.....	54
2.1 Функціонал повної енергії деформації. Мінімізація функціоналу для отримання системи алгебраїчних рівнянь.....	54
2.2 Нелінійний статичний аналіз. Метод Ньютона. Метод продовження по параметру довжини дуги	57
2.3 Особливості алгоритму застосування методу скінченних елементів.....	60
2.4 Висновки до розділу.....	62
Перелік джерел посилань до розділу 2.....	63
Розділ 3 Лінійний аналіз напружено-деформованого стану оболонок з отворами.....	64
3.1 Постановка задачі.....	65
3.2 Порівняння отриманих чисельних результатів із результатами інших авторів.....	66

3.3 Вибір сіткових моделей і контроль точності розв'язку.....	69
3.4 Вплив зміни довжини оболонки і крайових ефектів на напружений стан.....	77
3.5 Чисельний аналіз напруженого стану оболонок скінченної довжини.....	80
3.6 Висновки до розділу.....	89
Перелік джерел посилань до розділу 3.....	91
Розділ 4 Дослідження напружено-деформованого стану оболонок з отворами в геометрично нелінійній постановці.....	94
4.1 Аналіз напруженого стану в процесі навантаження.....	94
4.2 Вплив величини навантаження і нелінійності деформацій на рівень концентрації напружень.....	102
4.3 Формування тривимірних полів переміщень у процесі навантаження.....	113
4.4 Висновки до розділу.....	127
Перелік джерел посилань до розділу 4.....	129
Загальні висновки.....	131
Додаток А Документи впровадження результатів роботи.....	133
Додаток Б Довідкові дані про коефіцієнти концентрації напружень у залежності від геометричних параметрів оболонки при дії кручення.....	135
Додаток В Список публікацій здобувача по темі дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.....	146

ВСТУП

Актуальність теми. Тонкостінні оболонки знаходять широке застосування в конструкціях ракетно-космічної галузі і в авіабудуванні, де високі вимоги до вагової ефективності повинні поєднуватися з достатньою несучою здатністю. Привабливість оболонок, що мають кругову циліндричну форму і властивість кругової симетрії, при дії на них навантажень, які не порушують вказаного рівня симетричності або антисиметричності, полягає в тому, що напруження в основному є мембранними, окрім, можливо, вузьких крайових зон. Саме мембранний характер напружень дозволяє ефективно використати тонкостінні циліндричні оболонки в якості несучих елементів. Зміни в конструкції оболонки або в навантаженні, при дії яких виникає значна неоднорідність полів мембранних напружень або деформацій вигину, можуть викликати різке зниження характеристик міцності і несучої здатності оболонки.

Досить часто, з конструктивних та технологічних міркувань, в оболонках створюються отвори, біля яких при різних видах навантаження виникають зони різкого локального збільшення напружень, що можуть ставати причиною руйнування конструкції. Мірою такого зростання напруження служить коефіцієнт концентрації напружень, який показує в скільки разів найбільше напруження в зоні концентрації перевищує референсне значення. В якості референсних приймаються напруження в аналогічній оболонці без отвору при тому ж навантаженні.

Зазвичай оболонки розглядаються при дії на них стандартних видів навантажень: осьового стиску, розтягу, зовнішнього і внутрішнього тиску, кручення і вигину, серед яких кручення вивчене у меншому обсязі. Кручення є поширеним видом навантаження, наприклад: в процесі польоту ракети в результаті виникнення сил, що створюються органами управління, окрім вигинаючих моментів і осьових навантажень може виникати крутний момент; при автомобільному транспортуванні ракети на ложементях за допомогою довгомірного транспортного засобу; при маневруванні літаку; у магістральних

газопроводах, нафтопроводах і водопроводах, в яких застосовуються довгі оболонки, та ін.

З точки зору розрахунку визначення напружено-деформованого стану в оболонці з отвором як в лінійному наближенні так і при врахуванні нелінійності деформацій представляє собою досить складну крайову задачу, оскільки при її формулюванні необхідно враховувати двозв'язні області інтегрування.

Найбільше поширення в застосуванні до вирішення задачі про визначення напружено-деформованого стану тонкостінних оболонок, ослаблених круговим отвором, отримала лінійна математична модель, запропонована А. І. Лур'є, в якій розв'язок будується для малих отворів. Основним обмежувальним припущенням моделі є те, що збурений напружений стан, який вноситься отвором, має локальний характер і швидко згасає при віддаленні від отвору, а поблизу краю оболонки напружений стан є однорідний.

Робота А. І. Лур'є поклала початок ряду досліджень в цьому напрямку, проведених вченими з України, США, Нідерландів, Німеччини та ін. Автори розширювали межі застосування вказаної моделі шляхом збільшення розміру отворів, їх кількості та розглядом різних їх форм.

Для правильної оцінки міцності оболонок з отворами розв'язок задачі про визначення напруженого стану потребує врахування геометричної нелінійності деформування особливо для великих отворів. Найбільш ефективним методом розв'язання такого класу задач є метод скінченних елементів, який вільний від обмежень, що стосуються розмірів оболонки, форми і величини отвору, реалізації складних граничних умов та особливостей навантаження. Слід зазначити, що дослідження несучої здатності силових оболонкових систем аерокосмічної техніки з отворами при крученні із застосуванням сучасних чисельних алгоритмів є недостатньо вивченою проблемою.

Перелічені вище обставини послужили обґрунтуванням актуальності наукового дослідження впливу кругових отворів на напружено-деформований стан тонких оболонок скінченних довжин при дії кручення за допомогою методу скінченних елементів, зокрема лінійного і геометрично нелінійного аналізів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано в рамках науково-дослідницької роботи на державному підприємстві «Конструкторське Бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля.

Проведені в роботі дослідження пов'язані з держбюджетною науково-дослідною темою Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара «Теоретико-експериментальні методи і алгоритми визначення несучої здатності неоднорідних структур із пошкодженнями» (№ ДР 0115U002386, 2017 р.).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є визначення впливу кругових отворів на напружено-деформований стан ізотропних пружних тонкостінних циліндричних оболонок скінченної довжини при крученні. Для досягнення мети сформульовано наступні завдання:

1 Розробка ефективного підходу до вирішення задачі про визначення напружено-деформованого стану циліндричних оболонок скінченної довжини, ослаблених круговим отвором, який полягає в створенні ефективних скінченно-елементних моделей та формулюванні критеріїв і процедур оцінки достовірності результатів.

2 Дослідження впливу змінення довжини оболонки і розміру отвору на напружено-деформований стан і коефіцієнт концентрації напружень при крученні на основі методу скінченних елементів, зокрема лінійного та геометрично нелінійного аналізів.

3 Визначення межі області застосовності моделі А. І. Лур'є в задачі про визначення напружено-деформованого стану в оболонках скінченних довжин, ослаблених круговим отвором у широкому діапазоні його розмірів.

4 Дослідження впливу величини навантаження на напружено-деформований стан і коефіцієнт концентрації напружень в оболонках скінченних довжин з круговими отворами при крученні використовуючи геометрично нелінійний аналіз методу скінченних елементів.

5 Порівняння розв'язків, отриманих методом скінченних елементів у лінійній і геометрично нелінійній постановках, з метою визначення умов застосовності лінійного аналізу.

6 Проведення параметричного аналізу напружено-деформованого стану оболонок скінченних довжин, ослаблених круговим отвором при крученні для отримання нових даних про закономірності розвитку напружень і переміщень по усій поверхні оболонки, зокрема поблизу отвору у процесі навантаження.

Об'єктом дослідження є ізотропна пружна циліндрична тонка оболонка скінченної довжини, ослаблена круговим отвором.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан оболонок, ослаблених круговим отвором при дії кручення.

Методи дослідження. Для проведення дослідження напружено-деформованого стану оболонок використовується метод скінченних елементів, зокрема лінійний і геометрично нелінійний статичні аналізи.

Наукова новизна результатів полягає в наступному:

1 Уперше виконано параметричний порівняльний лінійний і геометрично нелінійний аналіз напружено-деформованого стану оболонок скінченної довжини, ослаблених круговим отвором при дії кручення. Встановлено, що процедура лінійного аналізу методу скінченних елементів застосовна тільки на початковому етапі навантаження і для оболонок з малими отворами.

2 Уперше визначено межі області застосування широковживаної лінійної моделі А. І. Лур'є, яка ґрунтується на припущенні про швидке згасання поля збурюючих напружень, викликаного появою отвору, стосовно до оболонок скінченних довжин. Показано, що таке припущення стає невірним для оболонок достатньо широкого діапазону скінченних довжин. Зазначена модель може використовуватися для визначення рівня концентрації напружень до оболонок великої довжини з малим розміром отворів.

3 Виявлено ефекти впливу країв оболонок скінченної довжини і отвору на напружений стан і коефіцієнт концентрації напружень. Залежно від розміру отвору існує певна довжина оболонки, при зменшенні якої починає позначатися підтримуючий вплив краю, що виражається в істотному зниженні рівня концентрації напружень. Отримано, що вкорочення оболонки приводить до зниження коефіцієнта концентрації напружень.

4 Уперше встановлена наявність істотного впливу геометричної нелінійності деформації на напружено-деформований стан і коефіцієнт концентрації напружень у процесі навантаження. На відміну від лінійного розв'язку, при урахуванні нелінійності деформацій поля напружень та переміщень зазнають якісної зміни не лише біля отвору, а й по усій поверхні оболонки. Поля збурюючих напружень, які виникають біля отвору на початковому етапі навантаження, зі зростом навантаження досягають країв оболонки. Коефіцієнт концентрації напружень із зростанням крутного моменту може збільшуватися на десятки відсотків.

Достовірність і обґрунтування отриманих в дисертаційній роботі результатів ґрунтується на законах механіки деформівного твердого тіла, забезпечена коректним формулюванням поставленої задачі та зіставленням отриманих в дисертації результатів чисельних розв'язків з загальновідомими аналітичними і експериментальними даними.

Практичне значення отриманих результатів полягає в наступному:

1 Розроблено рекомендації щодо вибору ефективної скінченно-елементної сітки в задачах про визначення напружено-деформованого стану оболонок, ослаблених круговим отвором.

2 Запропоновано алгоритм оцінки і контролю точності розв'язку, заснований на властивості лінійної задачі, яка полягає у тому, що при фіксованому значенні параметра кривизни коефіцієнт концентрації напружень є постійним для оболонок великих довжин.

3 Отримано залежності коефіцієнта концентрації напружень від довжини оболонок для широкого діапазону розмірів отвору та їх товщини на основі лінійного аналізу методом скінченних елементів, які грають роль довідкових даних у знаходженні конкретного значення коефіцієнта концентрації напружень при заданих геометричних розмірах оболонки, та оцінки впливу зміни окремих геометричних розмірів на його величину.

4 Показано, що для правильної оцінки міцності, при розрахунку потрібно враховувати геометричну нелінійність деформації.

5 Представлені картини полів напружень і компонентних полів переміщень залежно від геометричних параметрів оболонки й від рівня навантаження несуть інформаційний характер та є корисними в використанні на практиці для проєктування нових систем.

6 Отримані закономірності розвитку напружень і переміщень біля отвору, а також дані про залежності коефіцієнта концентрації напружень у процесі навантаження, можуть використовуватися для розробки раціонального підкріплення вирізу, призначеного для зниження рівня концентрації напружень.

7 Знайдений ефект зниження рівня концентрації напружень із зменшенням довжини оболонки може застосовуватися при проєктуванні несучої конструкції, що дозволить знижувати вагу несучих конструкцій.

8 Отримані результати є базовими для дослідження реальних конструкцій з урахуванням пружнопластичних властивостей матеріалу, характеру анізотропії і впливу підкріплюючих силових елементів отвору на напружений стан.

Результати дослідження впроваджені у практиці державного підприємства «Конструкторське Бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля при проєктуванні ракети космічного призначення, зокрема адаптеру та головного обтічника в рамках роботи за міжнародним контрактом за темою «АКРК-2».

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні результати дослідження опубліковано в 13 наукових роботах, з них 2 статті [1 – 2] у виданнях, що входять до наукометричних баз даних (Index Copernicus, SCOPUS) (з них 1 [2] виконано без співавторів), 3 статті [3 – 5] у фахових виданнях України, 8 [6 – 13] – праці в матеріалах наукових конференцій та збірниках тез доповідей.

Наукові роботи [1, 3 – 13] виконані у співавторстві з науковим керівником к.т.н. Колодяжним А. П. У спільних публікаціях за темою дисертації особистий внесок автора включає розробку скінченно-елементних моделей [1, 3 – 13], реалізацію чисельного дослідження [1, 3 – 13], побудова алгоритму розв’язання геометрично нелінійних задач [1, 3, 4, 6 – 9, 11 – 13], обробку отриманих результатів [1, 3 – 13], обґрунтування отриманих результатів шляхом дослідження їх збіжності с результатами інших авторів [10].

Аналіз отриманих даних, формулювання висновків та підготовка матеріалів публікацій проводилися спільно з науковим керівником.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на ХІХ міжнародній науково-практичній конференції «Людина і Космос» (Дніпро, 2017 р.); I міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2018 р.); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки і математики» (Львів, 2018 р.); IV, VI міжнародних науково-практичних конференціях «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2017 р., 2019 р.); VI, VII міжнародних конференціях «Космічні технології: сьогодення і майбутнє» (Дніпро, 2017 р., 2019 р.); VII міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Запоріжжя, 2019 р.); II міжнародній науково-технічній конференції пам'яті академіка В. І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпро, 2019 р.).

Дисертація в цілому розглядалася на науково-технічній раді Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля.

Структура та об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається із анотацій, вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 149 сторінок. Основна частина викладена на 92 сторінках, містить 56 рисунки, 5 таблиць, список використаних джерел з 115 найменувань на 14 сторінках. Додатки займають 17 сторінок.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику, кандидату технічних наук, доценту Колодяжному Анатолію Павловичу за постійну увагу та допомогу в роботі.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ

1.1 Огляд літератури, присвяченій вирішенню задач щодо визначення напружено-деформованого стану тонких оболонок

Коло питань, пов'язаних з дослідженням напруженого стану та несучої здатності оболонок, ослаблених отвором, розглянуто в роботах А. Я. Александрова, М. Х. Ахметзянова, Ю. А. Ашмаріна, Е. Л. Гарт, Е. І. Григолюка [1], О. Я. Григоренка, Я. М. Григоренка, В. З. Грищака, В. С. Гудрамовича, О. М. Гузя, В. І. Гуляєва, А. П. Дзюби, Д. В. Клименка, А. П. Колодяжного, О. С. Космодаміанського, Р. М. Кушніра, В. І. Моссаковського, І. М. Пирогова, І. М. Преображенського, А. К. Приварникова, Є. Ф. Прокопало, А. С. Ракіна, Г. М. Савіна, Є. А. Сторожука, Л. А. Фільштинського, І. А. Цурпала, І. С. Чернишенка, Вал. М. Чехова, Вік. М. Чехова, Ю. А. Шевлякова, В. П. Шевченка, К. І. Шнеренка, V. Dyke, J. G. Lekkerkerker, J. N. Starns, R. C. Tennison, D. Withum та ін.

Постановки, методи і результати розв'язків нелінійних та динамічних задач для тонких ізотропних й анізотропних оболонок з отвором містяться в огляді [2]. Загальний погляд на публікації про концентрацію напружень наведено в оглядах [3 – 6]. Існують спеціальні довідники коефіцієнтів концентрації напружень (ККН) [7, 8].

Протягом багатьох років проблемі впливу отворів на напружений стан в тонкостінних оболонках приділялася велика увага. Перший розв'язок плоскої задачі теорії пружності про напружений стан біля кругового отвору в пластині було отримано В. Кіршем. Потім Г. В. Колосов застосував теорію функцій комплексного змінного для пластини, ослабленої еліптичним отвором. Далі Н. І. Мусхелішвілі розвинув метод функції комплексного змінного і конформних

відображень стосовно задач теорії пружності. Роботи А. І. Лур'є (1940-1947) [9 – 11] зіграли важливу роль у розвитку теорії оболонок. Уперше метод визначення напруженого стану та коефіцієнта концентрації напружень для пружної кругової циліндричної оболонки з малим отвором в лінійній постановці запропонований А. І. Лур'є в 1946 р [10]. Для формулювання задачі інтегрування в двозв'язній області припускається розділення напруженого стану на основне, що відповідає суцільній оболонці і збурене, що вноситься отвором. Вважається, що збурене поле напружень має локальний характер і швидко згасає при віддаленні від отвору. Математично таке припущення формулюється як рівність збурюючих напружень нулю на нескінченності.

А. І. Лур'є отримав асимптотичні формули ККН (k_t), який визначається як відношення величини максимальних напружень в зоні їх концентрації σ_{\max} до референсних напружень σ_0 , тобто напружень у суцільній оболонці без отвору, напружений стан якої при тому ж навантаженні вважається основним:

$$k_t = \sigma_{\max}/\sigma_0. \quad (1.1)$$

У разі чистого кручення в якості референсних напружень приймаються дотичні напруження τ_0 в поперечних перерізах суцільної оболонки без отворів, які визначаються співвідношенням:

$$\tau_0 = M_k/2\pi R^2 h. \quad (1.2)$$

де M_k , R , h – крутний момент, радіус і товщина оболонки відповідно.

У такій постановці розв'язування, ККН не залежить від рівня навантаження і від довжини оболонки та визначається єдиним параметром β , що називається в публікаціях параметром кривизни, який включає в себе товщину h , радіус оболонки R і радіус отвору r :

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2} \cdot \frac{r}{\sqrt{Rh}}, \quad (1.3)$$

де ν , R , h , r – коефіцієнт Пуассона, радіус, товщина оболонки і радіус отвору відповідно.

Модель А. І. Лур'є стала в певному сенсі класичною, її ідейна основа використовується останні десятиліття для оболонок більш складної структури: з великими отворами, з урахуванням пластичного деформування, повзучості та інших, що ускладнюють розрахунок, обставин.

А. І. Лур'є представив розв'язок для випадків навантаження оболонки розтягуючою силою і внутрішнім тиском. Крім цих варіантів навантаження дослідники розглядають і інші види стандартних навантажень, а саме: осьовий стиск, зовнішній тиск, кручення та вигин.

У разі навантаження оболонки крученням відомих робіт по вищезгаданій тематиці можна назвати лише одиниці. Перша робота по крученню циліндричних оболонок із круговим отвором, опублікована Ю. А. Шевляковим і Ф. С. Зігелем (1954) [12]. І. М. Пирогов (1960) [13] слідував безпосередньо методиці [10]. В обох зазначених роботах розглядалися тільки малі, за класифікацією А. І. Лур'є, отвори ($\beta \leq 1$). Далі модель удосконалилася, в результаті з'явився ряд робіт, де досліджувався напружено-деформований стан (НДС) і ККН в лінійній постановці, але з різними варіаціями в алгоритмах розв'язування і розширеннями діапазону величин отворів. Тут слід згадати перше дослідження оболонок з великими отворами, виконане D. Withum (1958) [14]. Автором отримано наближений розв'язок про визначення напружень при крученні циліндричної оболонки. Вирішення основного диференціального рівняння пологої теорії в формі В. Церна зводиться до системи нескінченних звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. При розкладанні напружень і переміщень в ряди Фур'є отримано лінійні звичайні диференціальні рівняння, де незалежною змінною є полярна координата r в розгорнутій поверхні оболонки і невідомими є коефіцієнти в розкладах функцій напружень. Рівняння були вирішені методом збурень.

О. А. Фролов (1961) [15] також слідував методиці [10], поклавши в основу розв'язку припущення про локальність збурень, що вносяться отвором. Прогин відшукується як сума прогину, відповідного безмоментному стану оболонки поза

області збурень напружень і додаткового прогину, викликаного отвором. Додатковий прогин представляється скінченим числом членів ряду і підпорядковується статичним граничним умовам. Функція напружень знаходиться з рівняння суцільності. Невідомі параметри, що входять у вирази для функцій напружень і додаткового прогину, визначаються енергетичним методом.

Систематичні дослідження напруженого стану біля отворів в оболонках у різних напрямках ведуться українською школою механіків.

Г. М. Савіним (1968) [16] подано фундаментальне дослідження з концентрації напружень із застосуванням теорії функції комплексного змінного. Запропонована загальна постановка задачі для довільної оболонки, ослабленої криволінійним отвором, яка може бути розділена на два етапи. На першому етапі, використовуючи теорію пологих оболонок, знаходиться розв'язок в ділянці, на яку поширюються збурення, що вносяться отвором, який має задовольняти крайові умови на контурі отвору. На другому етапі, на контурі отвору, що являє собою гладку просторову криву, виконується поєднання отриманого розв'язку з розв'язком, відповідним основному напруженому стану. Для того, щоб можна було їх поєднати, необхідно прийняти обмежувальні припущення поведінки збурюючого розв'язку на нескінченності. Стосовно до великого отвору вирішення основного диференціального рівняння розкладається в рядах Фур'є і зводиться до системи нескінченних звичайних диференціальних рівнянь, таким чином, стає можливим задоволення крайових умов на контурі отвору.

О. М. Гузь і В. М. Чехов в своїх дослідженнях (1962, 1971, 1972) [17 – 19] застосовують метод збурення форми границі, використовуючи гіпотезу Кірхгофа – Лява. Реалізація даного методу показана на прикладі визначення концентрації напружень в оболонці з одним великим криволінійним отвором і напруженого стану оболонки з двома підкріпленими круговими отворами. Систематичний виклад задач щодо впливу отворів різного обрису на НДС для оболонок довільної кривизни і, як найбільш поширених, ізотропних і композитних циліндричних, конічних, сферичних оболонок, представлено О. М. Гузем зі співавторами

(1980) [20]. Автори запропонували класифікувати задачі для оболонок з отворами, на групи:

- оболонки з малими отворами, за умови: $0 < \frac{r}{\sqrt{Rh}} < 1$;
- оболонки з великими отворами, за умови: $1 \leq \frac{r}{\sqrt{Rh}} \leq 4,5 \div 5$.

Завдяки такій класифікації отворів, в залежності від його величини, виконується спрощення основних рівнянь, що визначають додатковий напружений стан, який вноситься отвором. У лінійній теорії при дослідженні оболонок, ослабленої малим отвором, використовуються рівняння теорії пологих оболонок. Для оболонок з великими отворами НДС розділяється на основний напружений стан і крайовий ефект, та застосовуються рівняння загальної теорії оболонок. Існують різні методи розв'язування крайових задач: метод розділення змінних, метод рядів Фур'є, метод функцій Гріна, метод збурення форми межі. Використовуються варіаційні методи: методи Бубнова – Гальоркіна і Релея – Рітца. Поширеними є чисельні методи: скінченнорізницевий, метод граничних елементів та метод скінченних елементів (МСЕ).

V. Duke (1965) [21] досліджено вплив кругового отвору на напружений стан оболонки, в більш широкому діапазоні параметра кривизни, для трьох видів навантажень: розтягу, внутрішнього тиску і кручення. У роботі застосовувалися динамічні граничні умови на межі отвору методом колокації.

J. G. Lekkerkerker (1965-1966) [22 – 23] визначено напруження і переміщення для оболонки ослабленою круговим отвором при розтягуванні і крученні. В якості замкнутої пологої кругової циліндричної оболонки приймається спіральна оболонка. Вводиться припущення, що для тієї ділянки, в якій позначаються збурення основного напруженого стану, які накладаються отвором, справедлива теорія пологих оболонок. Грунтуючись на тому, що основне диференціальне рівняння пологої оболонки може бути зведене до конкретного рівняння Гельмгольца, автор висловив вирішення в термінах нескінченного ряду функцій Ханкеля і тригонометричних функцій.

A. C. Eringen (1964) [24] отримано розв'язок лінійного диференціального рівняння в приватних похідних тонкої пологої циліндричної оболонки у вигляді рядів, а граничні умови кругового отвору виражені у вигляді чотирьох нескінченних рядів. Для вирішення рівнянь використовуються ряди Фур'є і метод найменших квадратів.

N. J. I. Adams (1971) [25] проведено аналіз напруженого стану в циліндричній оболонці з круговим отвором з використанням спрощеного варіаційного методу і методу Бубнова – Гальоркіна для випадків розтягу, кручення і внутрішнього тиску. Координатні функції, представлені в рядах, підбиралися такі, що точно задовольняють граничні умови на межі отвору і на торцях оболонки.

У роботах M. N. Vapurao і T. Ariman (1971) [26], M. N. Vapurao і M. V. V. Murthy (1971) [27], (1977) [28] і M. V. V. Murthy (1974) [29] чисельно досліджено напружений стан біля кругового та еліптичного отворів у тонких оболонках нескінченної довжини, під дією трьох варіантів навантажень: вигинаючого моменту, кручення і розтягу. Отримано вирішення розв'язуючого диференціального рівняння для оболонки у вигляді нескінченних рядів з використанням функцій Мат'є, за допомогою методу поділу змінних і рядів Фур'є. Отримано ККН в широкому діапазоні параметра β , що визначає розмір отвору щодо розмірів оболонки.

M. Namada (1972) [30] аналітичним методом визначено напруження в оболонках ослаблених одним або двома круговими отворами на прикладі дії розтягу або внутрішнього тиску. Слідуючи підходу, наведеного в [14] фундаментальні рівняння перетворюються в полярні координати. Для вирішення рівнянь застосовується комбінація розкладання Фур'є і скінченнорізницевого методу.

L. P. Pytel' (1973) [31] вирішено задачу про концентрацію напружень біля великих отворів в ортотропних циліндричних оболонках із використанням варіаційного методу I. Г. Бубнова, відносно полугеодезичної системи координат на випадок кососиметричного НДС, що виникає при дії кручення.

C. -j. Tsai (1975) [32] досліджено напружений стан близько еліптичних отворів з використанням методу інтегральних рівнянь. Розглянуто кілька варіантів навантаження, в тому числі кручення.

B. Erik (1977) [33], використовуючи теорію пологих оболонок, представлено метод визначення напружень і переміщень в перфорованій циліндричній оболонці. Метод заснований на застосуванні інтегральних рівнянь, для вирішення яких використовується функція Гріна.

V. P. Revenko (1988) [34] запропоновано модифікований метод розкладання рядів по малому параметру, який може застосовуватися для циліндричних композитних ортотропних оболонок, ослаблених малим або середнім еліптичним отвором. Загальний розв'язок представлено у вигляді суми основного напруженого стану і збуреного. Розглянуто два випадки навантаження оболонки: стиск і кручення.

Ю. В. Головешкін (1989) [35] із застосуванням геометричних координат і теорії функції комплексного змінного запропоновано розв'язок задачі про концентрацію напружень біля отворів у тонких оболонках нульової гаусової кривизни за допомогою зведення розв'язувального рівняння тонких оболонок у приватних похідних до звичайного рівняння щодо комплексного змінного.

M. -d. Xue (1991) [36] представлено аналітичне розв'язання задачі про визначення НДС циліндричних оболонок, ослаблених великим отвором із застосуванням асимптотичного методу. Замість рівнянь Доннелла [37] застосовується модифіковане рівняння Морлі, яке може бути застосовано при $r/\sqrt{Rh} \gg 1$. Показано, що подвійний ряд функцій Бесселя – Ханкеля і тригонометричні функції швидко збігаються, береться п'ять членів ряду. Отримані результати знаходяться в задовільній узгодженості з розв'язками [21, 22, 24]. Показано, що ККН залежить не тільки від параметру розміру отвору r/R , а й від параметру кривизни R/h .

E. Oterkus (2007) [38] запропоновано напіваналітичний розв'язок задачі визначення НДС тонких композитних некругових оболонок, ослаблених еліптичним отвором при дії розтягу, кручення і чистого зсуву. Проаналізовано

вплив розміру, форми та орієнтації отвору, неоднорідності товщини, ексцентриситету овального перетину на напружений стан. Запропоновано аналітичний підхід до вирішення завдання, який дозволяє поточкове визначення змін переміщень і напружень, заснований на принципі стаціонарності потенційної енергії. На відміну від традиційного підходу, в роботі використовуються як локальні, так і глобальні функції, для яких немає необхідності задовольняти кінематичні граничні умови безпосередньо. Кінематичні граничні умови накладаються із застосуванням методу множників Лагранжа. Вказівка відповідних значень жорсткості для пружних розтягуючих і обертальних крайових закріплень дозволяє побічно накладати кінематичні граничні умови, що робить можливим використовувати більш широкий набір функцій для представлення полів переміщень. За допомогою рядів Лорана використовуються локальні функції, щоб зафіксувати швидкозмінні градієнти напружень і деформацій, а також локальні деформації близько отвору. За допомогою рядів Фур'є використовуються глобальні функції, щоб отримати загальну деформацію і напруження.

М. Mizagoltabarroshan (2013) [39] представлено результати скінченно-елементного аналізу, реалізованого в програмному комплексі Ansys. Виконано дослідження напруженого стану в оболонках, ослаблених одним або декількома круговими отворами при дії розтягу в лінійному наближенні. Показана тенденція поведінки ККН для оболонки з одним отвором у залежності від радіусів отвору і оболонки. Зроблено спробу зниження коефіцієнта концентрації напружень шляхом зміни товщини оболонки, підкріплення межі отвору або деякої його ділянки.

В роботі Є. М. Довбня (2013) [40] досліджено НДС ізотропних оболонок довільної гаусової кривизни з круговим отвором. Розглядається оболонка під дією осьового розтягу і внутрішнього тиску. Застосовуються рівняння теорії пологих ізотропних оболонок. Використовується інтегральне перетворення Фур'є і теорія узагальнених функцій. Задача зведена до вирішення системи граничних інтегральних рівнянь. За допомогою спеціальних квадратурних формул для інтегралів типу Коші системи інтегральних рівнянь зведено до системи лінійно-

алгебраїчних рівнянь. З використанням методу скінченних різниць отримані ККН у залежності від кривизни оболонки.

Важливе місце в дослідженні напруженого стану займають експериментальні методи. На підставі результатів натурних досліджень можлива не тільки перевірка точності наближених розв'язків, а й створення ефективної розрахункової моделі. Найбільш поширеними методами в застосуванні є оптичні, поляризаційно-оптичні методи, метод голографічної інтерферометрії та ін.

D. S. Houghton (1962) [41] виконано одну з перших робіт, присвячених експериментальному дослідженню концентрації напружень біля отворів в оболонках. Досліджено вплив і значимість кривизни на концентрацію напружень навколо кругового та еліптичного отворів. Проведено фотопружний експеримент із використанням методу заморожування напружень, що виникають поблизу отворів в оболонках, під дією різних умов навантаження: крученні, розтягу та внутрішньому тиску. Отримані експериментальні дані порівнюються з аналітичними розв'язками [10, 14] і розв'язками, заснованими на теорії плоских пластин. Показано, що при крученні, на відміну від внутрішнього тиску або розтягу, кривизна оболонки значною мірою впливає на концентрацію напружень біля отворів. Із збільшенням розміру кругового отвору рівень концентрації напружень зростає. У порівнянні з теорією плоских пластин, результати експерименту відрізняються на 40%, експеримент знаходиться вище теоретичного розв'язку. Виявлено, що із зростанням розміру отвору зона концентрації напружень зміщується.

А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов і А. С. Ракін (1966) [42] досліджували напружений стан циліндричної оболонки з отворами методом фотопружних покриттів у пружнопластичній стадії. В роботі визначаються залежності напруженого стану від кривизни оболонки і кривизни отвору. Крім того, аналізується вибір оптимальних підкріплень отвору.

D. N. Pierce (1973) [43] експериментально визначено напружений стан близько еліптичного отвору в алюмінієвих кругових циліндричних оболонках при дії розтягу і стиску. Для визначення швидкості падіння ефекту концентрації

напружень, біля отвору встановлювалися тензодатчики. У роботі обговорено вплив напружень вигину на концентрацію напружень у залежності від ексцентриситету еліптичного отвору і параметру кривизни оболонки. Виявлено, що вплив напружень вигину на концентрацію напружень при малих значеннях параметру β незначний, так як у такому випадку напружений стан є в основному мембранним, а зі збільшенням β зростає вплив вигинаючих напружень. Отримані результати порівнюються з [16, 21].

Ф. Р. Chiang (1981) [44] використано спекл-метод з білим світлом для вимірювання деформацій на вигнутій поверхні. Показано, що даний метод може бути досить ефективним для розглянутого класу задач.

В. В. Балаловим (1988) [45] досліджено вид полів переміщень у циліндричній оболонці при дії розтягувальної сили і кручення. Експеримент заснований на методі голографічної інтерферометрії. Голографічні картини переміщення на контурі отвору отримані для невеликих приростів навантаження. Результатів відповідних теоретичних досліджень даної роботи виявлено не було.

Л. А. Поліповським (1972) [46] описано експериментально-аналітичний метод дослідження напруженого стану біля отвору в оболонці при дії внутрішнього тиску методом вимірювання твердості пластично деформованого матеріалу. Такий спосіб застосовується для невеликих моделей. У досліджуваній області вимірюється твердість. Поле розподілу твердості в області концентратора за допомогою тарувального графіка (залежність твердості від інтенсивності напружень) переводиться у відповідне йому поле розподілу інтенсивності напружень. Визначаються три невідомих тензори, що характеризують плоский напружений стан. Диференціальні рівняння рівноваги інтегруються методом скінченних різниць.

К. Rajaiah (1985) [47] використано двовимірний метод фотопружності і спеціальне розташування полярископа. В роботі за допомогою експерименту виконано оптимізацію форми отворів у кругових циліндричних оболонках при дії кручення, для деякого діапазону значень параметра β . З ділянок навколо отвору з низькими напруженнями систематично видаляється матеріал. У результаті

отримано, що квадратна форма отвору, з однією з діагоналей спрямованої уздовж осі оболонки, при $\beta < 0,75$ може приводити до більш низького ККН, чим при круглому отворі, а при $\beta > 0,75$ навпаки, давати більш високе значення ККН. Отримано задовільну відповідність результатів з аналітичним розв'язком [21] та з експериментальними даними [42].

J. W. Bull (1982) [48] представлено результати експериментального і скінченно-елементного аналізу напруженого стану циліндричної оболонки з великим круговим отвором. Наведено три випадки навантаження: стиск, кручення і вигин. Досліджено сталеві оболонки великих довжин. Прийнято припущення про рівномірний напружений стан на краях оболонки. Показано, що з ростом параметру r/R вплив отвору не обмежується локальною ділянкою. Отримані дані знаходяться в добрій узгодженості з [22].

Т. К. Бегеевим (1984) [49] визначено НДС у тонкостінних циліндричних оболонках, ослаблених круговим отвором, із застосуванням розрахунково-експериментального методу, заснованого на спільному застосуванні методів голографічної інтерферометрії і скінченних елементів. Метод голографічної інтерферометрії дозволяє безконтактно вимірювати тривимірні поля переміщень поверхні об'єктів складної форми. Точність застосування комбінованого методу залежить від точності вимірювання переміщень. Для аналізу НДС застосовуються трикутні елементи, які вперше були запропоновані в роботі G. P. Bazeley (1965) [50], що сприймають мембранні і вигинальні навантаження.

Огляд літератури показав, що вивченню проблеми концентрації напружень з використанням лінійного підходу присвячено безліч робіт. Кількість публікацій, присвячених вирішенню задач у геометрично нелінійній постановці, відносно невелика.

У процесі навантаження в істотній мірі впливають нелінійні деформації в зонах концентрації напружень на НДС біля отворів у тонких оболонках. Для вирішення задач з урахуванням геометричної нелінійності часто використовуються методи дискретних елементів, скінченнорізницевого методу, ітераційні і варіаційні методи. Застосування різницевого чисельного методу при

геометрично нелінійному аналізі викликає дуже серйозні труднощі через високі градієнти напруженого стану в локальних зонах концентрації і необхідності використання нерівномірних сіток, тому переважним є МСЕ. Результати наближених і з урахуванням нелінійності геометричного типу розв'язків, як правило, носять характер обмежених обчислень. Зазвичай розв'язки виявляють лише величину напружень у зоні концентрації напружень, залишаючи відкритим питання про напружений стан навколо джерел концентрації, що має велике значення для оцінки несучої здібності оболонок.

У [20] нелінійні задачі зводяться до інтегрування диференціальних рівнянь теорії тонких оболонок у приватних похідних зі змінними коефіцієнтами. Геометричні співвідношення приймаються нелійними, відповідними теорії гнучких оболонок або теорії оболонок середнього вигину. У додатковому стані, обумовленому геометричною нелінійністю, уздовж межі отвору прикладаються зусилля, які спільно із силами основного стану забезпечують задоволення граничних умов задачі. Передбачається, що переміщення і функції напружень має вигляд суми величин, що відносяться до основного і додаткового станів. Далеко від зони концентрації напружень зазвичай використовуються умови безмоментного напруженого стану.

R. Kamalarajah (2015) [51] виконано SE-аналіз напруженого стану пружних ізотропних довгих оболонок із малим і середнім отвором із застосуванням методу Ньютона – Рафсона в програмному комплексі Abaqus. В роботі розглядається два види навантаження: осьовий стиск і кручення. Передбачається, що довжина оболонки є достатньою для того, щоб ігнорувати вплив країв на напружений стан і прийняти припущення про локальність збуреного поля напружень. Досліджено вплив розміру отвору на жорсткість оболонки. Отримані результати узгоджуються з результатами експерименту [48].

О. М. Гузь, Є. А. Сторожук та І. С. Чернишенко за допомогою модифікованого методу Ньютона – Канторовича, методу додаткових напружень та методу скінченних елементів дослідили НДС тонких ізотропних оболонок ослаблених одним або двома круговими чи криволінійними отворами під дією

внутрішнього тиску або осевого розтягу. Отримано розподіл напружень в зоні їх концентрації. Виконано порівняння розв'язків, отриманих в лінійно пружній постановці та з урахуванням однієї фізичної або геометричної нелінійності (2004, 2006, 2008, 2018) [52 – 56].

R. C. Tennyson (1968) [57] за допомогою методу фотопружності отримано розподіл мембранних напружень і картини ізоклін навколо кругового отвору в циліндричній оболонці при дії стиску. Показано, що коефіцієнти концентрації мембранних напружень збільшуються з ростом параметра β .

1.2 Оцінка точності розв'язків на базі метода скінченних елементів

Застосування МСЕ в задачах про визначення НДС у тонкостінних конструкціях, реалізованого в програмні пакети інженерного аналізу стає все більш поширеним. Перевагою МСЕ є достатньо проста реалізація змішаних граничних умов. До недоліків можна віднести істотну залежність результатів від вибору скінченно-елементної (СЕ)-сітки. Досягнення високої точності в задачах про визначення НДС в оболонках з отворами є дуже важким у зв'язку з швидкозмінним характером напружень. Виникає проблема вибору правильної орієнтації елементів у сітці, що дозволяє отримати якісні результати. У зв'язку з цим, вченими проводяться дослідження залежності точності і збіжності розв'язку від орієнтації елементів у сітці, вивчаються методи адаптації сіток, які значно впливають на якість і точність скінченно-елементних розв'язків, а також розробляються різні схеми адаптації та генерації сіток.

У монографії О. Зенкевича (1975) [58] до питання збіжності стверджується, що розміри скінченних елементів, необхідних для отримання достовірних результатів, залежать від різних причин. Для тонкостінних оболонок у ділянці, в якій відбувається значна зміна вигинаючих моментів, обмежена крайовою зоною і для того, щоб отримати адекватне змінення моментів поблизу межі, необхідно використовувати досить дрібні елементи, при цьому мембранні сили можна точно обчислити при грубому розбитті.

R. P. Bhata (1990) [59] розроблено генератор сітки, здатний довільно дискретизувати двовимірні області на трикутні елементи з заданою щільністю. У роботі представлено ефективну реалізацію смугової сітки із застосуванням стратегії прямої автоматичної тріангуляції. Розроблений метод передбачає тимчасову вертикальну переорієнтацію підобластей геометричної моделі перед генерацією сітки, щоб гарантувати подобу сіток у різноспрямованих підобластях. Підобласті діляться на набір горизонтальних смуг, яким присвоюються набори граничних вузлів, а потім елементів.

О. Зенкевичем (1991) [60] введено концепції в оцінці точності та обговорено проблеми генерації сіток у лінійних двовимірних багатозв'язних задачах.

К. Е. Chen (1994) [61] запропоновано вирішення проблеми створення двовимірної адаптивної сітки чотирикутних елементів із використанням варіаційних принципів. Знаходиться варіаційний інтеграл, що генерує сіткову систему рівномірних розподілів помилок по кривих. Цей же інтеграл використовується для генерації нової адаптивної сітки.

У роботі В. В. Кабанова і Л. П. Желєзна (1985) [62] запропоновано алгоритм розрахунку НДС кругових циліндричних оболонок і пластин, ослаблених отвором довільної форми на основі МСЕ з використанням плоских і криволінійних чотирикутних елементів. Зроблено спробу побудувати криволінійний довільний чотирикутний скінченний елемент циліндричної оболонки природної кривизни без урахування переміщення його як жорсткого цілого. Переміщення точок апроксимується степеневими поліномами, а система лінійних алгебраїчних рівнянь вирішується методом розкладання матриці на дві трикутні.

W. Dorfler (2000) [63] представлено алгоритм адаптивного розв'язування лінійних еліптичних крайових задач. Після створення початкової сітки, використовуючи помилку даних, обчислюється послідовність уточнених дискретизацій і відповідних розв'язків для скінченних елементів, поки оцінена помилка не досягне встановленого допуску. Методика розглядає помилку в енергетичній нормі.

М. Е. Botkin (2004) [64] показано, що помилку дискретизації необхідно вимірювати щодо конкретної мети аналізу замість класичної норми енергії. Запропоновано інструмент адаптації сітки чотирикутних елементів, шляхом впровадження трикутних елементів в існуючу сітку і конвертації отриманої сітки в чотирикутну.

L. Fengjin (2015) [65] розроблено метод адаптивного уточнення сітки, який використовує ортогональну колокацію та коригує як розмір сітки, так і ступінь апроксимації поліномів у процесі уточнення.

Існують роботи, які обґрунтовують застосування трикутних елементів у задачах про концентрацію напружень. У роботі Е. Ф. D'Azevedo (2000) [66] наведено порівняльний аналіз ефективності білінійного наближення по чотирикутниках з лінійним наближенням по трикутниках. Запропоновано алгоритм побудови оптимально ефективної сітки, яка з найменшою кількістю елементів досягає заданої похибки. Для генерації оптимально ефективної сітки використовується анізотропне перетворення. Показано, що будь-який чотирикутник над ізотропним простором можна розкласти на два трикутники без збільшення максимальної похибки інтерполяції. При розбитті чотирикутних елементів на трикутні не вводяться додаткові вузли, а зростає кількість елементів, при цьому матриця має однакову кількість невідомих. Отримано, що лінійні трикутні скінченні елементи можуть бути кращі при розрахунках, так як вони дають кращу збіжність. Виявлено, що різні орієнтації сітки можуть забезпечити на порядок поліпшення точності наближення. В. С. Гудрамович, Е. Л. Гарт і О. М. Рубінчик (2009) [67] виконали порівняльний аналіз використання трикутних і чотирикутних скінченних елементів за допомогою проекційно-ітераційного методу при чисельному дослідженні розподілу полів напружень для пластини з прямокутним отвором при заданому лінійному законі переміщень на її межі. Показано, що використання трикутних скінченних елементів у зонах концентрації напружень може давати більш точне значення нормальних напружень, а використання квадратних елементів дає більш точне значення зсувних напружень. Також виконано порівняння ефективності проекційно-ітераційного варіанту з

традиційним МСЕ. У роботах В. С. Гудрамовича і Е. Л. Гарт (2007-2009) [68-70] пропонується проєкційно-ітераційна схема реалізації МСЕ для дослідження НДС тонкостінних оболонкових конструкцій з отворами. Описаний підхід передбачає, що в першому наближенні проводиться грубе розбиття області на елементи. Система лінійних алгебраїчних рівнянь вирішується за допомогою ітераційних методів, крім останнього наближення. Останнє наближення інтерполюється на більш дрібну сітку. Обчислення виконуються до досягнення заданої точності між сусідніми наближеннями.

N. Troyani (2005) [71] показано, що в разі дії кручення на оболонку, орієнтація сітки регулярних трикутних елементів значною мірою впливає на точність розв'язку та обчислення дотичних напружень. На прикладі мембрани, шляхом перестановки діагоналей у чотирикутних елементах змінюється орієнтація в довільно обраній сітці. Аналізуються два варіанти орієнтації елементів: перпендикулярно і паралельно контурним лініям мембрани. Показано, що автоматично згенерована сітка може призводити до несприятливих результатів в зонах максимальних напружень.

A. J. Sadowski (2013) [72] в результаті дослідження збіжності розв'язку отримано, що регулярна ортогональна сітка, що складається з чотирикутних лінійних елементів, впливає на результат по-різному в залежності від її орієнтації по відношенню до головних осей напружень. Регулярна сітка може мати глобальну орієнтацію, яка є оптимальною по відношенню до основних осей напружень. Оптимально орієнтована сітка вимагає значно менше елементів для досягнення бажаної точності в прогнозуванні втрати стійкості конструкції. Залежно від геометрії і виду навантаження сітка автоматичної генерації може виявитися найгіршою.

У роботі D. Chodorowska (2013) [73] представлено результати дослідження проблеми отримання достовірних результатів МСЕ-аналізу на прикладі тонкостінних оболонок, при дії закритичних навантажень. В роботі застосовано MSC.Marc. Показано, що на основі нелінійного чисельного аналізу можна сформулювати загальну рекомендацію для максимально можливого обмеження

розміру задачі. Прагнення підвищити точність за рахунок збільшення щільності SE-сітки, що успішно застосовується в лінійному аналізі, може бути не тільки неефективне при нелінійному аналізі, а й призвести до помилкових результатів або відсутності збіжності обчислень. Відповідно до розрахунків авторами проведено натурні експерименти. Відповідність чисельних і експериментальних даних залежить від правильного відтворення біфуркації, яка відбувається в процесі деформації. Необхідною умовою є отримання збіжності експериментального і чисельного співвідношення між обраним геометричним параметром, що характеризує сутність деформації конструкції. Така збіжність, в поєднанні з прийнятим в якості достатньої подібності післякритичних деформаційних форм, становить основу для прийняття достовірності розподілу напружень, визначених за допомогою МСЕ.

1.3 Висновки до розділу і постановка завдань дослідження

Огляд теоретичних і експериментальних результатів досліджень, що стосуються даної тематики, дозволив зробити наступні висновки:

1 Найбільше поширення в застосуванні до вирішення задачі про визначення НДС тонкостінних оболонок, ослаблених круговим отвором, отримала лінійна модель, запропонована А. І. Лур'є, в якій основним обмежувальним припущенням є те, що збурене поле напружень, викликане отвором, має локальний характер.

2 При вирішенні задач про визначення НДС оболонок з отворами поширеними в використанні є чисельні методи: скінченнорізницевий, граничних елементів та скінченних елементів (МСЕ), серед яких МСЕ є найбільш ефективним методом вирішення даної задачі. МСЕ вільний від обмежень, що стосуються розмірів оболонки, форми і величини отвору, реалізації складних граничних умов, особливостей навантаження, і дозволяє врахувати геометричну нелінійність деформування при вирішенні задачі.

3 Незважаючи на досягнуті успіхи дослідників, не можна вважати, що проблеми розрахунку тонких оболонок розглянуті в достатній мірі. В основному в роботах досліджуються оболонки під дією осьового стиску, розтягу, внутрішнього та зовнішнього тиску. В порівнянні із зазначеними видами навантаження, задача визначення НДС оболонок при крученні вивчена в меншому обсязі. Зазвичай визначається величина напружень у зоні їх концентрації, при цьому залишається відкритим питання про вплив граничних умов оболонки скінченної довжини на напружений стан та на величину коефіцієнта концентрації напружень. Кількість робіт, присвячених дослідженню впливу геометричної нелінійності на НДС і ККН в оболонках є обмеженою, це питання потребує більш ґрунтовного опрацювання.

Проведений аналітичний огляд сучасного стану проблеми дозволив сформулювати мету та завдання дослідження. Метою роботи є визначення впливу кругових отворів на напружено-деформований стан ізотропних пружних тонкостінних циліндричних оболонок скінченної довжини при крученні. Для досягнення мети сформульовано наступні завдання:

1 Розробка ефективного підходу до вирішення задачі про визначення напружено-деформованого стану циліндричних оболонок скінченної довжини, ослаблених круговим отвором, який полягає в створенні ефективних скінченно-елементних моделей та формулюванні критеріїв і процедур оцінки достовірності результатів.

2 Дослідження впливу змінення довжини оболонки і розміру отвору на напружено-деформований стан і коефіцієнт концентрації напружень при крученні на основі методу скінченних елементів, зокрема лінійного та геометрично нелінійного аналізів.

3 Визначення межі області застосовності моделі А. І. Лур'є в задачі про визначення напружено-деформованого стану в оболонках скінченних довжин, ослаблених круговим отвором у широкому діапазоні його розмірів.

4 Дослідження впливу величини навантаження на напружено-деформований стан і коефіцієнт концентрації напружень в оболонках скінченних

довжин з круговими отворами при крученні використовуючи геометрично нелінійний аналіз методу скінченних елементів.

5 Порівняння розв'язків, отриманих методом скінченних елементів у лінійній і геометрично нелінійній постановках, з метою визначення умов застосовності лінійного аналізу.

6 Проведення параметричного аналізу напружено-деформованого стану оболонок скінченних довжин, ослаблених круговим отвором при крученні для отримання нових даних про закономірності розвитку напружень і переміщень по усій поверхні оболонки, зокрема поблизу отвору у процесі навантаження.

В якості основного інструменту для вирішення поставлених завдань обраний, як найбільш відповідний для комп'ютерної реалізації ресурсомістких численних досліджень, метод скінченних елементів (МСЕ). Використовується МСЕ в формі методу переміщень, реалізований в програмному комплексі NASTRAN.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ ДО РОЗДІЛУ 1

- 1 Григолюк Э. И. Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.
- 2 Гузь А. Н. Исследования по теории тонких оболочек с отверстиями (обзор) / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов, Вик. Н. Чехов, К. И. Шнеренко // Прикладная механика, Том 15, № 11, 1979, с. 3 – 38.
- 3 Pattabiraman J. Statics and Dynamics of Elastic Shells with Cutouts – A Review / J. Pattabiraman, V. Ramamurti, D. V. Reddy // Journal of Ship Research, Vol. 18, No. 2, 1974, pp. 113 – 126.
- 4 Головешкин Ю. В. Теоретические основы определения концентрации напряжений около отверстий в тонких оболочках / Ю. В. Головешкин // Проблемы прочности, 1990, № 8, с. 42 – 46.
- 5 Гузь А. Н. Концентрация напряжений около отверстий / А. Н. Гузь // Тр. VII всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. с. 788 – 794.
- 6 Lekkerkerker J. G. The determination of elastic stresses near cylinder-to-cylinder imperfections / J. G. Lekkerkerker // Nuclear engineering and design 20 (1972), p. 57 – 84.
- 7 Pilkey Walter D. Peterson's stress concentration factors / Walter D. Pilkey, Deborah F. Pilkey, – John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey – 3rd ed., – 2008. – 522 p.
- 8 Найбер Г. Концентрация напряжений. – М. : ОГИЗ, 1947. – 204 с.
- 9 Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек / А. И. Лурье // ПММ. – 1940. – Вып. 2. – С. 7 – 34.
- 10 Лурье А. И. Концентрация напряжений в области кругового отверстия на поверхности кругового цилиндра / А. И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1946. – Т. 10, № 3, – С. 307 – 406.
- 11 Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек / А. И. Лурье. – М. : Госгехиздат, 1947. – 252 с.

12 Шевляков Ю. А. Кручения полого цилиндра з отвором на боковій поверхні / Ю. А. Шевляков, Ф. С. Зігель // ДАН УРСР, Сер. А. – 1954. – № 1. – С. 41 – 44.

13 Пирогов И. М. Кручение цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием / И. М. Пирогов // Изв. вузов, Машиностроение. – 1960. – № 9. – С. 78 – 82.

14 Withum D. The cylindrical shell with a circular hole under torsion / D. Withum // Ingenieur – Archiv. – Heft 26. – 1958. – P. 435 – 446.

15 Фролов О. А. Концентрация напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной вырезом / О. А. Фролов // Тр. конф. по теор. пластин и оболочек, 1961, вып. 1, с. 408 – 412

16 Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. / Г. Н. Савин – Киев, 1968, – 888 с.

17 Гузь А. Н. Приближенные решения некоторых задач о концентрации напряжений около отверстий в изотропных и ортотропных оболочках. / А. Н. Гузь // Теория оболочек и пластин. Труды IV всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, 1962. с. 431 – 436.

18 Гузь А. Н. Исследование напряженного состояния в цилиндрической оболочке с немалыми отверстиями. / А. Н. Гузь, В. Н. Чехов // Теория оболочек и пластин. Труды 7 всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, 1969. М. : Наука, 1970, с. 788 – 794.

19 Чехов В. Н. Численное определение концентрации напряжений около отверстия в круговой цилиндрической оболочке. / В. Н. Чехов, С. В. Закора. // Прикладная механика, Т. 8, № 7. 1972, с. 108 – 112.

20 Гузь А. Н. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов и др. – Киев, 1980. – 636 с.

21 Van Dyke P. Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell / P. Van Dyke // AIAA Journ. – 1965. – Vol. 3. – No 9. – P. 1733 – 1742.

22 Lekkerkerker J. G. On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole / J. G. Lekkerkerker // Ph.D. Dissertation, Technological University, Delft, The Netherlands, 1965. – 78 p.

23 Lekkerkerker J. G. Stress concentration around circular hole in cylindrical shells / J. G. Lekkerkerker // Applied Mechanics, 1966. – P. 283 – 288.

24 Eringen A.C. State of stress in a circular cylindrical shell with a circular hole / A. C. Eringen, A. K. Naghdi, C. C. Thiel // General Technology Corp Torrance Calif, Rpt. – No. 3 – 6 – 1964. – P. 161 – 172.

25 Adams N. J. I. Stress Concentration in a Cylindrical Shell Containing a Circular Hole / Adams N. J. I. // Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry. – 1971. – P. 953 – 961.

26 Rao M. N. B. On stress around an elliptic hole in a cylindrical shell. / M. N. B. Rao, T. Ariman. // Acta Mechanica 12. – 1971. P. 1 – 20.

27 Bapurao M. N. On the stresses in the vicinity of an elliptic hole in a cylindrical shell under torsional loading. / M. N. Bapurao, M. V. V. Murthy // Nuclear engineering and design 16. – 1971. – P. 309 – 321.

28 Bapurao M. N. Stress concentration around an elliptic hole in a cylindrical shell under torsion with major axis of the hole perpendicular to the shell axis. / M. N. Bapurao, M. V. V. Murthy // J. Appl. Mech, 1977, 44(1):184 – 186.

29 Murthy M. V. V. On the stress problem of large elliptical cutouts and cracks in circular cylindrical shells / M. V. V. Murthy, K. P. Rao, A. K. Rao // Int. J. Solids Structures, 1974, Vol. 10, pp. 1243 – 1269.

30 Minoru Hamada. Stress concentration of a Cylindrical Shell with one or two circular holes / Minoru Hamada, Kazuo Yokoya, Masayuki Hamamoto, Tadashi Masuda // Bulletin of the JSME. Vol.15, No.86, 1972, P. 907 – 916.

31 Pytel' L. P. On the stress concentration near a cutout on the surface of an orthotropic cylindrical shell / L. P. Pytel', V. G. Kukushkin // Translated from Prykladnaya Mekhanika, 1973, Vol. 9, No. 3, pp. 114 – 117.

32 C.-j.Tsai. Elliptical cutouts in cylindrical shells. / C.-j.Tsai, J.L.Sanders // J. Appl. Mech. 1975, 42(2) : 326 – 334.

33 Hansen Erik B. An integral equation method for stress concentration problems in cylindrical shells / Erik B. Hansen. // Journal of Elasticity, Vol. 7, No. 3, 1977, pp. 283 – 305.

34 Revenko V. P. Analysis of the stress-strain state of a shallow orthotropic cylindrical shell with an elliptical hole / V. P. Revenko // Translated from Prikladnaya Mekhanika, Vol. 24, No. 4, 1988, pp. 57 – 63.

35 Головешкин Ю. В. Решение задачи о концентрации напряжений около отверстий в тонких оболочках нулевой гауссовой кривизны с использованием приведения разрешающего уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно комплексного переменного / Головешкин Ю. В. // Проблемы прочности, 1989, № 11, с. 114 – 118.

36 M.-d. Xue. Some Results on the Analytical Solution of Cylindrical Shells with Large Opening / M.-d. Xue, Y. Deng, K.-c. Hwang // Journal of Pressure Vessel Technology, 1991, Vol. 113, P. 297 – 307.

37 Donnell L. H. Stability of thin-walled tubes under torsion / L. H. Donnell // NASA Report. 1933. № 479, pp 95 – 116.

38 Oterkus Erkan. Stress analysis of composite cylindrical shell with an elliptical cutout / Erkan Oterkus, Erdogan Madenci, Michael P.Nemeth. // Journal of mechanics of materials and structures, Vol. 2, № 4, 2007, pp. 695 – 727.

39 Mizagoltabarroshan Mahdi. Studying Decreased Methods of Stress Concentration around Holes and Openings of Plate and Shell Structures' Body / Mahdi Mizagoltabarroshan // International research Journal of Applied and Basic Sciences, Vol. 5(8) : 1008 – 1015, 2013.

40 Довбня Е. Н. Влияние кругового отверстия на напряженное состояние оболочки произвольной гауссовой кривизны / Е. Н. Довбня, Н.А. Крупко // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 108 – 125.

41 Houghton D.S. The effects of curvature on the stress concentration around holes in shells / D. S. Houghton, A. Rothwell // College of Aeronautics, Rpt. – No. 156, – 1962 – 20 p.

42 Александров А. Я. Исследование упругопластического деформирования оболочек с вырезами и усилениями методом фотоупругих покрытий / А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, А. С. Ракин // Прикладная механика, 1966, 2, № 3, с. 1 – 9.

43 Pierce D. N. Stresses around elliptic holes in circular cylindrical shells / D. N. Pierce, S. I. Chou. // Experimental Mechanics, Vol. 13, Issue 11, 1973, pp. 487 – 492.

44 F. P. Chiang. Multi-aperture white light speckle method applied to the strain analysis of cylinders with holes under compression. / F. P. Chiang, B.C. Liu, S.T. Lin. // Optics and Lasers in Engineering, 2. – 1981. – P. 151 – 160.

45 Балалов В. В. Определение перемещений контура выреза в цилиндрических оболочках при кручении методом голографической интерферометрии / В. В. Балалов, В. С. Писарев, В. П. Щепинов, В. В. Яковлев // Прикл. Механика. – 1988. – Т. 24, № 7. – С. 63 – 69.

46 Полиповский Л. А. Распределение напряжений около отверстий в тонкостенных оболочках / Л. А. Полиповский // Известия Томского ордена Октябрьской революции и ордена Трудового Красного Знамени политехнического института им. С. М. Кирова, том 225, 1972, с. 69 – 72.

47 Rajaiah K. Stresses around circular, square and optimized holes in circular cylindrical shells under torsion / K. Rajaiah, Ramesh Kumar // Int. Journal Solid and Structures, 1985, Vol. 21, No 2, p. 177 – 185.

48 Bull J. W. Stresses around Large Circular Holes in Uniform Circular Cylindrical Shells / J. W. Bull // Journal of Strain Analysis. – 1982 – Vol. 17. – No 16. – P. 9 – 12.

49 Бегеев Т. К. Исследование напряженно–деформированного состояния оболочки с отверстием методами конечных элементов и голографической интерферометрии / Т. К. Бегеев, В. И. Гришин, В. С. Писарев // Ученые записки ЦАГИ, 1984, т. XV, № 6, 85 – 96 с.

50 Bazeley G. P. Triangular elements in bending-conforming and nonconforming solutions / G. P. Bazeley, J. K. Cheung, B. M. Ivons, O. C. Zienkiewich // Proc. Conf.

Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. Of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, October, 1965.

51 Kamalarajah R. Stress Analysis of Uniform Circular Cylindrical Shells with Large Circular Holes / R. Kamalarajah, W. Stoffberg, J. W. Bull, M. Chizari // Proceedings of the World Congress on Engineering 2015 Vol II WCE 2015, July 1 – 3, 2015, London, U. K.

52 Гузь А. Н. Упругопластическое состояние гибких цилиндрических оболочек с двумя круговыми отверстиями / А. Н. Гузь, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикладная механика, 2004, 40, № 10. С. 107 – 112.

53 Storozhuk E. A. Stress distribution in physically and geometrically nonlinear thin cylindrical shells with two holes / E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // International Allied Mechanics, Vol. 41, No. 11, 2005. PP. 1280 – 1287.

54 Чернышенко И. С. Неупругое деформирование гибки цилиндрически оболочек, ослаблены криволинейным отверстием / И. С. Чернышенко, Е. А. Сторожук // Прикладная механика, 2006, 42, № 12. С. 115 – 123.

55 Чернышенко И. С. Упругопластическое состояние гибких цилиндрических оболочек с круговым выреом при осевом растяжении / И. С. Чернышенко, Е. А. Сторожук, С. Б. Харенко // Прикладная механика, 2008, 44, № 7. С. 101 – 109.

56 Сторожук Е. А. Распределение напряжений около кругового отверстия в гибкой ортотропной цилиндрической оболочке эллиптического поперечного сечения / Е. А. Сторожук, С. М Комарчук // Прикладная механика, 2018, 54, № 1. С. 86 – 93.

57 Tennyson R. C. The Effects of Unreinforced Circular Cutouts on the Buckling of Circular Cylindrical Shells Under Axial Compression/Journal of Engineering for Industry, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 90, 1968, pp. 541 – 546.

58 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 542 с.

59 Bhata R. P. Two dimensional finite element mesh generation based on stripwise automatic triangulation / R. P. Bhata, K. L. Lawrence // *Computers and Structures* Vol. 36, No. 2, pp. 309 – 319, 1990.

60 Zienkiewicz O. C. Udaptivity and mesh generation / O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu // *Int. journal for numerical methods in engineering*. Vol. 32, pp.783 – 810, 1991.

61 Chen K. E. Two-dimensional adaptive quadrilateral mesh generation / K. E. Chen // *Communications in numerical methods in engineering*, Vol. 10, 815 – 825, 1994.

62 Кабанов В. В. Применение метода конечных элементов к расчету на прочность круговых цилиндрических оболочек с вырезами / В. В. Кабанов, Л. П. Железнов // *Ученые записки ЦАГИ*, 1985, т. XVI, № 3, 92 – 97 с.

63 Dorfler W. An adaptive finite element method for linear elliptic equation with variable coefficients. / W. Dorfler, O. Wilderotter // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 80 (2000) 7, pp. 481 – 491.

64 E. Botkin Mark. An adaptive mesh refinement of quadrilateral finite element meshes based upon a posteriori error estimation of quantities of interest: linear static response / Mark E. Botkin, Hui-Ping Wang // *Engineering with Computers* (2004) 20 : PP. 31 – 37.

65 Fengjin Liu. Adaptive mesh refinement method for optimal control using nonsmoothness detection and mesh size reduction / Fenjin Liu, William W. Hager, Anil V. Rao // *Journal of the Franklin Institute*, 352 (2015). PP. 4081 – 4106.

66 D'Azevedo E. F. Are bilinear quadrilaterals better than linear triangles? / D'Azevedo E. F. // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2000, – 22(1), P. 198 – 217.

67 Гудрамович В. С. Линейные и билинейные аппроксимации в проекционно-итерационном варианте метода конечных элементов для плоской задачи теории упругости / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, О. М. Рубинчик // *Техн. механика*. – 2009. – № 2. – С. 95 – 104.

68 Гудрамович В. С. Повышение вычислительной эффективности проекционно-итерационного варианта МКЭ при использовании адаптивных

сеток / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконт // Theoretical foundations of civil engineering. – Warsaw: Warszawska Politechnica, 2009. – Вып. 17. – С. 99 – 104.

69 Гудрамович В. С. Вплив форми скінченного елементу на обчислювальну ефективність проекційно-ітераційних методів при розв'язуванні плоскої задачі теорії пружності / В. С. Гудрамович, Е. Л. Гарт // Вісн. Київського нац. унів. ім. Т. Шевченка. Сер. : фіз.-мат. науки. – 2008. – № 4. – С. 53 – 58.

70 Гарт Э. Л. Проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов на последовательности адаптивных сеток / Э. Л. Гарт // Техническая механика. – 2007. – № 2. – С. 92 – 100.

71 Troyani N. Effect of finite element mesh orientation on solution accuracy for torsional problems. / N. Troyani, A Pérez, P. Baíz. // Finite Elements in Analysis and Design. – 2005. – 41. – P. 1377 – 1383.

72 Adam J. Sadowski. On the relationship between mesh and stress field orientations in linear stability analyses of thin plates and shells. / Adam J. Sadowski, J. Michael Rotter. // Finite Elements in Analysis and Design. – 2013. – 73C, P. 42 – 54.

73 Dorota Chodorowska. Numerical Representation of Bifurcation in the Process of Determining Stress Distributions in PostCritical Deformation States of Aviation LoadBearing Structures / Dorota Chodorowska, Tomasz Kopecki, Przemyslaw Mazurek. // Mechanics and Mechanical Engineering Vol. 17, No. 1 (2013), P. 17 – 27.

РОЗДІЛ 2

АЛГОРИТМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ

У розділі викладені основи алгоритму МСЕ, відповідно до фірмової документації, яка супроводжує програмний пакет MSC/Nastran [1 – 3], і літератури, присвяченій чисельним методам [4 – 8].

2.1 Функціонал повної енергії деформації. Мінімізація функціоналу для отримання системи алгебраїчних рівнянь

Програмний комплекс Nastran використовує варіаційний підхід МСЕ в формі методу переміщень [1 – 3]. В якості невідомих виступають переміщення. Для кожного елемента записується поліном – апроксимуюча координатна функція $[N]$, вона ж функція форми. Використовуючи функції форми, визначаються переміщення в вузлах. Переміщення елемента визначається компонентами переміщень у вузлах за законом апроксимації:

$$\{u\} = [N]\{U\} \quad (2.1)$$

де $[N]$ – функція форми;

$\{U\}$ – вузлові переміщення.

Після визначення вузлових переміщень обчислюються компоненти тензорів деформацій і напружень на основі геометричних і фізичних рівнянь відповідно.

Варіаційний підхід полягає в знаходженні функції, яка повідомляє функціоналу потенційної енергії системи найменше або найбільше значення. Для відзнайдення поля переміщень формулювання МСЕ пов'язане з пошуком мінімуму потенційної енергії системи серед можливих переміщень заданої форми.

Повна потенційна енергія пружної системи складається з енергії деформації в тілі (Λ) і потенційної енергії зовнішніх сил (w). Після розбиття області на скінченні елементи вираз повної потенційної енергії записується у вигляді суми за елементами:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (\Lambda^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \Pi^{(e)} \quad (2.2)$$

де e – типовий скінченний елемент.

Повна енергія деформації отримується шляхом інтегрування за обсягом тіла:

$$\Lambda = \int_V \frac{1}{2} (\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{\varepsilon_0\}^T \{\sigma\}) dV \quad (2.3)$$

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy}] \quad (2.4)$$

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \tau_{xy}] \quad (2.5)$$

де $\{\varepsilon\}$ – повна деформація;

$\{\varepsilon_0\}$ – початкова деформація;

T – знак транспонування.

Співвідношення деформацій і переміщень мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.6)$$

де u, v, w – переміщення уздовж координатних осей x, y і z (в локальній системі координат).

Вектор деформації визначається наступним чином:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \quad (2.7)$$

де $[B]$ – матриця зв'язку деформацій і переміщень, отримана диференціюванням матриці функції форми $[N]$.

Зв'язок компонентів тензорів напружень і деформацій описується законом Гука:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon_0\} \quad (2.8)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

де $[D]$ – матриця пружності матеріалу (містить пружні константи матеріалу).

Тепер можна записати вираз енергії деформації скінченного елемента:

$$\Lambda = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \left(\{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} - 2 \{U\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} + \{\varepsilon_0^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} \right) dV \quad (2.10)$$

Рівняння рівноваги можна отримати за допомогою методу Рітца. Для виконання умов рівноваги повинна виконуватися умова стаціонарності потенційної енергії системи. Для цього необхідно продиференціювати величину Π по переміщеннях U і прирівняти нулю. Вираз мінімізації повної потенційної енергії в скінченному елементі набуде вигляду:

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}] \{U\} + \{f^{(e)}\} \quad (2.11)$$

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \quad (2.12)$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X^{(e)} \\ Y^{(e)} \\ Z^{(e)} \end{Bmatrix} dV - \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} P_x^{(e)} \\ P_y^{(e)} \\ P_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS - \{P\}, \quad (2.13)$$

де $[k^{(e)}]$ – матриця жорсткості елемента;

$\{f^{(e)}\}$ – вектор вузлових сил елемента.

Підсумовування виразу (2.11) за елементами приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.14)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \quad (2.15)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (2.16)$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості;

$\{F\}$ – глобальний вектор-стовпець сил.

2.2 Нелінійний статичний аналіз. Метод Ньютона. Метод продовження по параметру довжини дуги

Представлений нижче опис нелінійного статичного МСЕ-аналізу відповідає [1, 2, 6, 7, 8].

У лінійному статичному аналізі залежність переміщень від навантажень лінійна. Для вирішення задачі жорсткість системи і граничні умови визначаються один раз. Матриця жорсткості $[K_0]$ обчислена в початковій точці (0) визначає нахил лінійної залежності $F(U)$:

$$[K_0] = \int_V [B_0]^T [D] [\bar{B}_0] dV. \quad (2.17)$$

У нелінійній постановці в алгоритм розв'язування вводиться нелінійна залежність між деформаціями і переміщеннями в межах скінченного елемента. У загальному вигляді елементи матриці являють собою степеневі функції від вузлових переміщень. Матриця жорсткості для всієї конструкції характеризує нелінійну залежність між вузловими зусиллями та вузловими переміщеннями.

При врахуванні геометричної нелінійності складається система нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$[K_{el} + K_{\sigma}]\{U\} = \{F\}, \quad (2.18)$$

де $[K_{el}]$ – матриця жорсткості елементів, отримана через жорсткість матеріалу;

$[K_{\sigma}]$ – диференціальна матриця жорсткості (залежить від напружень) або матриця початкових напружень (в нелінійному ітераційному процесі початкові напруження присутні з другого приросту).

Матриця жорсткості елементів складається з двох: лінійної $[K_0]$ і нелінійної $[K_{NL}]$, які відповідають лінійній і нелінійній поведінці матеріалу:

$$[K_{el}] = [K_0] + [K_{NL}], \quad (2.19)$$

$$[K_{NL}] = \int_V ([B_0]^T [D] [B_{NL}] + [B_L]^T [D] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [D] [B_0]) dV. \quad (2.20)$$

Сума матриць жорсткості елементів і диференціальної матриці називається тангенціальною матрицею жорсткості $[K_{\tau}]$:

$$[K_{\tau}] = [K_0] + [K_{NL}] + [K_{\sigma}]. \quad (2.21)$$

У дисертаційній роботі для вирішення задачі в геометрично нелінійній постановці застосовуються метод Ньютона – Рафсона і метод продовження по параметру довжини дуги.

Метод Ньютона – Рафсона має ітераційний алгоритм, який заснований на розкладанні нелінійної функції в ряд Тейлора. Вектор навантаження $\{F\}$ прикладається порціями ΔF , в кожній з яких виконується ітераційний процес щодо врівноваження ΔF . Тангенціальна матриця жорсткості $[K_T]$, визначається для кожної ітерації, вона визначає нахил кривої $F(U)$ для кожної з точок. Для кожного збільшення навантаження ΔF_i , визначається відповідний вектор переміщень U_i .

Метод продовження по параметру довжини дуги автоматично вибирає крок по навантаженню. Протягом ітерації, навантаження і переміщення є змінні. На першому кроці довжина дуги визначається з заданого навантаження і заданого числа кроків. На наступних кроках довжина дуги визначається, ґрунтуючись на довжині дуги з попереднього кроку.

У роботі розроблено 46 остаточних SE-сіток. Для кожної з величин отворів та кожної з довжин оболонок створена індивідуальна SE-модель, які відрізняються сіткою, тобто схемою розбиття на скінченні елементи та їх кількістю. Велика кількість елементів призводить до зростання обчислювальних витрат, тому для того, щоб досягти задовільних результатів в нелінійному аналізі для кожної з моделей індивідуально підбирався набір параметрів ітераційного розв'язування. Таким чином, у залежності від кількості скінченних елементів у сітці регулювався наступний набір параметрів розв'язування методом продовження по параметру:

- мінімально допустимий коефіцієнт регулювання довжини дуги між приростами: від 0,1 до 0,25 (допустимий діапазон $[0 \div 1]$);
- максимально допустимий коефіцієнт регулювання довжини дуги між приростами: від 1 до 2 (допустимий діапазон $[1 \div 4]$);
- необхідне число ітерацій для збіжності: від 50 до 100;
- максимальне число приросту кроку: від 100 до 1000.

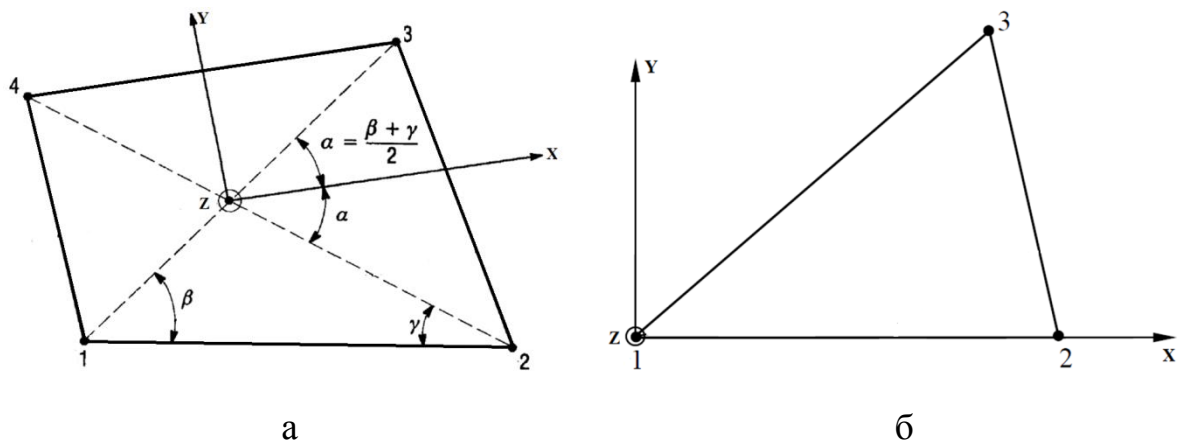
2.3 Особливості алгоритму застосування методу скінченних елементів

Для моделювання оболонок використовуються лінійні двовимірні чотирьох- і трьохвузлові елементи типу QUAD4 і STRIA3, для завдання граничних умов – жорсткий елемент типу RBE2 [3].

RBE2-елемент забезпечує жорсткий зв'язок довільної кількості вузлів між собою. В елементі визначається один незалежний вузол з шістьма незалежними ступенями свободи. Вузли, з якими зв'язується незалежний вузол – залежні, вони визначаються в глобальній системі координат. Для кожного ступеня свободи автоматично генерується рівняння. Кожне рівняння виражає одну залежну ступінь свободи як лінійну функцію незалежних ступенів свободи. У якості незалежного вузла обрано центр верхнього торцевого перетину оболонки, у якості залежних вузли по окружності верхнього торцевого перетину.

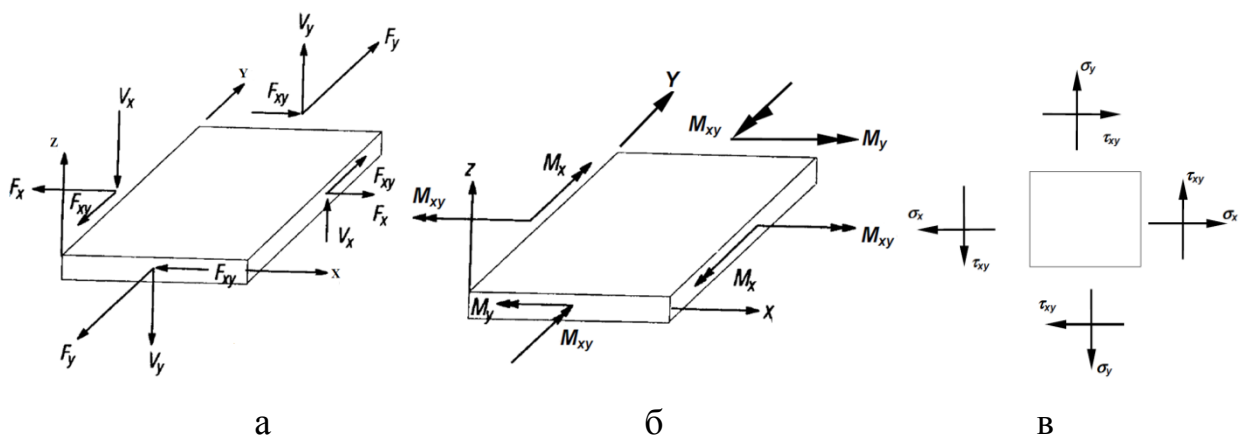
У Nastran двовимірні елементи відносяться до елементів плоского напруженого стану. Вважається, що для цих елементів деформації в поперечному напрямку постійні. У лінійному розрахунку для двовимірних елементів справедливі припущення класичної теорії оболонок. QUAD4-елемент сприймає мембранні зусилля, зусилля вигину і зсув з площини. Виведення напружень і зусиль виконується в системі координат елемента, яка наведена на рис. 2.1 а [стр.44, 3]. Зусилля і моменти визначаються по центру елемента, напруження визначаються для обох поверхонь елемента по відношенню до серединної площини (на зовнішній і внутрішній поверхні елемента), відповідно до рис. 2.2 [стр.45, 3]. Характеристики STRIA3-елемента аналогічні QUAD4. STRIA3 має постійну деформацію. Система координат STRIA3-елемента наведена на рис. 2.1 б.

СЕ-сітки складаються з нерегулярної (навколо отвору) і регулярної (використовується за межами нерегулярної сітки) частин. Варто зазначити, що розміри ділянки навколо отвору, для якої застосовувалася нерегулярна сітка, визначалася з чисельних експериментів і вибиралась таким чином, щоб охопити зону з великим градієнтом напружень.



а – QUAD4-елемент; б – TRIA3-елемент

Рисунок 2.1 – Система координат елемента



а – зусилля; б – моменти; в – напруження

Рисунок 2.2 – Зусилля, моменти та напруження в двовимірному елементі

Збільшення розміру отвору викликає необхідність розробки нової схеми розбиття на скінченні елементи. При наявності в оболонці великого розміру отвору, для точного опису його криволінійної межі використовуються більш дрібні елементи.

Нерегулярні області сітки являють собою згущення елементів у радіальному напрямку по наближенню до межі отвору. Для переходу з нерегулярної частини в регулярну перехідні сітки не використовуються. Розмір елементів, застосовуваних у регулярній сітці, залежить від розмірів елементів, використовуваних у нерегулярній її частині.

При збільшенні довжини оболонки додаються елементи по її краях, що викликає суттєве зростання числа ступенів свободи в моделі. Оболонки з

$L/R = 0,2; 0,5$ і 1 досліджуються при наявності в них малого розміру отвору, для таких оболонок сіткові моделі складаються з $\approx 20000 \dots 80000$ елементів. Оболонки з $L/R = 2; 3,9; 6,7; 11,3$ і $20,7$ досліджуються в широкому діапазоні розміру отворів, що в значній мірі впливає на кількість скінченних елементів:

- оболонки з $L/R = 2$ при малих отворах мають ≈ 80000 ступенів свободи, при великих ≈ 270000 ;
- $L/R = 3,9$: при малих отворах ≈ 130000 , при великих ≈ 350000 ;
- $L/R = 6,7$: при малих отворах ≈ 200000 , при великих ≈ 600000 ;
- $L/R = 11,3$: при малих отворах ≈ 380000 , при великих ≈ 1000000 ;
- $L/R = 20,7$: при малих отворах ≈ 650000 , при великих $\approx 750000 \dots 1200000$.

2.4 Висновки до розділу

У роботі застосовується варіант МСЕ в формі методу переміщень. Загальне формулювання МСЕ пов'язане з пошуком мінімуму потенційної енергії системи серед можливих переміщень заданої форми. Для вирішення поставлених завдань використовуються статичний лінійний і статичний геометрично нелінійний аналізи програмного комплексу NASTRAN. Застосовуються метод Ньютона – Рафсона і метод продовження по параметру довжини дуги.

Для моделювання об'єктів дослідження використовуються лінійні двовимірні чотирих- і трьохвузлові елементи типу QUAD4 і STRIA3. Для кожного розміру отвору і для кожної довжини оболонки розробляється індивідуальна SE-сітка. Розроблено 46 остаточних SE-сіток. Для кожної сітки вибирається свій набір параметрів нелінійного розв'язування.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ ДО РОЗДІЛУ 2

- 1 MSC.Software Cororation. Решение задач нелинейной статики в MSC.Nastran: Руководство пользователя, 1990. – 85 с.
- 2 MSC.Software Cororation. Handbook of Nonlinear Analysis (Solutions 106 and 129), P.661, 2014.
- 3 MSC.Software Cororation. Руководство пользователя, 1990. – 187 с.
- 4 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 542 с.
- 5 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. –М. : «Мир», 1979. – 392 с.
- 6 Э. И. Григолюк. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Григолюк Э. И, Шалишин В. И. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1988. – 232 с.
- 7 Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ / Н. В. Валишвили – М. : «Машиностроение», 1976. – 278 с. с ил.
- 8 Анализ прочности элементов авиационных конструкций с помощью САЕ-системы MSC.Patran – Nastran [Электронный ресурс] : интерактив. мультимед. пособие в системе дистанц. обучения «Moodle» / Ю. В. Скворцов, С. В. Глушков; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Электрон. текстовые и граф. дан. (6,1 Мбайта). – Самара, 2012. – 1 эл. опт. диск (CD-ROOM).

РОЗДІЛ 3

ЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ

У розділі представлені результати дослідження НДС і ККН в оболонках різних довжин, ослаблених круговим отвором різного розміру при дії кручення, на основі лінійного МСЕ-аналізу.

Особливість лінійного підходу до вирішення задачі про визначення напруженого стану конструкцій полягає в сталості ККН (1.1) при зміні рівня навантаження. Інша важлива особливість лінійних задач полягає в можливості застосування принципу суперпозиції розв'язків, виходячи з якого в широкоживаній моделі [1] напружений стан розділяється на два: основний або незбурений, відповідний однорідному полю напружень в суцільній оболонці без отвору, і збурений виникаючий в тій же оболонці при наявності отвору. Якщо перший стан визначається з розв'язку класичної крайової задачі, то для другого потрібно задовольнити крайові умови і на кромці отвору, і на торцях оболонки. Якщо на кромці отвору крайові умови формулюються стандартно, то для торців це зробити неможливо без додаткових припущень. В [1] такі припущення зроблено. Одне з них ґрунтується на припущенні про швидке згасання збуреної складової напруженого стану із віддаленням від отвору, на відстані $3-3,5r$ від його кромки, що приводить до можливості обнуління цих напружень на досить великій відстані від отвору. Звідси слідує друга спрощуюча вимога про нескінченну довжину оболонок. У постановці [1] ККН визначається єдиним параметром β (1.3) і не залежить від довжини оболонки.

Використання МСЕ-розв'язку для лінійної задачі дає можливість порівнювати і аналізувати застосовність моделі А. І. Лур'є до оболонок скінченних довжин у широкому діапазоні розмірів отворів.

Дослідження на основі лінійного МСЕ-аналізу виконано з метою:

– розробки ефективних СЕ-сіток;

- формулювання критеріїв точності і процедур оцінки достовірності результатів;
- дослідження впливу зміни довжини оболонки і розміру отвору на напружено-деформований стан і коефіцієнт концентрації напружень;
- дослідження межі області застосовності моделі А. І. Лур'є в задачі про визначення НДС оболонок скінченних довжин, ослаблених отвором у широкому діапазоні його розмірів.

Основні результати, викладені в розділі, відображено в роботах [2 – 7].

3.1 Постановка задачі

У роботі досліджуються пружні ізотропні тонкі циліндричні оболонки, ослаблені круговим отвором, в діапазоні параметру довжин L/R від 0,2 до 20,7, розмірів отворів r/R від 0,053 до 1,00 і товщин R/h від 100 до 974, з фіксованим радіусом оболонки R (рис. 3.1). Для L/R від 0,2 до 2 максимальний радіус отвору не перевищує половини довжини. Зазначені діапазони охоплюють всі можливі геометричні розміри: від малих до великих отворів, від помірно товстих до вельми тонких оболонок, від коротких до великих довжин. Під великими довжинами розуміються ті, для яких відбувається швидке згасання збурень напруженого стану із віддаленням від отвору, відповідно до постановки [1].

У вертикальному положенні нижній торець жорстко закріплений і нерухомий. В якості елемента, жорстко скріпленого з верхнім торцем оболонки, використовується імітатор жорсткої круглої пластини нульової товщини (RBE2-елемент), у центрі якого (в незалежному вузлі) прикладається крутний момент M_k . Цей елемент має шість ступенів свободи, таким чином, верхній торець оболонки може зміщуватися і повертатися вільно, зберігаючи кругову форму. Кромка отвору вільна від навантажень і від обмежень у переміщеннях. Вплив інших видів граничних умов на НДС оболонок не досліджувався.

Глобальна циліндрична система координат пов'язана з центром нижнього торцевого перерізу оболонки в її ненавантаженому, недеформованому стані і

залишається нерухомою при виникненні деформацій при дії крутного моменту. Позитивні напрямки переміщень, а також знаки кутових поворотів збігаються з напрямками осей і поворотів навколо них. Локальна система координат із початком у центрі кругового вирізу на розгортці оболонки використовується для опису напруженого стану і переміщень на контурі отвору. Ця циліндрична система координат також нерухома в процесі деформування оболонки.

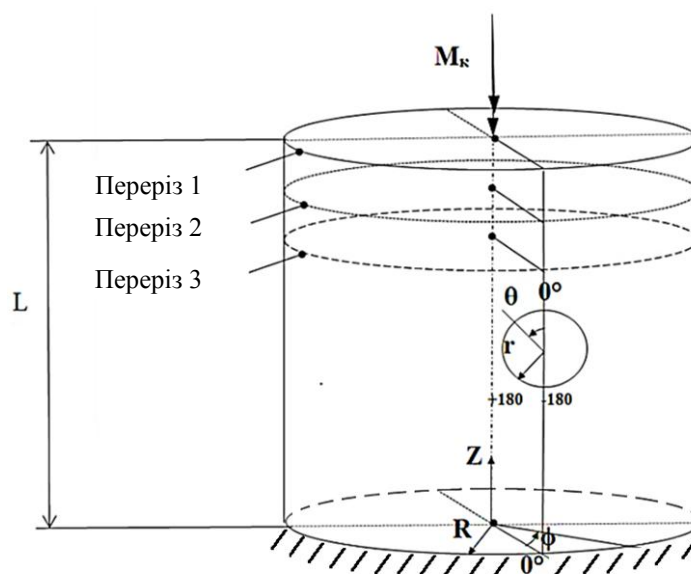


Рисунок 3.1 – Циліндрична оболонка, ослаблена круговим отвором

Механічні характеристики матеріалу: $E = 6900$ МПа, $\nu = 0,3$.

Щоб охарактеризувати змінність напруженого стану уздовж довжини оболонки і оцінити ступінь згасання збуреної частини поля напружень поблизу краю, обрано три перерізи у верхній її половині, перпендикулярних осі z , таким чином: переріз 1 – у верхнього краю оболонки; перерізи 2 і 3 з координатами $z = 1/8L$ і $1/4L$ відповідно.

3.2 Порівняння отриманих чисельних результатів із результатами інших авторів

Кілька авторів отримали аналітичні розв'язки задачі про визначення коефіцієнта концентрації напружень (k_t) в оболонках, ослаблених круговим

отвором при дії на неї кручення, всі вони засновані на моделі [1]. D. Withum [8] визначив ККН в діапазоні значень $\beta = [0 \div 1,9]$, J. G. Lekkerkerker [9] розширив ці кордони до $\beta = 2,8$, А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов і А. С. Ракін представили результати експериментального дослідження до $\beta = 2,9$ [10]. V. Duke [11] отримав результати в найбільшому діапазоні: $\beta = [0 \div 4]$. Розрахунки ККН для $\beta > 4$ у зазначених авторів відсутні. Мабуть, перевищення значення $\beta = 4$ призводить до погіршення збіжності розв'язку через повільне згасання напруженого стану із віддаленням від отвору. МСЕ надає можливість проаналізувати оболонки будь-яких довжин з отворами будь-яких розмірів, завдяки чому в даній роботі ККН визначено в набагато більшому діапазоні параметра, до $\beta = 24,9$.

Для верифікації результатів, отриманих на основі лінійного МСЕ-аналізу виконано їх порівняння з [10, 11] і представлено на рис. 3.2. МСЕ-результати наведені в діапазоні $\beta = [0,4 \div 6,5]$ для оболонок з L/R від 0,5 до 20,7, відношення радіуса до товщини є незмінним: $R/h = 163$. Тут під зміною параметра β мається на увазі зміна величини отвору r . Розгляд різних довжин оболонок показує вплив зміни довжини на величину ККН.

У результаті МСЕ-дослідження визначена довжина оболонки, для якої отримано найбільш близькі розв'язки відповідно до [10, 11] – $L/R = 20,7$. У цьому випадку чисельні дані знаходяться в задовільній узгодженості з результатами зазначених авторів. Максимальне відхилення МСЕ-результатів від [10, 11] отримано при $\beta \approx 1,0$, та із подальшим зростанням β криві зближуються між собою. Максимальна різниця МСЕ-розв'язків від [11] складає 5%, від експериментальних результатів [10] – 13%. Зазначена відмінність результатів пояснюється тим, що в МСЕ-постановці досліджуються оболонки скінченних довжин, на відміну від [10, 11].

Для оболонок з $L/R = 20,7; 11,3; 6,7$ і $3,9$ на ділянці $\beta = [0,4 \div 1]$ відзначається задовільний збіг ККН як між собою, так і з [10, 11].

Криві $L/R = 20,7$ та $11,3$ практично збігаються в діапазоні $\beta \approx [0,4 \div 2,4]$, з подальшим зростанням β крива $L/R = 11,3$ значно відхиляється від

$L/R = 20,7$ і розташовується нижче. Хоча $L/R = 11,3$ довга оболонка, навіть для неї ККН, отримані в МСЕ-постановці, помітно відрізняються від [10, 11] на ділянці $\beta \approx [2,4 \div 4]$. Причому цій ділянці відповідають невеликі отвори.

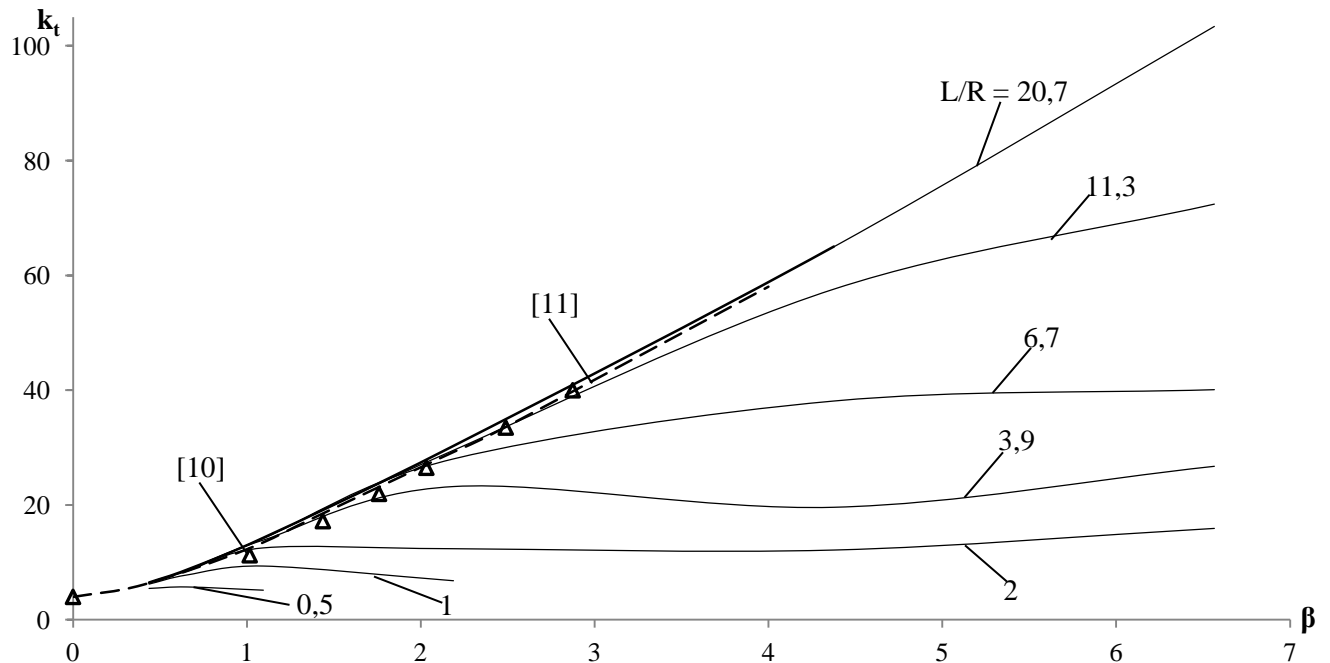


Рисунок 3.2 – Залежності коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від параметра β для різних параметрів довжин оболонок (L/R)

Для кожної з кривих з $L/R = 11,3; 6,7; 3,9; 2; 1$ і $0,5$ існує значення β , зі зменшенням якого вони стають дотичними до кривої $L/R = 20,7$. З подальшим зменшенням цього значення, кожна з кривих зливається з $L/R = 20,7$. Для $L/R = 11,3$ точка злиття: $\beta = 2,4$. Зі зменшенням довжини, точка злиття переміщається в сторону зменшення β , до тих пір, поки в випадку короткої оболонки $L/R = 0,5$ не стане близькою до $\beta = 0$.

Збільшення розміру отвору (збільшення β) не завжди призводить до зростання ККН. Для коротких оболонок з $L/R = 1$ і $L/R = 0,5$ з ростом β спостерігається незначний підйом ККН, потім невелике його зниження. Для середніх довжин $L/R = 3,9$ і $L/R = 2$ спостерігається немонотонна залежність коефіцієнта концентрації із збільшенням β : зростання ККН змінюється зниженням і повторним зростанням. Для великих довжин $L/R = 11,3$ і $L/R = 6,7$ ККН

монотонно зростає для всього діапазону β , при цьому починаючи з $\beta \approx 4,5$ зростання k_t істотно сповільнюється. Взагалі, із зменшенням довжини оболонки змінність k_t із зростанням величини отвору уповільнюється.

Важливо підкреслити, що зменшення довжини у всіх випадках приводить до суттєвого зниження рівня концентрації напружень.

Таким чином, ґрунтуючись на існуючих розв'язках [8 – 15] можна знайти такі довжини оболонок, для яких справедливе застосування моделі [1].

3.3 Вибір сіткових моделей і контроль точності розв'язку

Завдання створення адекватних розрахункових сіткових моделей, здатних правильно описувати НДС у зонах концентрації напружень, вимагає особливої уваги у зв'язку з швидкозмінністю поля напружень. Для таких зон характерно різке зростання рівня напружень в десятки разів, у порівнянні з напруженнями далеко від отвору, причому зони можуть бути значно малими. Наслідком цього, при застосуванні МСЕ точність результатів розрахунку залежить від вибору сітки.

Для розрахунку пластин і оболонок основними в застосуванні є чотирикутні (Quad) і трикутні (Tria) елементи, для яких доведено збіжність розв'язку [16 – 23]. Точність розв'язку при використанні трикутної SE-сітки та ефективність її застосування може бути цілком достатньою [21, 22]. Будь-який чотирикутник можна розкласти на два трикутники без збільшення максимальної похибки інтерполяції. При розбитті чотирикутних елементів на трикутні не вводяться додаткові вузли, а зростає кількість елементів, при цьому матриця має однакову кількість невідомих [21].

У завданнях про визначення концентрації напружень для зон з великими градієнтами напружень застосовується нерівномірне розбиття сітки з локальним згущенням. Розміри скінченних елементів, необхідних для отримання достовірних результатів, залежать від різних причин. У тонкостінних оболонках область, в якій відбувається значна зміна моментів вигину, обмежена крайовою зоною і для того, щоб отримати адекватну зміну моментів поблизу меж необхідно використовувати

досить дрібне розбиття, при цьому мембранні сили можна точно обчислити, використовуючи грубе розбиття [17]. Точність і збіжність розв'язку залежать від орієнтації елементів у сітці [18, 19, 23].

У роботі для досягнення задовільного вирішення задачі, для кожної з величини отворів розробляється індивідуальна SE-сітка зі згущенням елементів навколо отвору. При зміні довжини оболонки для фіксованого розміру отвору виконується додавання або відсікання регулярних частин сіток на торцях оболонки, а нерегулярна частина сітки поблизу отвору не змінюється. При переході до іншої товщини оболонки використовуються ті ж сітки, в цьому випадку зміни не потрібні.

Помилку отриманих MCE-розв'язків можна оцінити порівнянням отриманих результатів із розв'язками інших авторів там, де вони існують і шляхом аналізу збіжності за результатами, отриманими при збільшенні кількості скінченних елементів. У задачах про визначення концентрації напружень визначення помилки розв'язку простим подрібненням елементів часто виявляється недостатнім. Чисельне дослідження послідовностей адаптивних сіток для кожного з отворів показало, що подрібнення загальної кількості Quad-елементів не завжди веде до швидкого підвищення точності розв'язку. Згущення сітки в деякій області поблизу отвору істотно не впливає на швидкість збіжності. Ефективним виявилось дроблення елементів тільки уздовж границі отвору, оскільки зони концентрації напружень локалізовані саме в ряду елементів, які межують з його краєм. У разі дроблення чотирикутників на межі отвору процес підвищення точності виявляється повільним і ресурсомістким. Отримано, що використання трикутників у зонах концентрації може поліпшувати збіжність розв'язку на відміну від чотирикутників.

Досягти збіжності розв'язку вдається за рахунок комбінування двох дій. На першому кроці визначається щільність чотирикутної сітки уздовж межі отвору шляхом послідовного дроблення чотирикутних елементів. На другому кроці використовується прийом заміни чотирикутних елементів, розташованих уздовж межі отвору, на пари трикутних при тій же множині вузлів сітки за методикою,

описаною в [21]. З огляду на те, що зони концентрації напружень пов'язані з їх швидкою змінністю і при навантаженні оболонки вони можуть зсуватися уздовж отвору, перетворення СЕ-сітки проводиться симетричним чином уздовж всієї його межі.

Для визначення точності обчислень і контролю якості сіток розроблено додатковий метод, заснований на властивості лінійної моделі розрахунку НДС для довгих оболонок, яка полягає у тому, що коефіцієнт концентрації напружень не залежить від рівня навантаження і від довжини оболонки та визначається параметром β . Тобто, якщо розглядати декілька досить довгих оболонок з різними комбінаціями h , r і R , але з одним і тим же β , то значення ККН повинно бути однаковим для всіх оболонок.

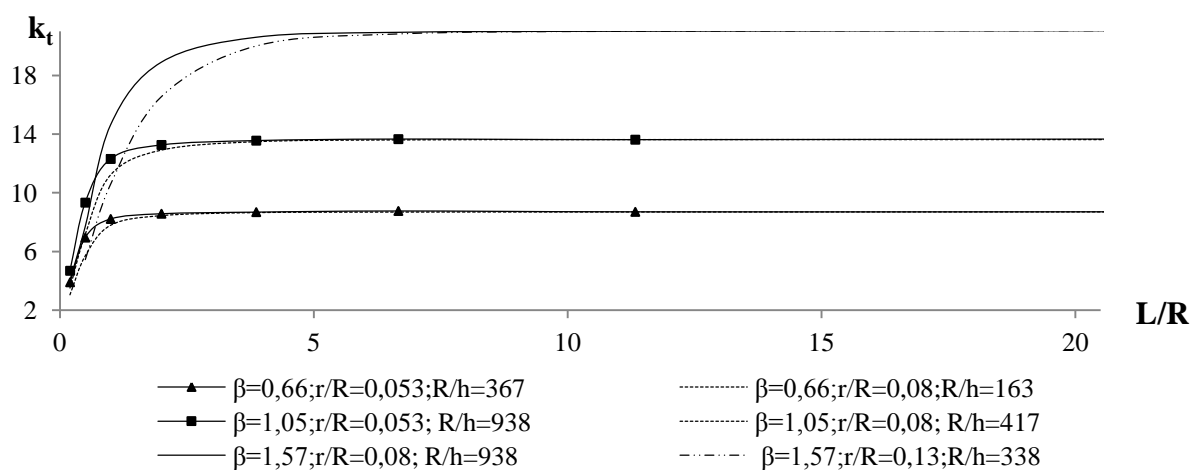
Для демонстрації зазначеної властивості, на рис. 3.3 представлені залежності ККН від параметра довжини, в діапазоні значень L/R від 0,2 до 20,7. Побудовано п'ять пар оболонок, три з яких з невеликим значенням β від 0,66 до 1,57 (рис. 3.3 а) і дві з великим β від 2,67 до 3,45 (рис. 3.3 б). Кожна пара оболонок має однакове β , але при різних отворах r і товщині h , з різними СЕ-сітками.

Починаючи з деяких довжин, швидкість росту k_t різко сповільнюється, і криві виходять на горизонтальні «полки». Такі горизонтальні ділянки повністю узгоджуються з класичною моделлю [1], при якій ККН постійна і незалежна від довжини величина. З ростом β ділянки незалежності ККН звужуються. Для $\beta = 0,66$ мінімальне значення параметра довжини для якого ККН стає постійним – $L/R \approx 2,5$, для $\beta = 1,05$ – $L/R \approx 4$, для $\beta = 1,57$ – $L/R \approx 6$, для $\beta = 2,67$ – $L/R \approx 14$ і для $\beta = 3,45$ – $L/R \approx 19$. Тобто, починаючи з деякого, визначеного розрахунками значення L/R результати узгоджуються з моделлю [1].

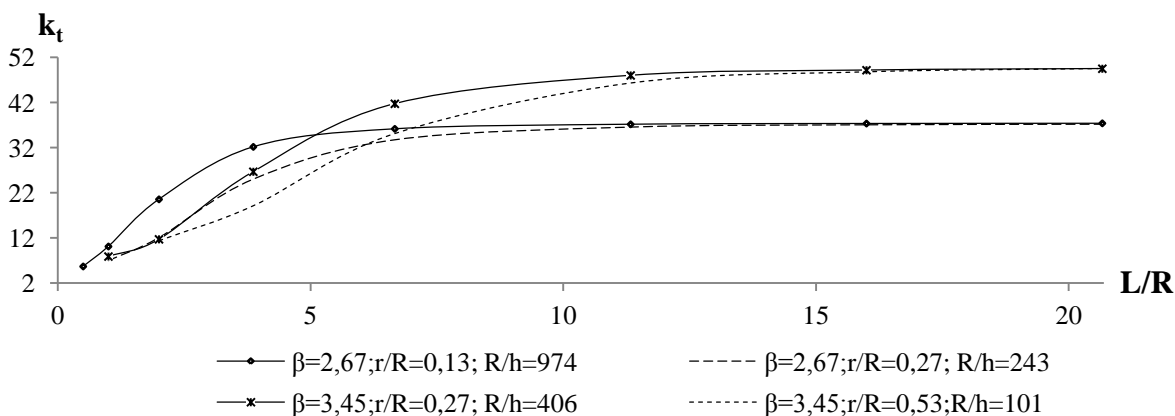
Криві показують збіжність ККН у парі довгих оболонок з однаковим β (збіг горизонтальних ділянок). Такий результат служить непрямою перевіркою валідності застосовуваних МСЕ-моделей, які при різних сітках дають однакові результати. Можна вважати, що помилка розв'язку витримана в умовах досить великих довжин, буде зменшуватися при переході до коротких оболонок, так як із

зменшенням довжини падає рівень концентрації напружень і зменшується змінюваність напружень в зоні їх концентрації.

Як буде показано далі, не завжди можна отримати ділянки на кривих, для яких ККН постійна величина. ККН може зростати для всього діапазону довжин, що буде засвідченням про непридатність моделі [1].



а



б

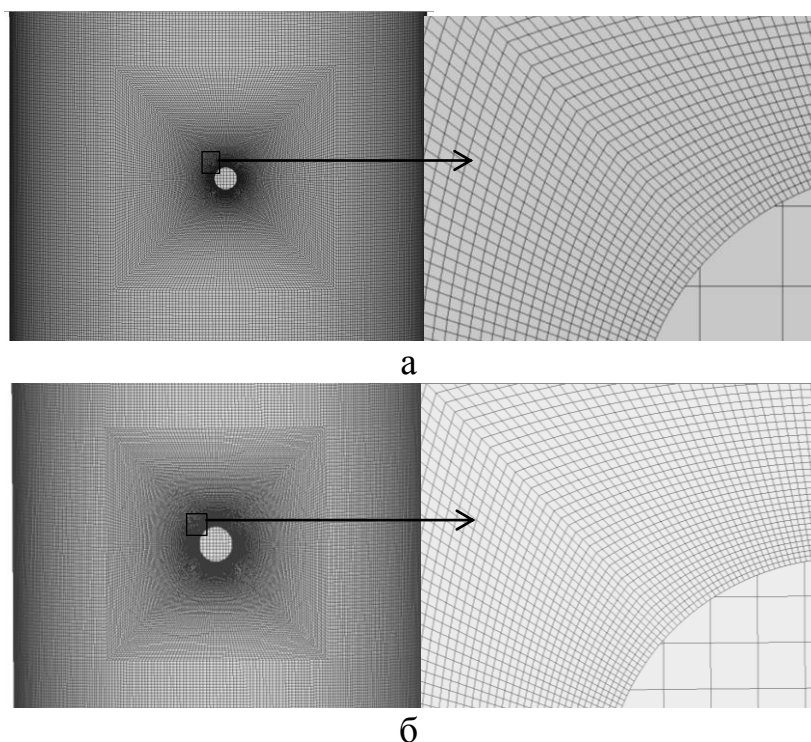
а – невеликі значення β ; б – великі значення β

Рисунок 3.3 – Залежності ККН від параметру довжини L/R при фіксованому значенні β

Завдяки отриманим результатам сформульовано додатковий метод контролю якості сіток і визначення точності розв'язку. Пропонується досліджувати НДС в оболонці з отвором у парі з оболонкою, яка має інший розмір отвору та товщину, за умови однакового значення параметру β для обох оболонок та їх досить великої довжини, для якої стабільно виконується умова незалежності ККН від L/R .

Представлена серія розрахунків, спрямована на оцінку збіжності розв'язку на прикладі пари оболонок великої довжини $L/R = 20,7$ з невеликим значенням $\beta = 0,66$, але з різними розмірами отворів $r/R = 0,053$ і $r/R = 0,08$, і різними товщинами $R/h = 367$ і $R/h = 163$ відповідно. Задовільним вважається такий результат, коли при збільшенні кількості скінченних елементів для кожної з сіток ККН у парі оболонок зійдуться до досить близьких значень між собою. За умови збіжності їх ККН можна провести порівняння з даними інших авторів, заснованими на моделі [1]. Еталонними SE-сітками будуть вважатися такі, які дають найбільш близькі результати не тільки між собою, а й з розв'язками інших авторів.

Для кожного з отворів в якості першого варіанту розрахунку використовуються нерегулярні SE-сітки MESH 0, зі згущенням скінченних елементів поблизу отвору і симетричним чином по відношенню до осі оболонки, які представлені на рис. 3.4. Застосовуються лінійні чотирьохвузлові Quad-елементи.



а – $r/R = 0,053$, $L/R = 20,7$, $\beta = 0,66$;

б – $r/R = 0,08$, $L/R = 20,7$, $\beta = 0,66$

Рисунок 3.4 – Первинна скінченно-елементна сітка із застосуванням Quad-елементів (MESH 0) (показано серединну частину оболонки, краї не відображено)

Для визначення помилки розв'язку, отриманого при використанні первинної SE-сітки MESH 0, виконується покрокове подрібнення елементів, розташованих уздовж межі отвору. Крок згущення призначається залежно від бажаної точності. Ступінь близькості розв'язків, отриманих на різних сітках, служить оцінкою швидкості збіжності. Якщо при переході від сітки до сітки результати досить близькі, то має місце збіжність розв'язку.

Перше кільце елементів, що прилягає до краю отвору, послідовно подрібнюється в 4, 16 і 256 разів. Отримані сітки позначаються як MESH 1, MESH 2 і MESH 3 відповідно. Отримано, що використання Quad-елементів призводить до повільної збіжності вирішень. Для досягнення необхідної точності, для сіток MESH 0 і MESH 3 застосований підхід вкладення трикутних елементів у чотирикутні шляхом включення діагоналей в елементи, які розташовані уздовж межі отвору. Отримані сітки позначаються як MESH 4 і MESH 5 відповідно.

У табл. 3.1 представлено результати дослідження впливу вибору розміру і типу елемента в зоні концентрації напружень на точність розв'язку. Для кожної з розглянутих модифікацій сітки наводиться значення площі елемента S , використовуюваного на межі отвору і відповідне значення k_t . Остання колонка ε відображає похибку розв'язку, що визначається як процентна відмінність значень ККН у досліджуваній парі оболонок.

Таблиця 3.1

Вплив розміру і типу елемента, який використовується в зоні концентрації напружень на точність розв'язку (ε)

Найменування SE-сітки	β	$r/R = 0,053$		$r/R = 0,08$		$\varepsilon, \%$
		$S \cdot 10e-5, \text{cm}^2$	k_t	$S \cdot 10e-5, \text{cm}^2$	k_t	
MESH 0 (Quad)	0,66	3,492	8,24	6,090	8,32	0,97
MESH 1 (Quad)		0,879	8,44	1,537	8,48	0,47
MESH 2 (Quad)		0,211	8,56	0,376	8,58	0,23
MESH 3 (Quad)		0,013	8,73	0,023	8,71	0,23
MESH 4 (Tria)		1,746	8,74	3,045	8,71	0,34
MESH 5 (Tria)		0,006	8,89	0,011	8,90	0,11

Рис. 3.5 демонструє залежності ККН від S . Отримані результати порівнюються з даними [11]: $\beta = 0,66$; $k_t = 8,92$.

Для кожної з оболонок показана пара кривих, які відображають ітераційний процес локального зменшення розміру Quad і Tria-елементів у зоні концентрації напружень. Для кожного розрахункового випадку вказаний відповідний порядковий номер SE-сітки: MESH 0 ... MESH 5 \rightarrow 0 ... 5.

При використанні первинних сіток (MESH 0) отримана похибка розв'язку в межах 1% (тобто різниця значень ККН в парі становить 1%). Зменшення площі Quad-елементів у геометричній прогресії показало повільну збіжність результатів.

Досягнення заданої точності тільки шляхом подрібнення Quad-елементів недостатньо ефективно, в цьому випадку спостерігається безперервне зростання рівня напружень, причому подрібнення в 16 і 256 разів дає однакову помилку: MESH 1 – $\varepsilon = 0,47\%$, MESH 2, 3 – $\varepsilon = 0,23\%$. У разі $r/R = 0,053$ розподіл елементів в 4 рази призвів до зміни величини ККН, щодо початкової сітки на 2,4%, в 16 і 256 разів – на 3,9% і 5,95% відповідно, а для $r/R = 0,08$ на 1,9%, 3,1% і 4,7% відповідно. Різниця в значеннях ККН на попередній і наступній ітерації означає наявність градієнтів між елементами.

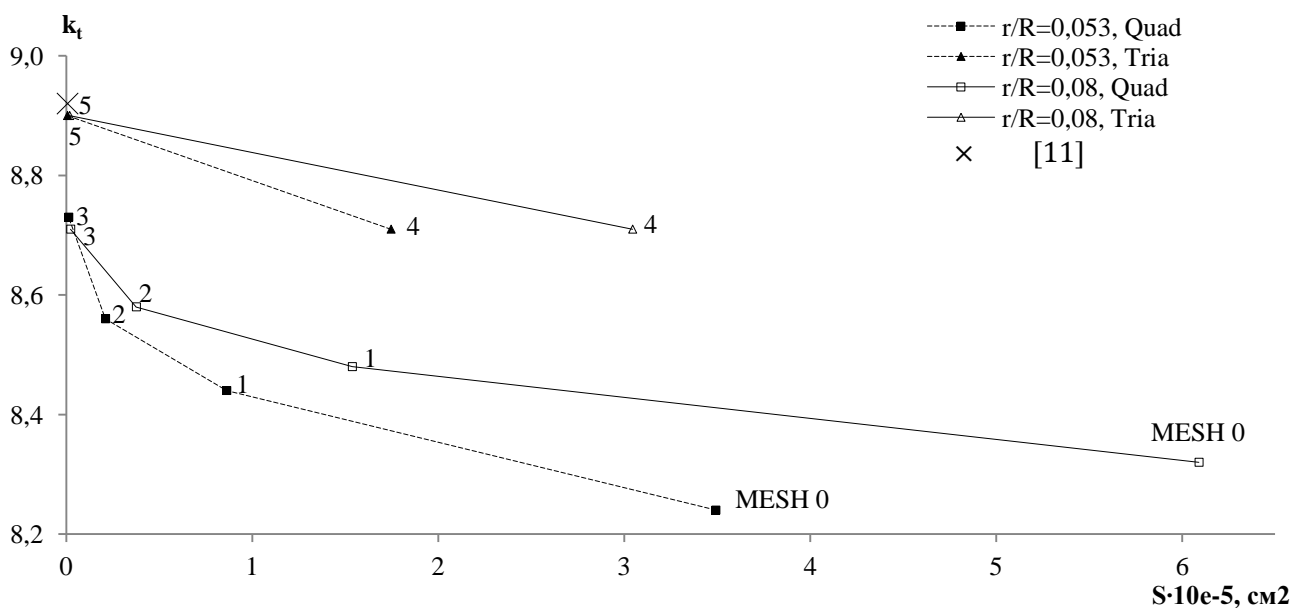


Рисунок 3.5 – Залежність коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від площі елемента S , використовуваного в зоні концентрації напружень

Рис. 3.5 показує, що з точки зору отримання більш швидкої збіжності розв'язку використання трикутних елементів є ефективнішим від чотирикутних. Включення трикутників на межу отвору в первісну сітку (MESH 4) змінило результат, щодо MESH 0: для $r/R = 0,053$ на 5,7%, для $r/R = 0,08$ на 4,5%. Включення трикутників на межу отвору, попередньо подрібнену в 256 разів (MESH 5), справило зміни, щодо MESH 3: для $r/R = 0,053$ на 1,8%, для $r/R = 0,08$ 2,1%.

При включенні Triа-елементів у первісну сітку збіжність краще (MESH 4 – $\varepsilon = 0,34\%$), ніж при простому подрібненні Quad-елементів в 4 і 16 разів (MESH 1, 2 – $\varepsilon = 0,47\%$).

У результаті дослідження, найкраще зближення результатів в парі оболонок отримано при використанні сітки MESH 5 – $\varepsilon = 0,11\%$, для якої різниця MСE з [11] склала 0,3% і 0,2% для $r/R = 0,053$ і 0,08 відповідно. З точки зору точності визначення НДС СE-сітка MESH 5 може вважатися еталонною.

Можна сформулювати наступний алгоритм дій, що дозволяє контролювати точність розв'язку задач про визначення напруженого стану в оболонках скінченних довжин, ослаблених круговим отвором:

- 1 Для досліджуваної оболонки обчислюється параметр β [11].
- 2 Для конкретного значення β знаходяться відповідні аналітичні розв'язки задачі про визначення ККН в оболонках, ослаблених круговим отвором [8, 9, 11 – 15] або експериментальні дані [10].
- 3 Для досліджуваної оболонки проводиться вибір пари іншої оболонки з таким же значенням β , але з іншими розмірами отвору r і товщини h .
- 4 Для кожного з отворів вибирається своя первісна нерегулярна СE-сітка з використанням чотирьохвузлових елементів, за умови досить великої довжини обох оболонок. Необхідно забезпечити таку довжину, для якої стабільно виконується умова незалежності ККН від L/R [1].
- 5 Для кожного з отворів, виконується уточнення первинних СE-сіток: на першому кроці послідовно подрібнюються чотирьохвузлові Quad-елементи уздовж межі отвору, після чого граничний ряд елементів ділиться на трикутники.

Проводиться дослідження збіжності розв'язків в парі оболонок. Необхідною умовою є досягнення збіжності ККН в оболонках між собою. Отримані ККН порівнюються з загальновідомими результатами. Вибирається ефективно працююча SE-сітка (еталонна).

6 Використовуючи еталонну сітку, змоделювати для кожного з отворів ряд більш коротких оболонок, шляхом відсікання регулярних частин сітки на краях, залишаючи незмінною сітку в серединній частині оболонки, що має отвір.

7 Для кожного з отворів побудувати залежності ККН від L/R . Необхідною умовою є отримання горизонтальних ділянок на кривих, що демонструють незалежність ККН від L/R . Різниця ККН, отримана на збіжних горизонтальних частинах двох кривих вважається показником точності отриманого розв'язку. Відсутність горизонтальних ділянок показує, що ККН залежить від L/R для всього діапазону довжини. В цьому випадку необхідно переглянути вибрані комбінації геометричних параметрів r/R і R/h і знайти випадок, який відповідає постановці [1], після чого повернутися в початок алгоритму.

Еталонні SE-сітки можуть бути використані для аналізу напруженого стану при переході до іншої довжини, шляхом відсікання або додавання регулярних частин сітки на краях, і до іншої товщини, коли сітка не вимагає змін. Можна вважати, що точність розв'язку витримана в умовах досить великих довжин збережеться при переході до більш коротких оболонок та інших товщин.

3.4 Вплив зміни довжини оболонки і крайових ефектів на напружений стан

Проведено дослідження рівня концентрації напружень в оболонках різних довжин, ослаблених круговим отвором у широкому діапазоні його розміру, при дії крутного моменту. У розділі наведено результати дослідження оболонок з різними комбінаціями параметрів товщини R/h від 91 до 1500, отворів r/R від 0,053 до 0,8 з відповідними значеннями β від 0,66 до 24,89, та довжинами L/R від 0,2 до 20,7.

Побудовано залежності k_t від L/R при різних значеннях β (рис. 3.6 – 3.8), отримані щодо повних напружень, тобто суми мембранних і згинальних складових. Порівнюючи рис. 3.6, 3.7 і 3.8 отримано, що характер кривих різний. У правій частині або криві виходять на горизонтальні ділянки (рис. 3.6), або цих горизонтальних ділянок зовсім немає (рис. 3.7, 3.8).

Отримано, що для невеликих отворів криві залежностей k_t від L/R можуть бути поділені на дві ділянки (рис. 3.6). Координата точок розділу кривих називається L^*/R і позначено на кривих як «*». Вважається, що координаті L^*/R відповідає значення довжини, при вкороченні якої k_t зменшується більше, ніж на 1% у порівнянні з оболонкою найбільшої довжини $L/R = 20,7$. Ліві частини кривих (діапазон L/R від 0 до L^*/R) ілюструють зменшення коефіцієнта концентрації напружень зі скороченням оболонки, яке може бути багаторазовим по відношенню до $k_t(L/R = 20,7)$. Одержано, що для лівих ділянок кривих, k_t визначається не одним, а двома параметрами: β і r/R . Праві ділянки кривих ($L/R > L^*/R$) демонструють практичну незалежність k_t від довжини оболонки. Таким чином, для правих ділянок справедливим стає припущення про згасання збурюючих напружень внесених отвором на краях оболонки. Такі результати підтверджують адекватність моделі [1] за умови $L/R > L^*/R$.

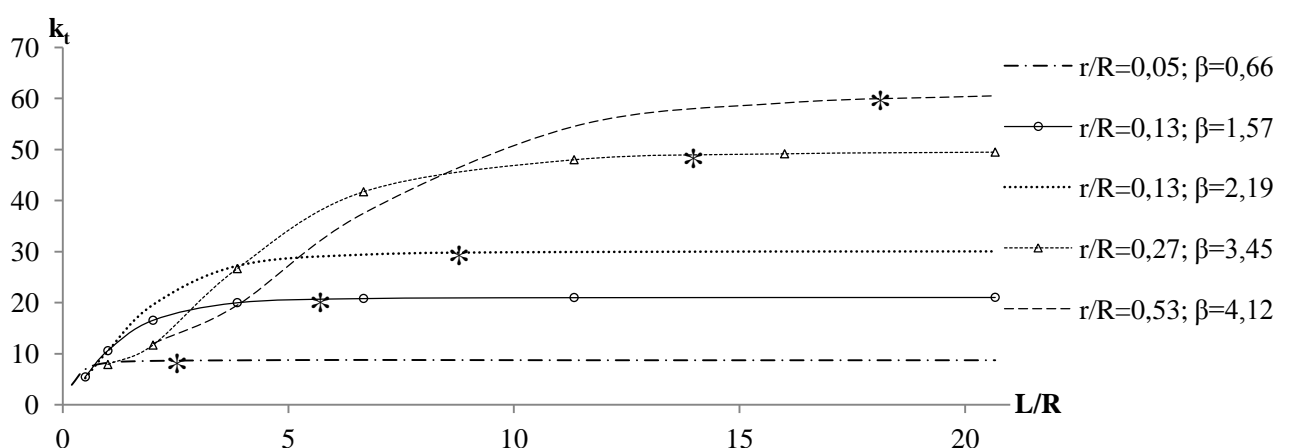


Рисунок 3.6 – Залежності коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від параметра довжини оболонки (L/R) при фіксованому $\beta = [0,66; 4,89]$

При подальшому збільшенні значень $\beta \approx 4$ та $r/R=0,53$, отримані залежності представлені на рис. 3.7 – 3.8, які демонструють непридатність моделі [1] для цих випадків. Ці залежності показують, що для великих отворів горизонтальних частин немає і k_t істотно зростає на всьому розглянутому діапазоні довжин. Ймовірно, що труднощі, з якими стикалися дослідники при визначенні ККН в оболонці з великими отворами зв'язані саме з цим фактом.

Аналіз отриманих результатів показав, що визначення області застосування лінійної моделі А.І. Лур'є тільки по β недостатньо, необхідно розглядати комплекс з двох параметрів: параметра кривизни R/h і параметра отвору r/R .

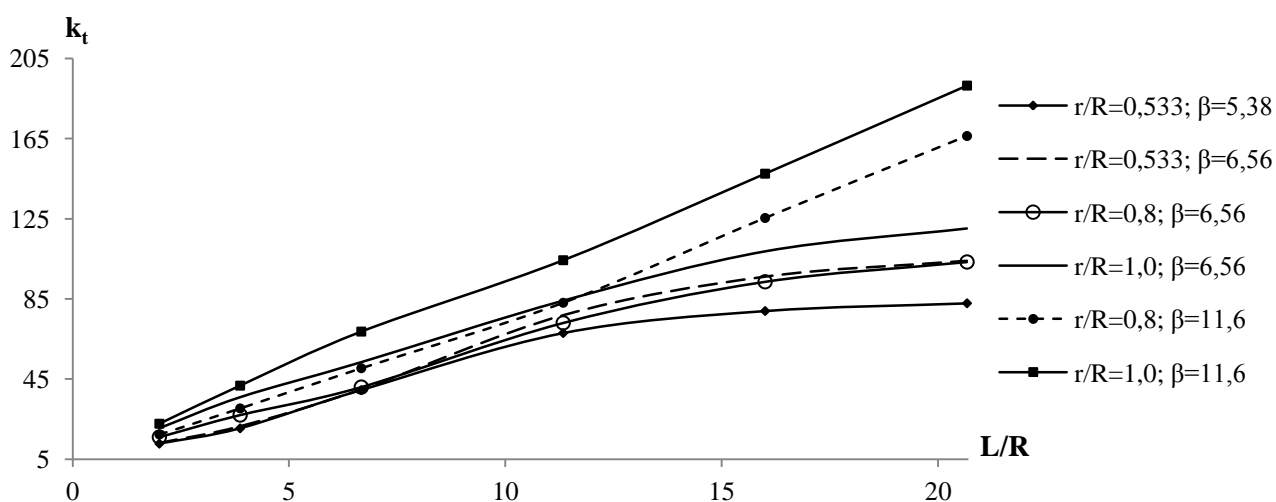


Рисунок 3.7 – Залежності коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від параметра довжини оболонки (L/R) при фіксованому $\beta = [5,38; 11,6]$

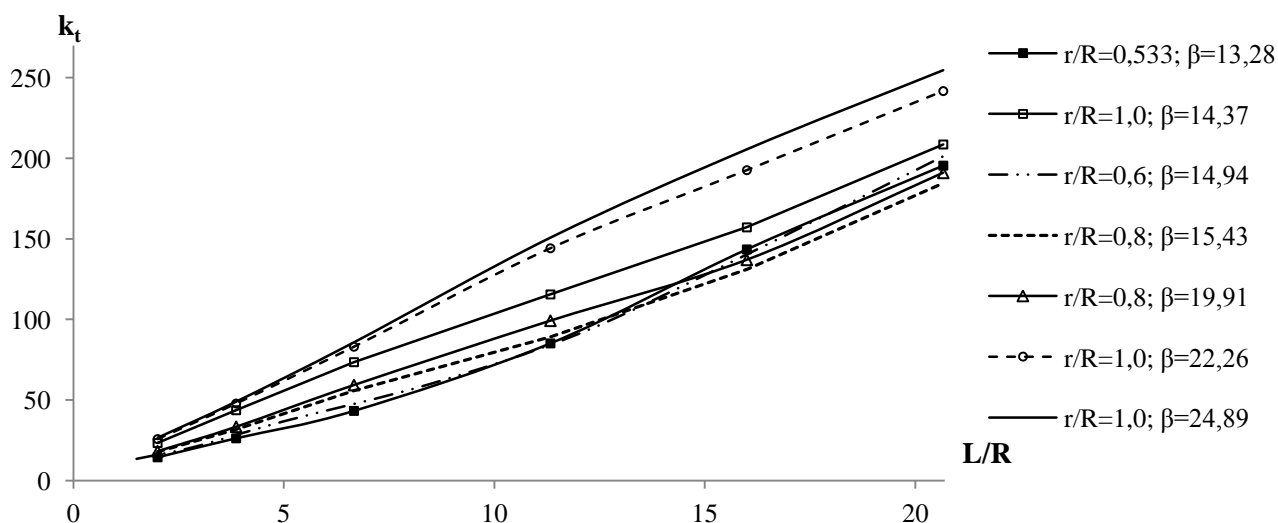


Рисунок 3.8 – Залежності коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від параметра довжини оболонки (L/R) при фіксованому $\beta = [13,28; 24,89]$

Можна зробити висновок, що область застосовності моделі А.І. Лур'є [1] обмежена. Вона може бути придатною для оболонок великих довжин з малими отворами, при цьому оболонка повинна бути довше деякої, визначеної розрахунками довжини (L^*/R).

Представлені залежності ККН від довжини оболонок при фіксованому значенні параметра β несуть довідковий характер і можуть бути використані на практиці для знаходження значення коефіцієнта концентрації напружень при заданих геометричних розмірах оболонки та отвору і для оцінки впливу зміни окремих геометричних розмірів на величину ККН. Дані наведені в більшому обсязі в табличному вигляді в додатку Б.

3.5 Чисельний аналіз напруженого стану оболонок скінченної довжини

Проведено аналіз напруженого стану по всій поверхні оболонки, зокрема даних про концентрацію напружень і в поперечних перерізах оболонки між отвором та торцем (перерізи 1, 2, 3) (Рис. 3.1). Досліджується ступінь неоднорідності загального поля напружень із віддаленням від отвору до торця, яка характеризується їх перепадом (λ). Перепад – показник згасання збуреного поля напружень, внесеного отвором, під яким розуміється різниця їх максимального та мінімального відхилення від референсних значень.

Дослідження виконано для оболонки з $\beta = 1,78$, якому відповідає параметр кривизни $R/h = 1200$ і розмір отвору $r/R = 0,08$. Хоча отвір по відношенню до радіуса досліджуваних оболонок малий, відповідно до класифікації, запропонованої в [13], для $\beta = 1,78$ отвір можна вважати середнім ($\beta > 1$).

На рис. 3.9 представлено результати чисельних розрахунків рівня концентрації напружень для оболонок з L/R від 0,5 до 20,7. Для максимальної довжини $L/R = 20,7$ значення $k_t = 24,04$ порівнювалося з результатами, отриманими D. Withum в [8]: $k_t = 23,9$, відміну становить 0,45%.

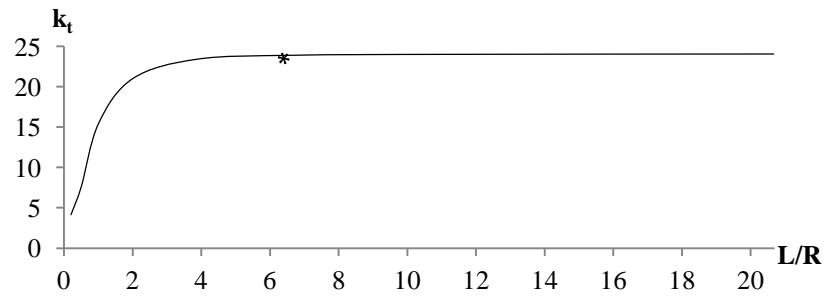


Рисунок 3.9 – Залежність коефіцієнта концентрації напружень від L/R ,
 $\beta = 1,78$. Лінійний МСЕ-розв'язок

Крива на рис. 3.9 складається з двох частин, ліва з яких ілюструє зменшення k_t при зменшенні L/R , а права показує практичну незалежність ККН від довжини оболонки. На кривій символом «*» відзначено значення параметра $L^*/R = 6,2$, який розділяє криву залежності $k_t(L/R)$ на дві зазначені ділянки. Якщо скористатися параметром L^*/r , то для оболонок, розрахунки для яких представлені тут, довжина L^* становитиме $40,7r$. Цей результат вказує на необхідність обережного ставлення до використання припущення про швидке згасання збурюючої частини загального поля напружень, спричиненої появою на оболонці навіть малого отвору.

Аналіз полів напружень, що виникають в оболонці, показав, що область концентрації напружень завжди визначається окружними напруженнями біля кромки отвору на внутрішній поверхні оболонки. На рис. 3.10 показані розподіли кільцевих напружень σ_θ по контуру отвору, віднесених до референсних дотичних напружень τ_0 . Зменшення довжини оболонки впливає на характер розподілу напружень. Для оболонок з $L/R = 2$ і $3,9$ скінченні елементи з максимальними напруженнями σ_θ розташовані під кутами $\theta = \pm 58^\circ$ і $\pm 124^\circ$, а для $L/R = 0,5$ під кутами $\theta = \pm 60^\circ$ і $\pm 120^\circ$. При зменшенні параметра з $L/R = 3,9$ до $L/R = 2$, ККН знижується на 15%, і при зменшенні з $L/R = 2$ до $L/R = 0,5$ знижується ще в 2,7 разу.

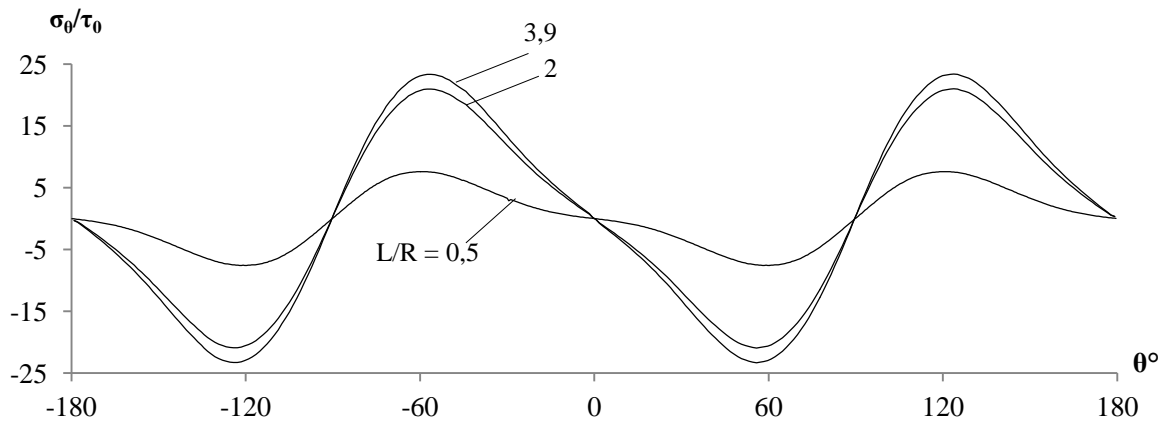
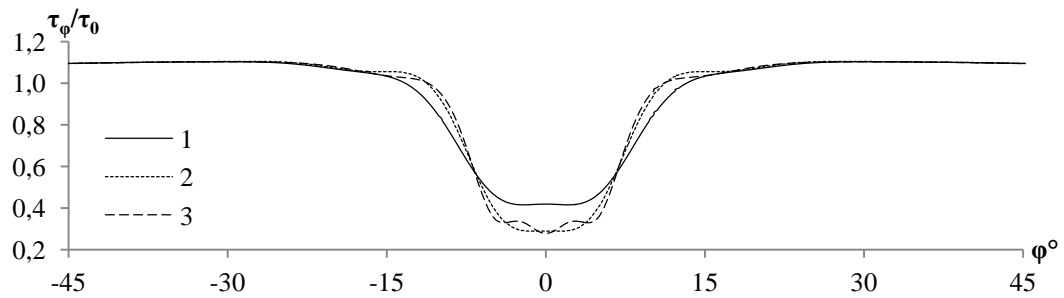
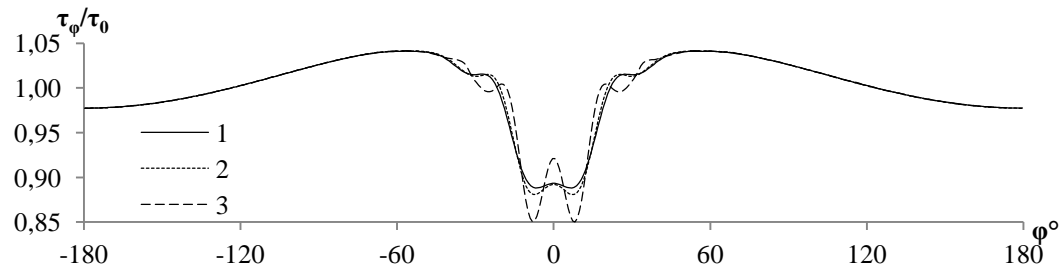


Рисунок 3.10 – Відносні нормальні кільцеві напруження на кромці отвору на внутрішній поверхні оболонки, $\beta = 1,78$. Лінійний МСЕ-розв'язок

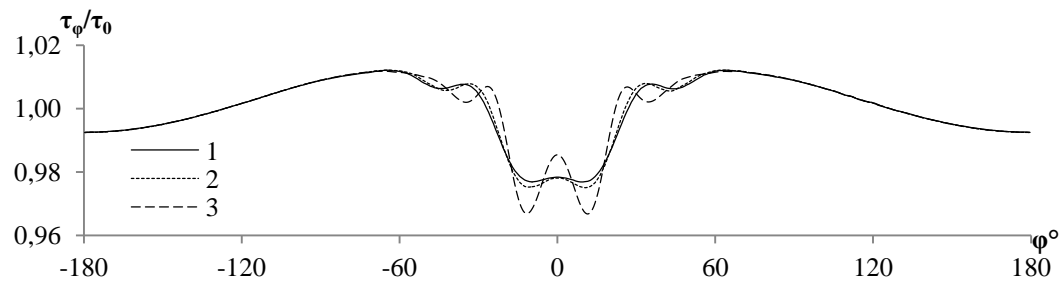
На рис. 3.11 наведені відносні дотичні напруження τ_ϕ/τ_0 в перерізах 1 – 3 між отвором і торцем для оболонок з $L/R = 0,5$; 2 і 3,9. Перерізи надалі позначено на рисунках як «1, 2, 3». Незалежно від довжини оболонки існує локальна область падіння рівня дотичних напружень, що включає в себе околицю отвору і розповсюджується до країв оболонки. Зі зменшенням довжини оболонки розмір цієї області по окружній координаті зменшується, а відміна від референсних напружень зростає. При $L/R = 0,5$ ця область займає ділянку на кривій по окружності $\theta = [-15^\circ; +15^\circ]$, а амплітуда зміни в ній τ_ϕ для перерізу 1 становить $0,6\tau_0$ (рис. 3.11 а). Для $L/R = 2$ і 3,9 картини розподілу напружень зсуву подібні, але сектор збурення розширюється (рис. 3.11 б, в). Між амплітудними значеннями τ_ϕ сектор збільшується до $120^\circ - 130^\circ$. Перепад напружень (λ) зменшується та зі збільшенням довжини оболонки прагне до нуля. У міру віддалення від отвору змінність τ_ϕ зменшується, проте до референсних значень дотичні напруження не прагнуть, це означає що припущення про згасання напруженого стану [1], викликаного отвором, для оболонок з довжинами $L/R < L^*/R$ стає невірним.



а



б



в

а – $L/R = 0,5$; б – $L/R = 2$; в – $L/R = 3,9$

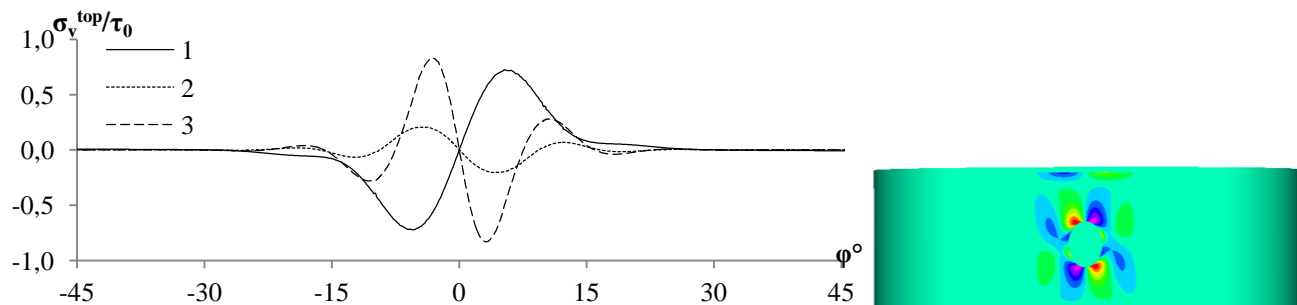
Рисунок 3.11 – Відносні дотичні напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$. Лінійний МСЕ-розв'язок

Хоча окружні і осьові нормальні напруження при крученні суцільної оболонки дорівнюють нулю, а при наявності отвору відносно малі, інтерес представляють як їх змінність в окружному напрямку, так і по мірі віддалення від отвору до торця. На рис. 3.12 – 3.14 наведені залежності окружних напружень σ_v^{top} і σ_v^{bot} на зовнішній і внутрішній поверхнях у перерізах 1 – 3 і картини полів напружень. Для $L/R = 0,5$ на рисунках наведено картини полів напружень для всієї оболонки, для $L/R = 2$ і $L/R = 3,9$ між перерізами 1 і 3.

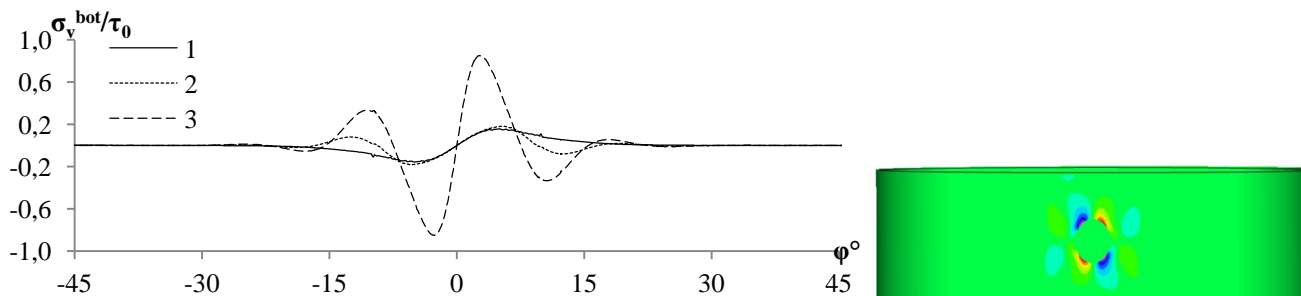
Зі зменшенням довжини оболонки зменшується область збурень в окружному напрямку. Для $L/R = 3,9$ збурення поширюються по окружній координаті φ в інтервалі $[-60^\circ; +60^\circ]$, для $L/R = 2$ – $[-45^\circ; +45^\circ]$, для $L/R = 0,5$ – $[-15^\circ; +15^\circ]$.

При порівнянні напружень в перерізах 1 – 3 зменшення амплітудних значень напружень відзначається при переході між перерізами 3 і 2, проте між перерізами 2 і 1 екстремальні значення дещо підвищуються, залишаючись практично однаковими на зовнішній і внутрішній поверхнях, причому на зовнішній поверхні для оболонки з $L/R = 0,5$ (рис. 3.12 а) ці значення в зоні краю (переріз 1) значно зростають, наближаючись до амплітудного рівня напружень в перерізі 3.

Залежності показують зменшення нерівномірності розподілу окружних при збільшенні довжини оболонки. Для $L/R = 0,5$ на краю зовнішньої поверхні оболонки виникають зони підвищення напружень, де амплітуда рівень дорівнює $0,8\tau_0$. При $L/R = 2$ і $3,9$ ці рівні становлять $0,24\tau_0$ і $0,09\tau_0$ відповідно.



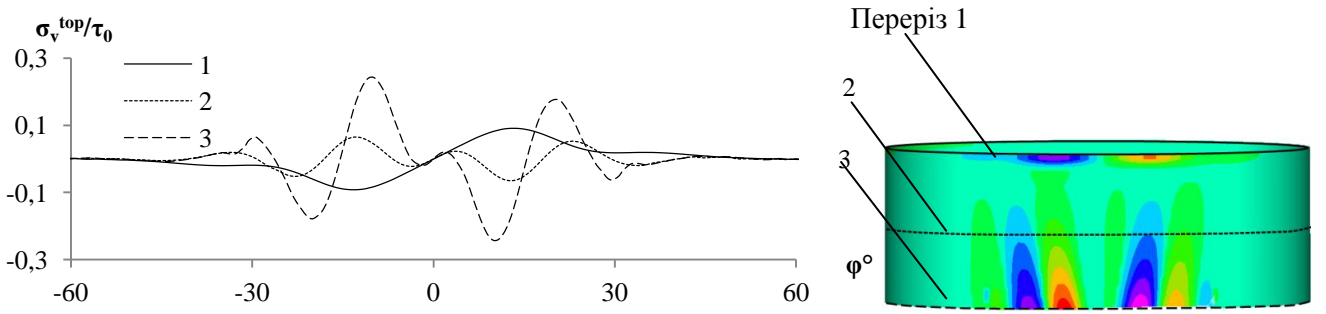
а



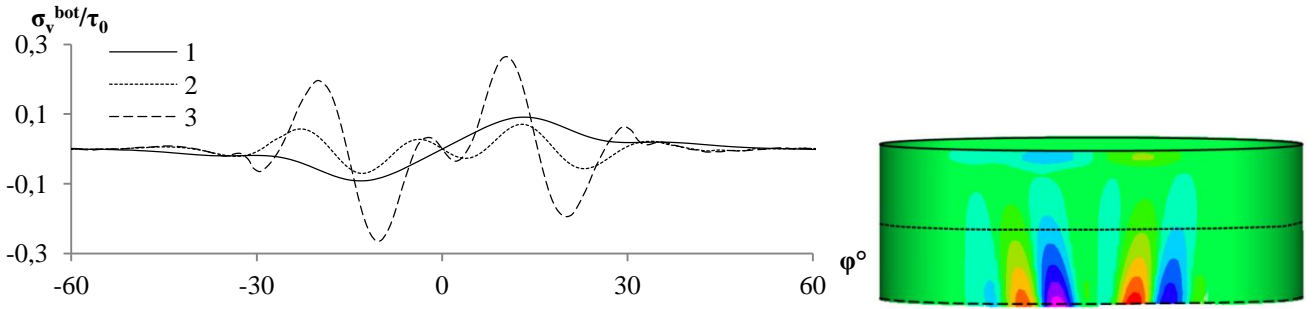
б

а – зовнішня поверхня; б – внутрішня поверхня

Рисунок 3.12 – Відносні нормальні окружні напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$, $L/R = 0,5$. Лінійний МСЕ-розв'язок



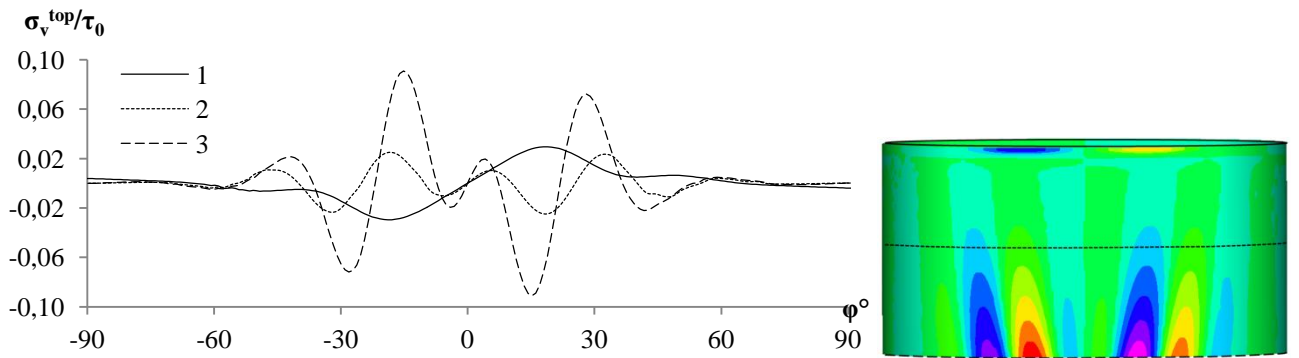
а



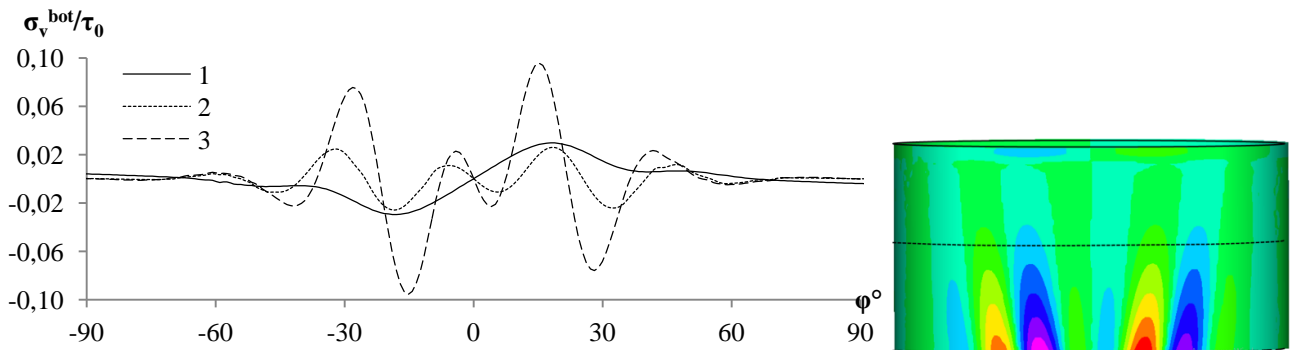
б

а – зовнішня поверхня; б – внутрішня поверхня

Рисунок 3.13 – Відносні нормальні окружні напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$, $L/R = 2$. Лінійний МСЕ-розв’язок



а



б

а – зовнішня поверхня; б – внутрішня поверхня

Рисунок 3.14 – Відносні нормальні окружні напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$, $L/R = 3,9$. Лінійний МСЕ-розв’язок

На рис. 3.15 – 3.17 приведені залежності нормальних осьових напружень σ_u^{top} і σ_u^{bot} на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки по окружній координаті φ . Аналогічно до розподілу нормальних окружних напружень, зі зменшенням параметра L/R зменшується область збурень в напрямку окружності оболонки і для розглянутих оболонок при $L/R = 3,9; 2$ і $0,5$ становить $30^\circ; 45^\circ$ і 67° відповідно. Зі зменшенням довжини оболонки рівень максимальних напружень біля краю значно підвищується. При переході від $L/R = 3,9$ до $L/R = 2$ максимуми σ_u^{top} і σ_u^{bot} зросли в 3 рази, зі зменшенням $L/R = 2$ до $L/R = 0,5$ величина σ_u^{bot} – в 5 разів, величина σ_u^{top} збільшилася тільки на 10%. Максимальний рівень осьових напружень на внутрішній поверхні оболонки для $L/R = 3,9; 2$ і $0,5$ дорівнює $0,16\tau_0; 0,5\tau_0; 2,4\tau_0$ відповідно.

Порівняння осьових напружень з окружними показало, що амплітудні значення σ_u^{top} і σ_u^{bot} у всіх випадках вище σ_v^{top} і σ_v^{bot} в 3 – 5 разів.

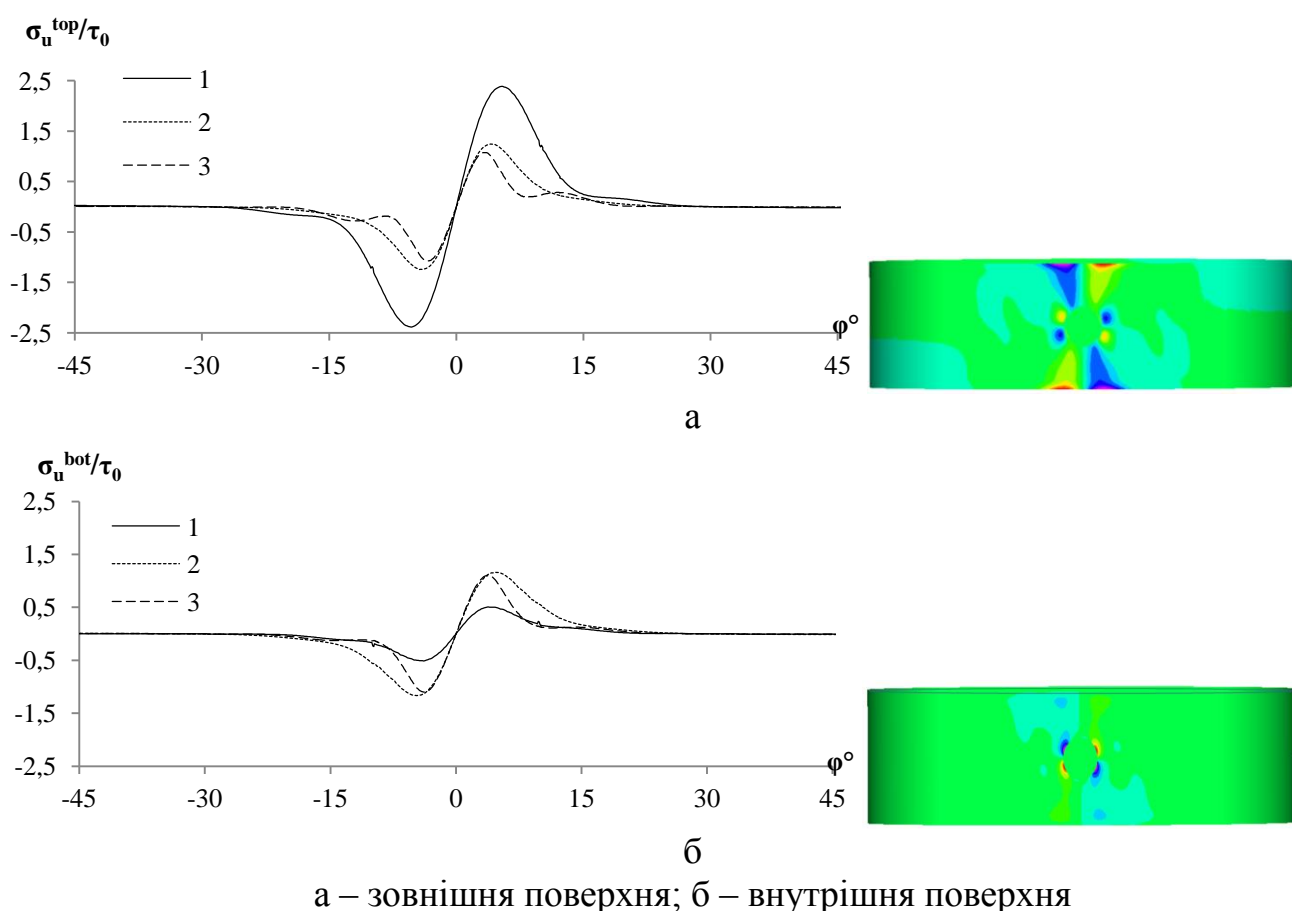
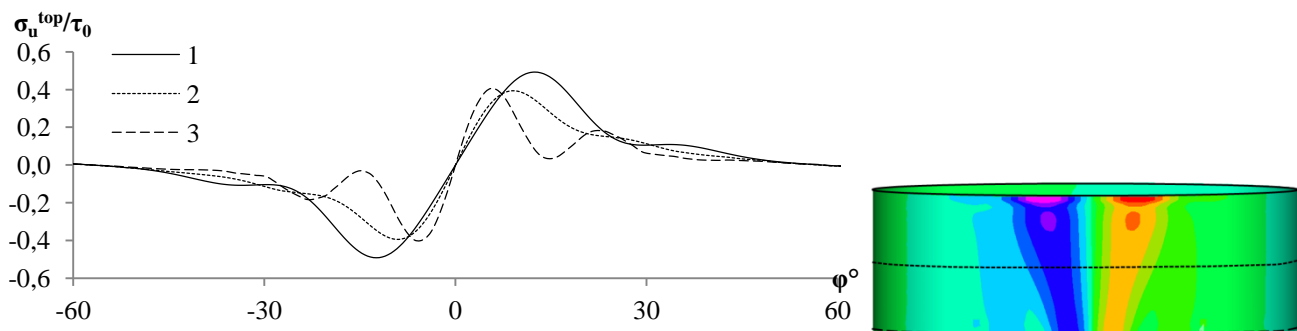
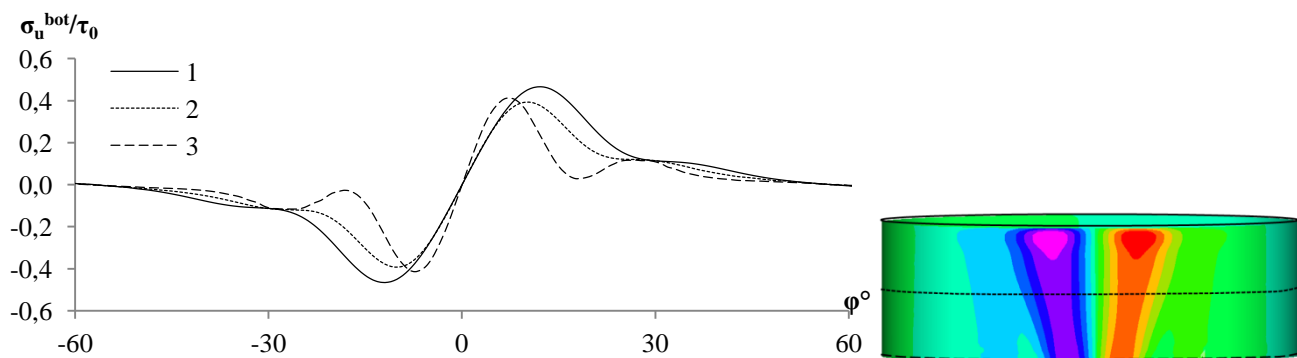


Рисунок 3.15 – Відносні нормальні осьові напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78, L/R = 0,5$. Лінійний МСЕ-розв'язок



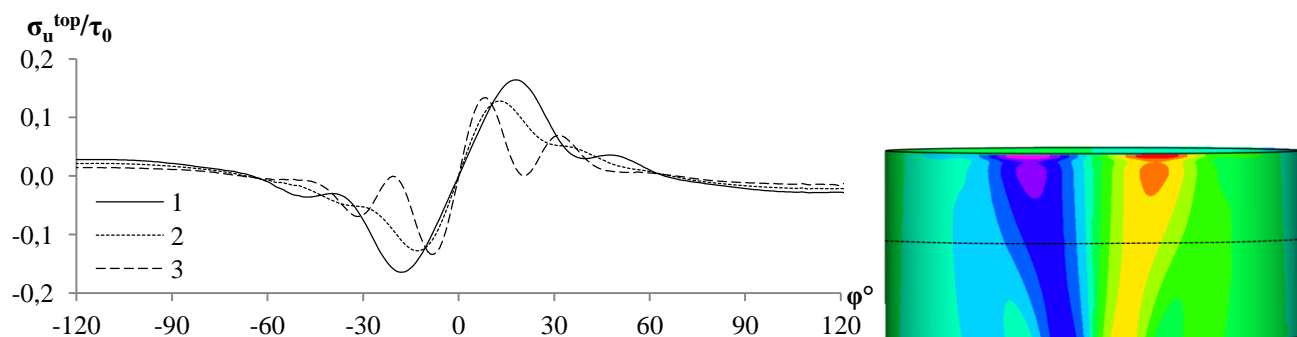
а



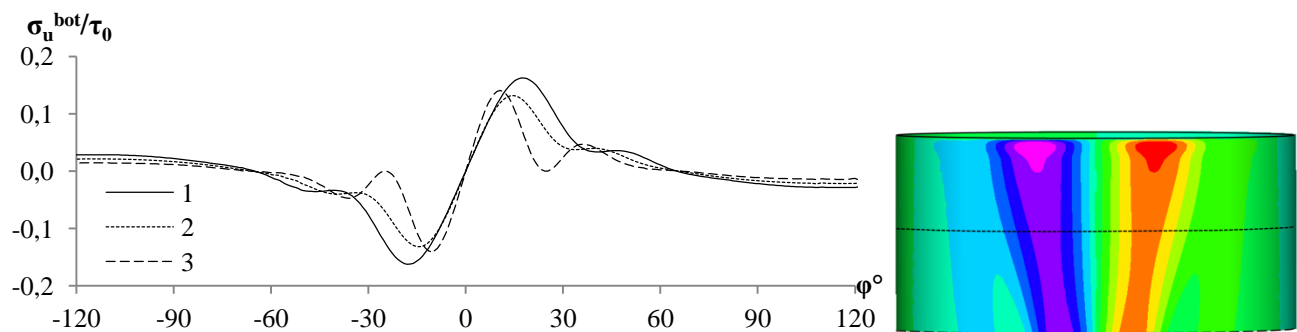
б

а – зовнішня поверхня; б – внутрішня поверхня

Рисунок 3.16 – Відносні нормальні осьові напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$, $L/R = 2$. Лінійний МСЕ-розв'язок



а



б

а – зовнішня поверхня; б – внутрішня поверхня

Рисунок 3.17 – Відносні нормальні осьові напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$, $L/R = 3,9$. Лінійний МСЕ-розв'язок

На рис. 3.18 – 3.20 представлені напруження σ_1 , що діють на головних площадках у перерізах 1 – 3 оболонок. Залежності для другого головного напруження σ_2 кососиметричні по відношенню до σ_1 і тут не наводяться. Як і для розглянутих вище напружень, сектор оболонки, де позначається збурюючий вплив отвору, розширюється зі збільшенням L/R . Амплітудні значення збурюючих напружень і їх перепад зі збільшенням L/R значно зменшуються. Для всіх довжин оболонки відзначається збільшення головних мембранних напружень на амплітудних ділянках у міру наближення перерізів до торця. Необхідно також підкреслити, що згасання збурюючої частини головних напружень не приводить, як і для інших видів напружень, до їх повного зникнення.

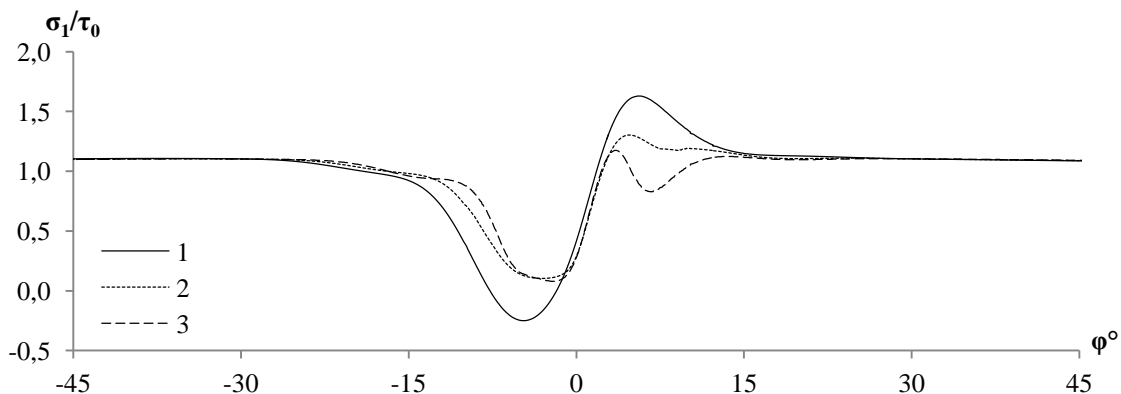


Рисунок 3.18 – Відносні головні мембранні напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$, $L/R = 0,5$. Лінійний МСЕ-розв'язок

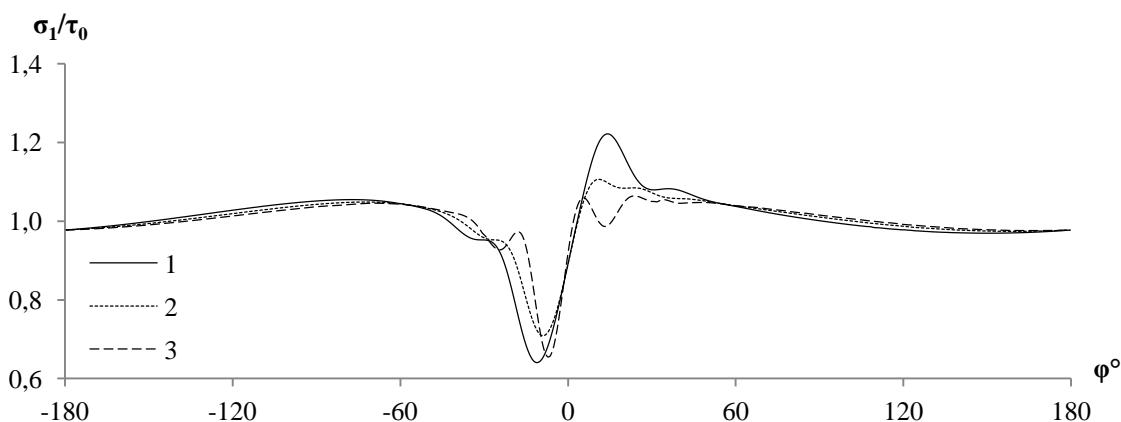


Рисунок 3.19 – Відносні головні мембранні напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$, $L/R = 2$. Лінійний МСЕ-розв'язок

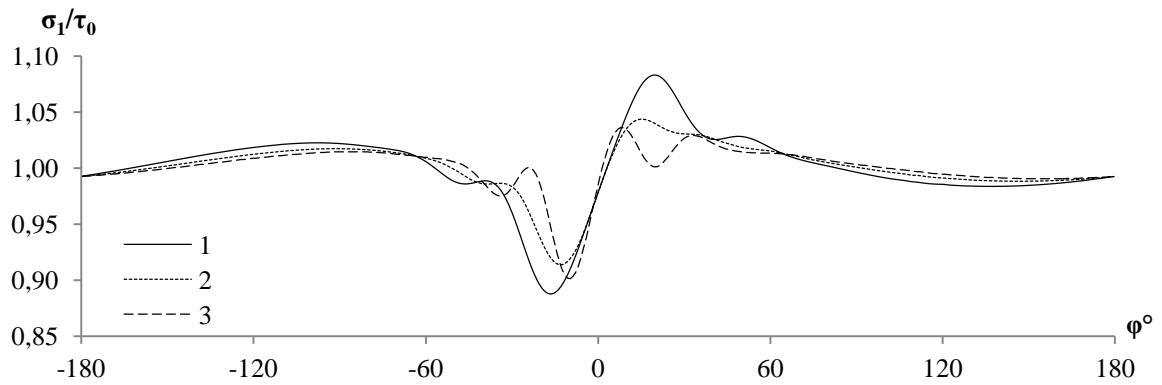


Рисунок 3.20 – Відносні головні мембранні напруження в поперечних перерізах 1 – 3 оболонки з $\beta = 1,78$, $L/R = 3,9$. Лінійний МСЕ-розв’язок

3.6 Висновки до розділу

На основі лінійного МСЕ-аналізу розроблені ефективні сіткові моделі для вирішення задач визначення швидкозмінних напружено-деформованих станів у циліндричних оболонках з отвором, ґрунтовані на застосуванні адаптивних сіток у сукупності зі спеціально сформульованими методами контролю точності.

Розроблено процедуру підвищення якості СЕ-сіток. Досягти збіжності рішення вдається шляхом комбінування двох дій. На першому кроці визначається щільність чотирикутної сітки на межі отвору, на другому використовується прийом заміни чотирикутних елементів розташованих вздовж межі отвору на трикутні. Дослідження показало, що використання лінійних трикутних елементів у зонах концентрації напружень може давати результат точніше, на відміну від чотирикутних.

Проведено порівняння отриманих чисельних результатів із класичними загальновідомими розв’язками. Порівняльний аналіз результатів продемонстрував близькі результати, що підтверджує правильність отриманих МСЕ-вирішень.

Виконано дослідження меж області застосовності широковживаної моделі А. І. Лур’є в задачі про визначення напруженого стану оболонок скінченних довжин, ослаблених отвором у широкому діапазоні розмірів. Показано, що вона може бути придатною до оболонок великої довжини і для малого розміру отвору і

непридатна для коротких оболонок і для оболонок, ослаблених великим отвором. При використанні такого підходу до оболонок скінченних довжин отриманий рівень концентрації напружень може бути завищений. Причому, для оболонок з довжинами меншими, ніж певна довжина (L^*/R) завищення може бути багаторазовим. Показано, що припущення моделі про швидке згасання збуреної частини поля напруженого стану, викликаного отвором, із віддаленням від отвору не завжди узгоджується з оболонками скінченних довжин ($L/R < L^*/R$).

За допомогою лінійного МСЕ-розв'язку досліджено вплив зміни довжини оболонки і розміру отвору на напружений стан, зокрема на рівень концентрації напружень. Вперше показано, що існує деяка довжина, зі зменшенням якої починає позначатися підтримуючий вплив краю оболонки, який виражається в зниженні коефіцієнта концентрації напружень. Проаналізовано причини цього зниження для полів дотичних, нормальних і головних напружень.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ ДО РОЗДІЛУ 3

1 Лурье А. И. Концентрация напряжений в области кругового отверстия на поверхности кругового цилиндра / А. И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1946. – Т. 10, № 3, – С. 307 – 406.

2 Колодяжный А. П. Напряженное состояние цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием при кручении / А. П. Колодяжный, М. А. Медникова // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. : Механіка. – 2015. – Вип. 19. – Т. 2. – С. 64 – 76.

3 Колодяжный А. П. Напряжения в тонкой цилиндрической оболочке с круговым отверстием при кручении / А. П. Колодяжный, М. А. Медникова // Вісник Дніпровського університету. Сер. : Механіка неоднорідних структур. – 2017. – Вип. 2(21) – С. 55 – 68.

4 Медникова М. А. Контроль точности решения при определении напряженного состояния в ослабленных отверстием цилиндрических оболочках / М. А. Медникова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкції – Вип. 29. – 2019. – С. 175 – 187.

5 Колодяжный А. П. КЭ-моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с отверстием / А. П. Колодяжный, М. А. Медникова // Человек и космос : Тез. докл. XIX междунар. науч.-практ. конф., 12 – 14 апреля, 2017 г. – Днепр, 2017 – С. 174.

6 Колодяжный А. П. Про межі застосовності моделі А. І. Лур'є в задачах напружено-деформованого стану оболонок з круговим отвором / А. П. Колодяжный, М. А. Меднікова // Сучасні проблеми механіки та математики: Зб. наук. праць міжнар. наук.-техн. конф, 22 – 25 травня 2018 р. – Львів, 2018. – С. 103 – 104.

7 Медникова М. А. Напряженное состояние в цилиндрических оболочках конечной длины с отверстием / М. А. Медникова, А. П. Колодяжный, В. Н. Сиренко // Космические технологии: настоящее и будущее : Тез. докл. 7-й междунар. конф., 21 – 24 мая 2019 г. – Днепр, 2019. – С. 38.

- 8 Withum D. The cylindrical shell with a circular hole under torsion / D. Withum // *Ingenieur–Archiv.* – Heft 26. – 1958. – P. 435 – 446.
- 9 Lekkerkerker J. G. On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole / J. G. Lekkerkerker // Ph. D. Dissertation, Technological University, Delft, The Netherlands, 1965. – 78 p.
- 10 Александров А.Я. Исследование упругопластического деформирования оболочек с вырезами и усилениями методом фотоупругих покрытий / А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, А. С. Ракин // *Прикладная механика*, 1966, 2, № 3, с. 1 – 9.
- 11 Van Dyke P. Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell / P. Van Dyke // *AIAA Journ.* – 1965. – Vol. 3. – No 9. – P. 1733 – 1742.
- 12 Шевляков Ю. А. Кручения полого цилиндра з отвором на боковій поверхні / Ю. А. Шевляков, Ф. С. Зігель // *ДАН УРСР, Сер. А.* – 1954. – No 1. – С. 41 – 44.
- 13 Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. / Г. Н. Савин – Киев, 1968. – 888 с.
- 14 Pilkey Waiter D. Peterson’s stress concentration factors / Walter D. Pilkey, Deborah F. Pilkey. – John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey– 3rd ed., – 2008. – 522 p.
- 15 Гузь А. Н. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов и др. – Киев, 1980. – 636 с.
- 16 Kamalarajah R. Stress Analysis of Uniform Circular Cylindrical Shells with Large Circular Holes / R. Kamalarajah, W. Stoffberg, J. W. Bull, M. Chizari // *Proceedings of the World Congress on Engineering 2015 Vol II WCE 2015, July 1 – 3, 2015, London, U.K.*
- 17 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 542 с.
- 18 Troyani N. Effect of finite element mesh orientation on solution accuracy for torsional problems. / N. Troyani, A Pérez, P. Baíz. // *Finite Elements in Analysis and Design.* – 2005. – 41. – P. 1377 – 1383.

19 Sadowski A. J., Rotter M. J. On the relationship between mesh and stress field orientations in linear stability analyses of thin plates and shells. *Finite Elements In Analysis And Design*, 73, 2013, pp.42 – 54, ISSN : 0168 – 874X.

20 Zienkiewicz O. C. Adaptivity and mesh generation / O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu // *Int. journal for numerical methods in engineering*. Vol. 32, pp. 783 – 810, 1991.

21 D'Azevedo E. F. Are bilinear quadrilaterals better than linear triangles? / E. F. D'Azevedo // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2000, – 22(1), P. 198 – 217.

22 Гудрамович В. С. Линейные и билинейные аппроксимации в проекционно-итерационном варианте метода конечных элементов для плоской задачи теории упругости / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, О. М. Рубинчик // *Техн. механика*. – 2009. – № 2. – с. 95 – 104.

23 Adam J.Sadowski. On the relationship between mesh and stress field orientations in linear stability analyses of thin plates and shells. / Adam J. Sadowski, J. Michael Rotter. // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2013. – 73C, P. 42 – 54.

РОЗДІЛ 4

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ В ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІЙ ПОСТАНОВЦІ

У розділі представлено результати дослідження НДС і ККН за допомогою геометрично нелінійного МСЕ-аналізу, яке виконано з метою:

- визначення впливу величини навантаження на напружено-деформований стан і коефіцієнт концентрації напружень;
- визначення впливу зміни довжини оболонки і розміру отвору на напружено-деформований стан та коефіцієнт концентрації напружень;
- дослідження характеру розвитку полів напружень і переміщень у процесі навантаження;
- порівняння розв'язків, отриманих у лінійній постановці та з урахуванням геометричної нелінійності між собою для визначення умов застосовності лінійного МСЕ-аналізу.

Основні результати, викладені в розділі, відображено в роботах в [1 – 7].

4.1 Аналіз напруженого стану в процесі навантаження

На відміну від лінійної постановки, врахування геометрично нелінійного деформування дає можливість дослідження полів напружень, що істотно змінюються зі зростанням навантаження. Зміни стосуються не тільки величин максимальних напружень, а й міграції зон цих напружень.

У розділі представлені результати аналізу неоднорідності напруженого стану оболонки із віддаленням від отвору до торця в процесі навантаження на основі геометрично нелінійного МСЕ-аналізу для пари оболонок з різними значеннями параметра $\beta = 0,66$ і $1,78$, яким відповідають параметри кривизни $R/h = 163$ і $R/h = 1200$, з однаковим розміром отвору $r/R = 0,08$. За величиною параметра β ,

для $\beta = 1,78$ отвір відноситься до середнього ($\beta > 1$), для $\beta = 0,66$ до малого ($\beta < 1$). Таким чином, для оболонки з $\beta = 0,66$ справедливе застосування підходу [8].

На основі геометрично нелінійного аналізу обчислюються граничні значення крутного моменту $M_{гр}$, для кожної оболонки із заданими параметрами довжин і отворів. Таким чином, визначаються діапазони навантаження для кожної оболонки. У відносних величинах $M_k/M_{гр}$ на рисунках для усіх варіантів розрахунку діапазон буде однаковий: $[0 \div 1]$.

Для опису напруженого стану представлені результати дослідження оболонок трьох довжин $L/R = 0,5; 2$ і $3,9$. Дані наведено при трьох рівнях навантаження: на початковому етапі $M_k/M_{гр} = 0,01$, в середині діапазону $M_k/M_{гр} = 0,5$ і в передграничному стані $M_k/M_{гр} = 0,98$.

Отримано, що результати, що відповідають початковому рівню навантаження, збігаються з розв'язком задачі в лінійному наближенні, і відображені на рисунках суцільною лінією. Діапазон зазначеного рівня навантаження суттєво залежить від комбінації розмірів отвору та довжини оболонки.

На рис. 4.1 показано розподіл кільцевих напружень σ_θ по контуру отвору на внутрішній поверхні оболонки, віднесених до референсних дотичних напружень τ_0 .

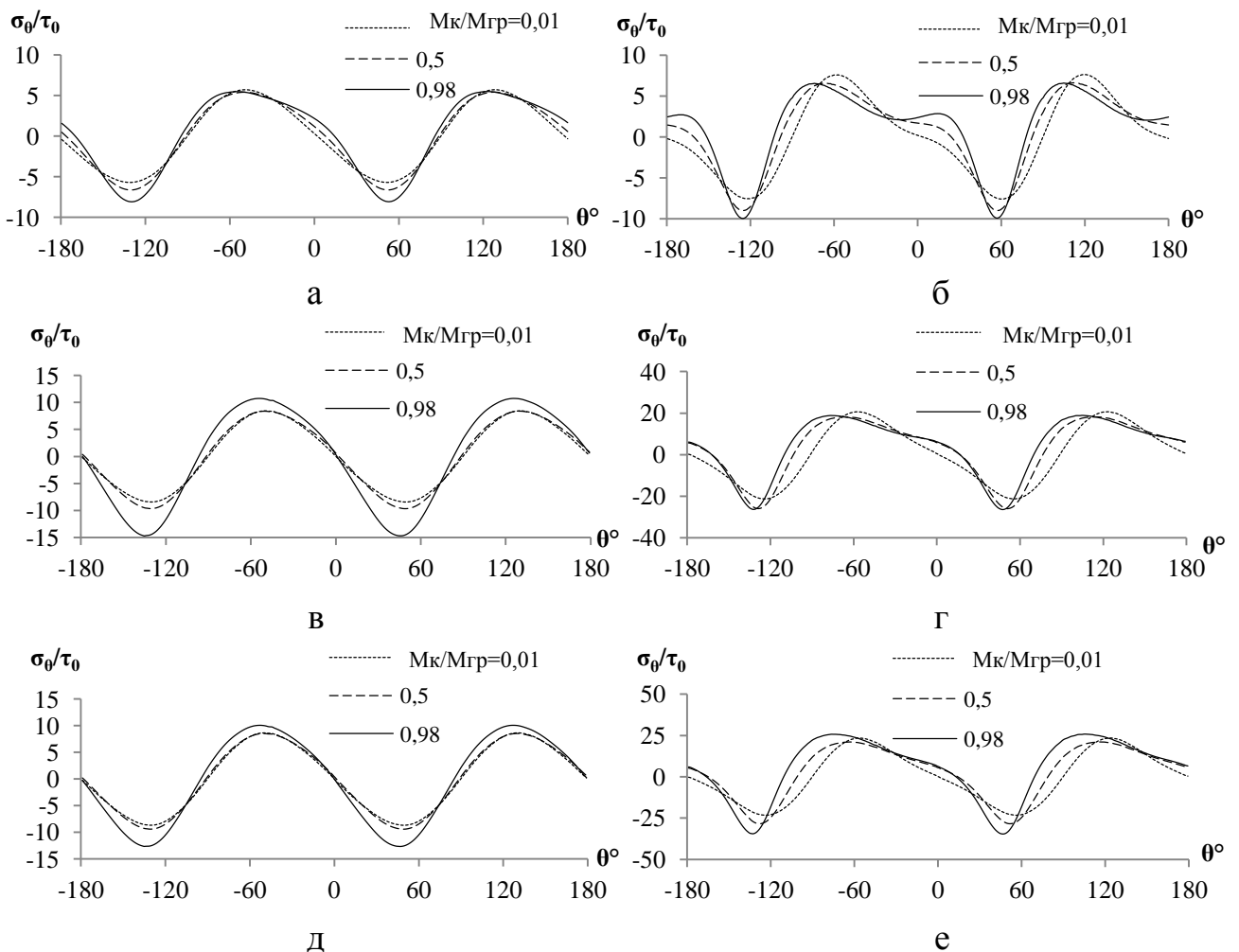
Отримано, що змінення довжини оболонки не впливає на кількість зон концентрації напружень.

Чим коротша оболонка, тим більш значніший вплив величини навантаження на характер розподілу напружень.

Незалежно від довжини і товщини на початковому етапі навантаження отримана симетрія, характерна для лінійних розрахунків: позитивні і негативні максимальні напруження $\sigma_{\theta\max}$ збігаються за абсолютною величиною.

Для більш тонких оболонок з $\beta = 1,78$ з $L/R = 3,9$ і 2 при $M_k/M_{гр} = 0,01$ максимальні напруження σ_θ розташовані під кутами $\theta = \pm 58^\circ$ і $\pm 124^\circ$ (Рис. 4.1 г, е), для $L/R = 0,5$ під кутами $\theta = \pm 60^\circ$ і $\pm 120^\circ$ (рис. 4.1 б). У процесі навантаження, для всіх довжин амплітудні точки переміщуються уздовж кромки

отвору. Кути дії максимумів і мінімумів зсуваються на $\theta = 10^\circ$. Для $\beta = 1,78$ зі зменшенням довжини знижується приріст амплітуди максимального рівня відносних напружень у процесі навантаження. Рівень відносних напружень в оболонках з $L/R = 3,9; 2$ і $0,5$ збільшився у процесі навантаження на 30%, 19% і 18% відповідно.



а – $\beta = 0,66, L/R = 0,5$; б – $\beta = 1,78, L/R = 0,5$; в – $\beta = 0,66, L/R = 2$;
 г – $\beta = 1,78, L/R = 2$; д – $\beta = 0,66, L/R = 3,9$; е – $\beta = 1,78, L/R = 3,9$

Рисунок 4.1 – Залежності відносних нормальних кільцевих напружень σ_θ/τ_0 вздовж кромки отвору θ на внутрішній поверхні оболонки від рівня навантаження M_k/M_{tr} , отримані з урахуванням геометричної нелінійності деформування

З потовщенням оболонки характер залежності σ_θ/τ_0 від θ помітно змінився. У випадку $\beta = 0,66$ на початковому етапі навантаження крива розподілу напружень

близька до синусоїди. Зі збільшенням навантаження синусоїдальний характер кривої порушується. Місця розташування максимумів на початковому етапі навантаження $M_k/M_{гр} = 0,01$ незначно відрізняється від випадку тонкої оболонки. Максимуми і мінімуми зсуваються тільки для найкоротшої оболонки $L/R = 0,5$ на $\theta = 5 \div 10$. Для $L/R = 2$ і $3,9$ зміщення амплітудних значень відбувається в передграничному стані і є несуттєвим. У процесі навантаження максимальні рівні відносних напружень σ_θ/τ_0 збільшилися для оболонок з $L/R = 3,9$ і 2 на 25% і 42% відповідно, для $L/R = 0,5$ на 30%.

Порівнюючи амплітудні значення відносних напружень в оболонках з різними β , отримано, що для $\beta = 1,78$ з $L/R = 3,9$ рівень концентрації напружень вище ніж для $\beta = 0,66$ в 2,7 разу, а з $L/R = 0,5$ на 30%.

У табл. 4.1 наведено порівняльні дані про дотичні напруження τ_ϕ у перерізах між отвором і торцем. Всі напруження віднесені до τ_0 . Представлено дані про максимальні перепади λ відносно дотичних напружень.

Таблиця 4.1

Перепад λ відносних дотичних напружень τ_ϕ/τ_0 у перерізах між отвором і торцем оболонки, отриманих з урахуванням геометричної нелінійності деформування

Переріз	$M_k/M_{гр}$	$\beta = 0,66$			$\beta = 1,78$		
		$L/R = 0,5$	$L/R = 2$	$L/R = 3,9$	$L/R = 0,5$	$L/R = 2$	$L/R = 3,9$
1	0,01	$0,30\tau_0$	$0,03\tau_0$	$0,01\tau_0$	$0,69\tau_0$	$0,15\tau_0$	$0,04\tau_0$
	0,5	$0,35\tau_0$	$0,05\tau_0$	$0,01\tau_0$	$0,74\tau_0$	$0,22\tau_0$	$0,05\tau_0$
	0,98	$0,57\tau_0$	$0,37\tau_0$	$0,13\tau_0$	$0,93\tau_0$	$0,72\tau_0$	$0,40\tau_0$
2	0,01	$0,39\tau_0$	$0,05\tau_0$	$0,01\tau_0$	$0,81\tau_0$	$0,16\tau_0$	$0,03\tau_0$
	0,5	$0,47\tau_0$	$0,06\tau_0$	$0,02\tau_0$	$0,87\tau_0$	$0,22\tau_0$	$0,05\tau_0$
	0,98	$0,79\tau_0$	$0,44\tau_0$	$0,15\tau_0$	$1,12\tau_0$	$0,67\tau_0$	$0,33\tau_0$
3	0,01	$0,53\tau_0$	$0,05\tau_0$	$0,02\tau_0$	$0,82\tau_0$	$0,19\tau_0$	$0,04\tau_0$
	0,5	$0,64\tau_0$	$0,07\tau_0$	$0,02\tau_0$	$0,88\tau_0$	$0,23\tau_0$	$0,05\tau_0$
	0,98	$0,99\tau_0$	$0,37\tau_0$	$0,14\tau_0$	$1,11\tau_0$	$0,57\tau_0$	$0,32\tau_0$

Табл. 4.1 показує, що для кожного з розглянутих перерізів відносні напруження зростають зі збільшенням навантаження.

Для $\beta = 0,66$ напруження падають з віддаленням від отвору у напрямку до торця швидше, ніж при $\beta = 1,78$. Для $\beta = 0,66$ з $L/R = 0,5$ зменшення λ від перерізу до перерізу відбувається на 20-26%. Для $\beta = 1,78$ з $L/R = 0,5$ амплітудні значення перерізів 2 і 3 збігаються, в цьому випадку падіння відбувається при переході від перерізу 2 до 1. Для кожного з рівнів навантаження, зменшення λ в перерізі 1 щодо перерізу 2 відбувається на 15 – 17%.

Незалежно від товщини, при збільшенні довжини, крива розподілу напружень у перерізі 1 близька до перерізу 2.

У всіх випадках, при фіксованому навантаженні, при наближенні до торця змінність τ_φ зменшується. Однак, для оболонок з $L < L^*$, дотичні напруження не прагнуть до τ_0 .

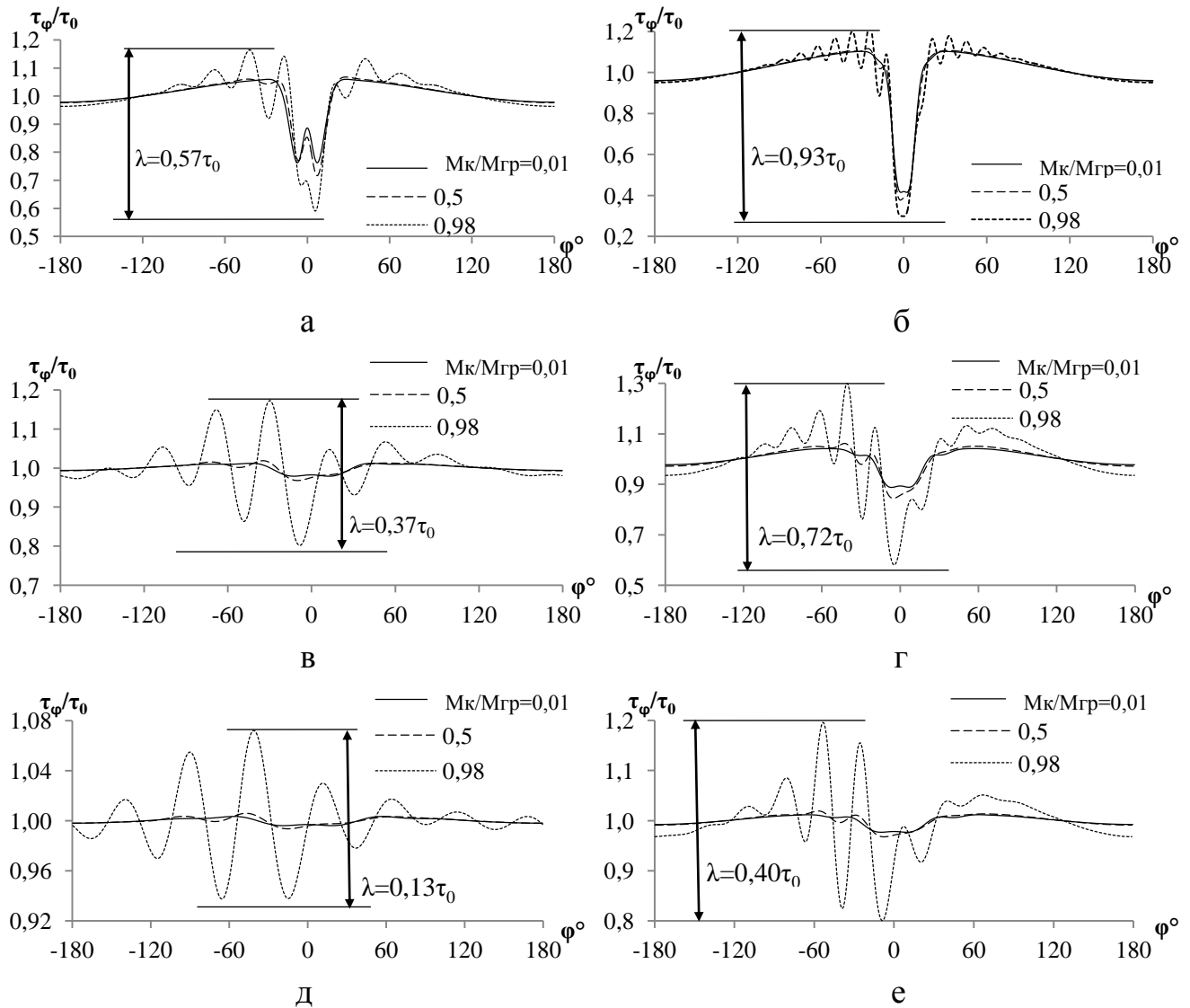
На рис. 4.2 наведено відносні дотичні напруження τ_φ/τ_0 , по окружній координаті φ в крайовому перерізі 1 в залежності від рівня навантаження.

Зі зменшенням довжини оболонки розмір області падіння рівня дотичних напружень в крайовому перерізі по окружній координаті зменшується. Порівняння даних на початковому етапі навантаження показало, що в разі $L/R = 0,5$ для обох товщин ці області займають однакову ділянку на кривій по окружності $[-15^\circ; +15^\circ]$, що відповідає лінійному вирішенню задачі. При збільшенні довжини до $L/R = 2; 3,9$, незалежно від товщини, картини розподілу дотичних напружень подібні, але сектор збурення розширюється, між амплітудними значеннями τ_φ сектор збільшується до $120^\circ - 130^\circ$. Величина навантаження не впливає на ширину ділянки збурення.

Аналіз зміни λ в перерізі 1 в процесі навантаження показав, що з ростом навантаження перепад напружень може багаторазово збільшуватися. Для $\beta = 0,66$ з $L/R = 0,5$ перепад з ростом навантаження зріс на 47%, а для $L/R = 2$ і $L/R = 3,9$ в 12 і 13 разів відповідно. У випадку $\beta = 1,78$ з $L/R = 0,5$ перепад збільшився на 26%, $L/R = 2$ і $L/R = 3,9$ – в 4,8 і 10 разів відповідно.

Зі збільшенням довжини оболонки, незалежно від товщини, перепад напружень зменшується.

Потовщення оболонки приводить до зниження амплітудних значень напружень.



а – $\beta = 0,66$, $L/R = 0,5$; б – $\beta = 1,78$, $L/R = 0,5$; в – $\beta = 0,66$, $L/R = 2$;
 г – $\beta = 1,78$, $L/R = 2$; д – $\beta = 0,66$, $L/R = 3,9$; е – $\beta = 1,78$, $L/R = 3,9$

Рисунок 4.2 – Залежності відносних дотичних напружень τ_ϕ/τ_0 у перерізі 1 від рівня навантаження M_k/M_{gp} , отримані з урахуванням геометричної нелінійності деформування

У табл. 4.2 представлено дані про максимальні перепади відносних мембранних головних напружень σ_1/τ_0 у перерізах 1 – 3. Залежності для другого головного напруження σ_2 кососиметричні по відношенню до σ_1 і тут не наводяться.

Незалежно від товщини, в кожному із розглянутих перерізів, у першій половині діапазону навантаження, з ростом навантаження зміна напруженого стану відбувається незначно. Істотне зростання амплітуди коливань напружень відбувається при високих рівнях навантаження.

В оболонках малої товщини $\beta = 1,78$ з $L/R = 0,5$ і $L/R = 2$ відбувається підвищення рівня напружень по віддаленню від отвору до краю. Для $L/R = 3,9$ у першій половині діапазону навантаження максимальний перепад напружень виникає в перерізі 1, а при високих навантаженнях перепади перерізів 1 і 3 стають однаковими. У разі більшої товщини $\beta = 0,66$ з $L/R = 0,5$ крива перерізу 1 лежить між кривими перерізів 2 і 3, для $L/R = 2$ і $3,9$ найбільший перепад виникає в перерізі 1.

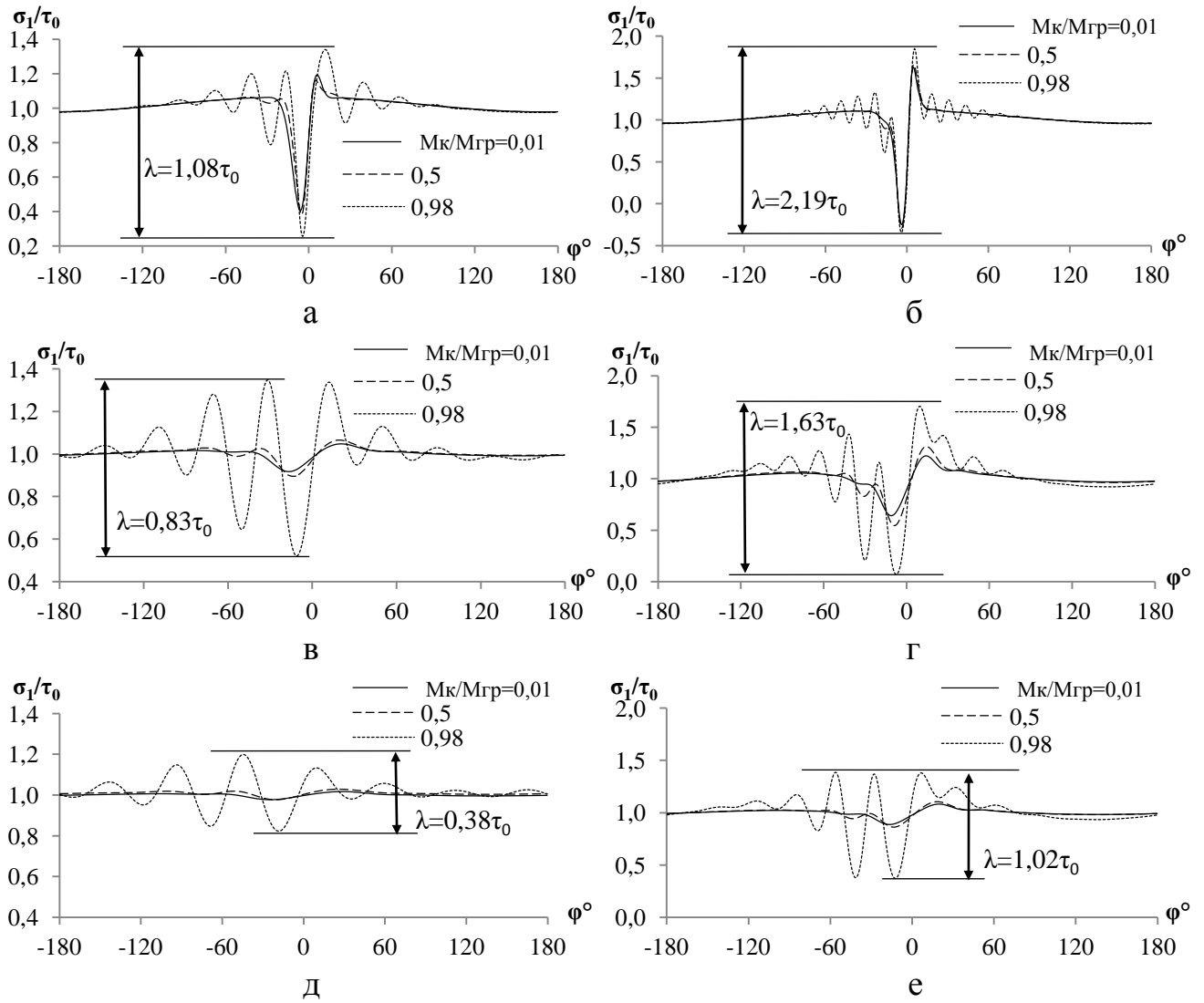
Для $\beta = 1,78$ незалежно від довжини напруження збільшуються на амплітудних ділянках з наближенням перерізів до краю. Виняток становить випадок $\beta = 0,66$ з $L/R = 0,5$, для якого амплітудні значення знижуються в міру наближення до перерізу 1.

Таблиця 4.2

Перепад λ відносних мембранних головних напружень σ_1/τ_0 у перерізах між отвором і торцем оболонки, отриманих з урахуванням геометричної нелінійності деформування

Переріз	$M_k/M_{гр}$	$\beta = 0,66$			$\beta = 1,78$		
		$L/R = 0,5$	$L/R = 2$	$L/R = 3,9$	$L/R = 0,5$	$L/R = 2$	$L/R = 3,9$
1	0,01	$0,79\tau_0$	$0,13\tau_0$	$0,04\tau_0$	$1,88\tau_0$	$0,58\tau_0$	$0,19\tau_0$
	0,5	$0,78\tau_0$	$0,18\tau_0$	$0,05\tau_0$	$1,95\tau_0$	$0,77\tau_0$	$0,25\tau_0$
	0,98	$1,08\tau_0$	$0,83\tau_0$	$0,38\tau_0$	$2,19\tau_0$	$1,63\tau_0$	$1,02\tau_0$
2	0,01	$0,67\tau_0$	$0,09\tau_0$	$0,03\tau_0$	$1,20\tau_0$	$0,40\tau_0$	$0,13\tau_0$
	0,5	$0,69\tau_0$	$0,12\tau_0$	$0,03\tau_0$	$1,25\tau_0$	$0,54\tau_0$	$0,17\tau_0$
	0,98	$1,06\tau_0$	$0,78\tau_0$	$0,31\tau_0$	$1,47\tau_0$	$1,62\tau_0$	$0,84\tau_0$
3	0,01	$1,18\tau_0$	$0,11\tau_0$	$0,03\tau_0$	$1,10\tau_0$	$0,33\tau_0$	$0,14\tau_0$
	0,5	$1,02\tau_0$	$0,12\tau_0$	$0,03\tau_0$	$1,13\tau_0$	$0,41\tau_0$	$0,15\tau_0$
	0,98	$0,93\tau_0$	$0,67\tau_0$	$0,36\tau_0$	$1,41\tau_0$	$1,50\tau_0$	$1,03\tau_0$

На рис. 4.3 наведено залежності σ_1/τ_0 в крайовому перерізі оболонки від $M_k/M_{гр}$.



а – $\beta = 0,66$, $L/R = 0,5$; б – $\beta = 1,78$, $L/R = 0,5$; в – $\beta = 0,66$, $L/R = 2$;

г – $\beta = 1,78$, $L/R = 2$; д – $\beta = 0,66$, $L/R = 3,9$; е – $\beta = 1,78$, $L/R = 3,9$

Рисунок 4.3 – Залежності відносних мембранних головних напружень σ_1/τ_0 в перерізі 1 від рівня навантаження M_k/M_{gp} , отримані з урахуванням геометричної нелінійності деформування

Сектор оболонки, де позначається збурюючий вплив отвору, розширюється зі збільшенням L/R . У передграничному стані ділянка збурень напружень по окружності оболонки в крайовому перерізі, в разі найкоротшої оболонки $L/R = 0,5$ охоплює $\varphi \approx [-70^\circ; +70^\circ]$, а для $L/R = 2$ і $L/R = 3,9$ коливання поширюються по всій окружності оболонки.

Амплітудні значення збурюючих напружень і їх перепад зі збільшенням L/R значно зменшуються. Порівняння λ в перерізі 1 при $M_k/M_{gp} = 0,01$ і $M_k/M_{gp} = 0,98$,

показало, що чим довша оболонка, тим край чутливіший до величини навантаження. Для $\beta = 0,66$ з $L/R = 0,5$ перепад у перерізі 1 збільшився в процесі навантаження на 26%, для $L/R = 2$ – в 6,4 разу, а для $L/R = 3,9$ – в 9,5 разу. Для $\beta = 1,78$ з $L/R = 0,5$ на 13%, для $L/R = 2$ – в 2,8 разу, для $L/R = 3,9$ – в 5,4 разу.

Таким чином, аналіз напруженого стану уздовж кромки отвору і в поперечних перерізах оболонки, взятих по її висоті, отриманого з урахуванням геометричної нелінійності показав, що на відміну від лінійного розв'язку, в якому картина полів напружень не залежить від рівня навантаження, поля напружень зазнають якісних змін при зміні навантаження, як на межі, так і в значній області навколо отвору. У процесі навантаження, збурення поля напружень досягають країв оболонки для оболонок з $L < L^*$. Показано, що за допомогою лінійного МСЕ-аналізу неможливо поррахувати до вичерпання несучої здатності, він застосовується лише на початковому етапі навантаження, діапазон якого суттєво залежить від геометричних розмірів оболонки і отвору, так як у процесі навантаження істотно впливає геометрична нелінійність на напружено-деформований стан.

4.2 Вплив величини навантаження і нелінійності деформацій на рівень концентрації напружень

Проведено дослідження залежності рівня концентрації напружень від величини навантаження. Покроково проводиться розрахунок коефіцієнта концентрації напружень (k_t) і його змінності, трансформації полів напружень в оболонці в процесі зростання навантаження на усьому діапазоні навантаження, зокрема, напружень на кромці отвору.

Розглядаються оболонки із відношеннями довжин до радіусу $L/R = 0,5; 1,0; 2,0; 3,9; 6,7; 11,3; 20,7$. Відношення радіусів отвору і оболонки набуває таких значень: $r/R = 0,05; 0,13; 0,27; 0,53; 0,8$. Відношення радіусу до товщини оболонки прийняте $R/h = 163$. Параметричний аналіз для вищеперерахованих значень L/R і r/R виконаний при усіх можливих їх парах.

Дослідження НДС показали в усіх розрахункових варіантах існування зон концентрації напружень біля отвору. Максимальні за абсолютною величиною напруження σ_{\max} , які визначають ККН, завжди знаходяться на кромці отвору, на внутрішній поверхні оболонки і є найменшими (з урахуванням знаку) головними напруженнями.

На рис. 4.4 – 4.6 приведені залежності ККН від навантаження, для різних розмірів отворів і довжин оболонок. Проведені розрахунки показують, що ККН, отримані при врахуванні геометричної нелінійності деформації, залежать не лише від геометричних параметрів оболонки, але і від рівня навантаження. Коефіцієнти концентрації напружень, отримані в лінійному наближенні, збігаються з мінімальними значеннями k_t на початку приведених кривих, тобто на початку навантаження. Для малих отворів, у початковій стадії навантаження, криві мають ділянку, на якому ККН несуттєво залежить від $M_k/M_{гр}$, причому, чим довше оболонка – тим довше ця ділянка. На цій ділянці навантаження допустимим може бути застосування лінійного розрахунку.

Аналізуючи результати розв'язку задачі про визначення ККН можна виділити два типи поведінки залежностей від рівня навантаження і від параметрів L/R і r/R . У першій половині повного діапазону навантаження k_t безперервно зростає для усіх досліджуваних оболонок. У другій половині для досить малих отворів $r/R = 0,05$ (рис. 4.4) монотонне зростання k_t триває при навантаженні до $M_{гр}$ із швидкістю вище лінійної, а на ділянці кривої $M_k/M_{гр} \approx [0,9 \div 1,0]$ це зростання різко збільшується. Виняток становлять оболонки великої довжини ($L/R = 20,7$) у яких k_t практично не залежить (менше 5%) від рівня навантаження. Тенденція монотонного зростання k_t спостерігається і для усіх оболонок з отворами середньої величини, включаючи довгі оболонки з $L/R = 20,7$ (рис. 4.5). Для великих отворів, у другій половині навантаження, ККН може падати із зростанням навантаження (рис. 4.6), а іноді і мати в передграничному стані $M_k/M_{гр} \approx [0,95 \div 1,0]$ повторні ділянки інтенсивного зростання.

Необхідно підкреслити, що не в одному з розрахованих випадків падіння ККН не означає падіння максимальних напружень в зоні їх концентрації, але веде до уповільнення їх зростання при збільшенні навантаження.

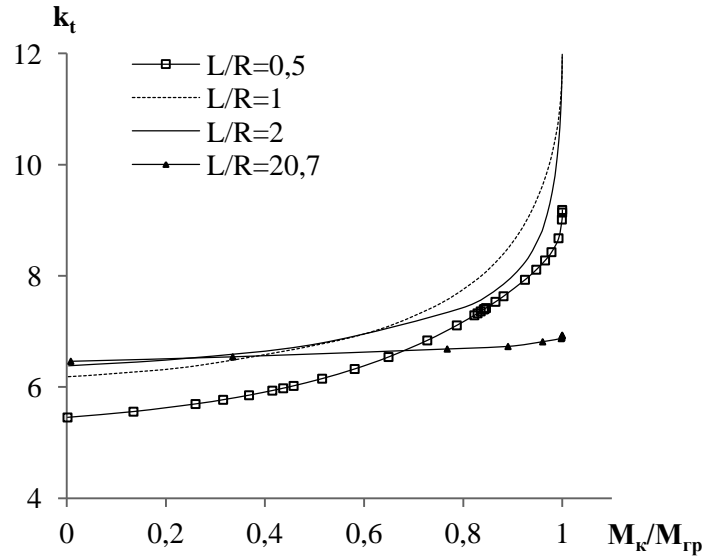
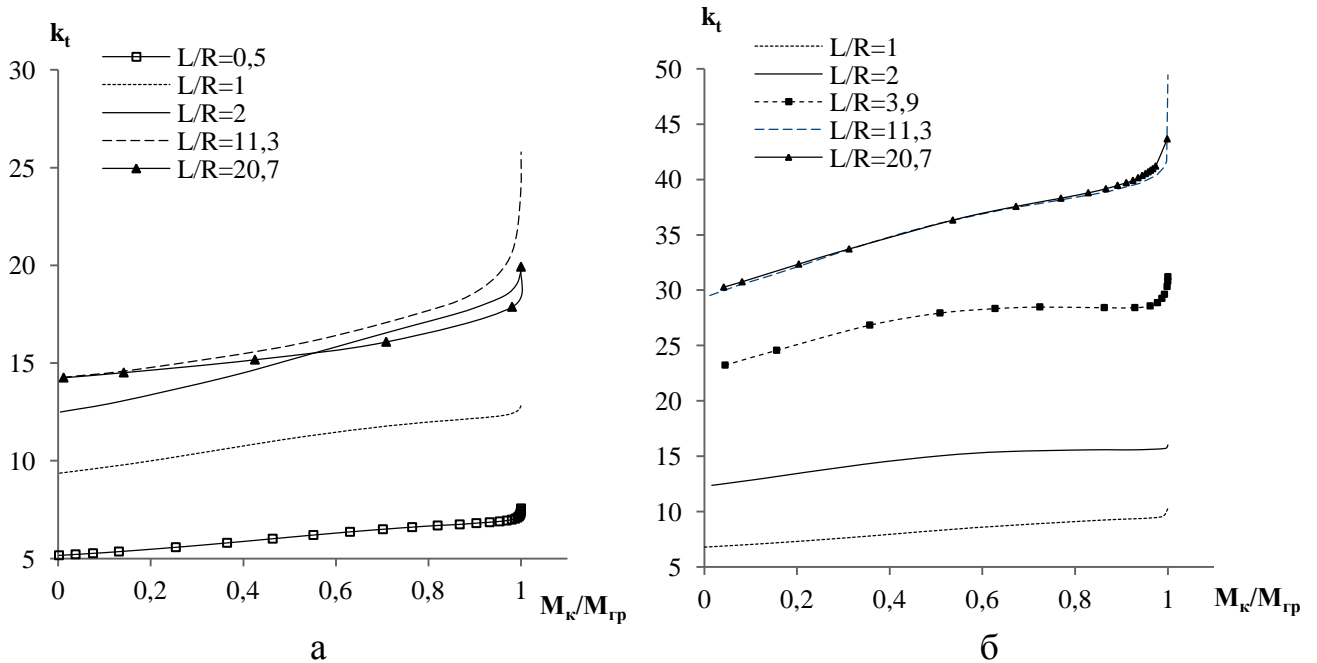


Рисунок 4.4 – Залежність коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від навантаження ($M_k/M_{гр}$) для малого отвору, $r/R = 0,05$



а – $r/R = 0,13$; б – $r/R = 0,27$

Рисунок 4.5 – Залежність коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від навантаження ($M_k/M_{гр}$) для середніх отворів

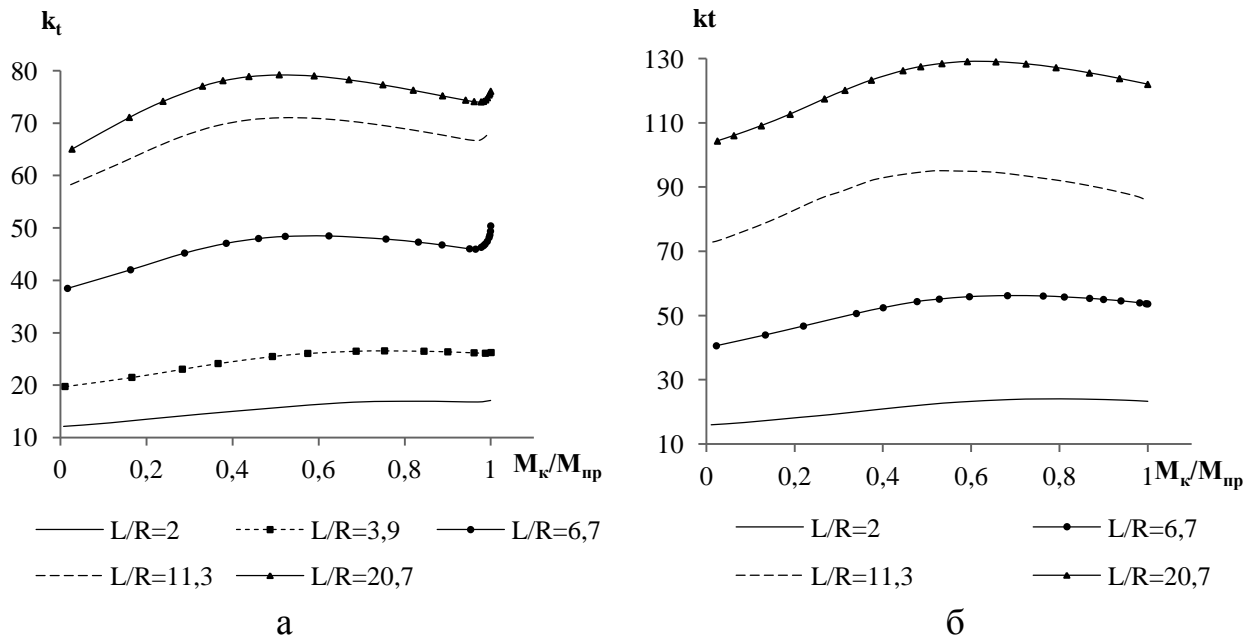


Рисунок 4.6 – Залежність коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від навантаження (M_k/M_{np}) для великих отворів

Дані по кількісній зміні ККН у процесі навантаження в результаті впливу нелінійності приведені в табл. 4.3 і 4.4, для невеликих r/R з 0,05 по 0,27 і великих $r/R = 0,53$ і 0,8 отворів відповідно. Тут представлені нормовані значення навантажень M_k/M_{np} , що відповідають максимальним значенням ККН і процентного відношення максимального зростання k_t відносно значення, що відповідає початковому навантаженню. Це процентне співвідношення показує максимальну відмінність у величинах k_t , отриманих у геометрично нелінійному і лінійному розв'язках.

Для малих і середніх отворів ККН досягає найбільшого значення у кінці навантаження. Оскільки близько граничного навантаження деформації різко наростають, в табл. 4.3 показано дані при навантаженнях, декілька менших граничних. Для великих отворів це може відбуватися в середній частині діапазону навантаження (табл. 4.4), причому для кожного з варіантів комбінацій параметрів r/R і L/R максимум k_t досягається при своєму значенні M_k/M_{np} . Для оболонок з малими і великими отворами відносно максимальне зростання ККН вище для

коротших оболонок. Для оболонок з отворами середньої величини такої закономірності не спостерігається.

Таблиця 4.3

Відносна максимальна зміна коефіцієнта концентрації напружень у процесі навантаження для малих і середніх отворів, %

Параметр довжини	$r/R = 0,05$	$r/R = 0,13$	$r/R = 0,27$
	$M_k/M_{гр} \approx 0,96$	$M_k/M_{гр} \approx 0,96$	$M_k/M_{гр} \approx 0,98$
$L/R = 0,5$	32,8	25,6	–
$L/R = 1,0$	35,3	24,1	28,8
$L/R = 2,0$	28,6	32,3	21,3
$L/R = 3,9$	–	–	20,0
$L/R = 11,3$	–	28,0	28,0
$L/R = 20,7$	5,0	20,0	26,5

Таблиця 4.4

Відносна максимальна зміна коефіцієнта концентрації напружень в процесі вантаження для великих отворів, %

Параметр довжини	$r/R = 0,53$		$r/R = 0,8$	
	$M_k/M_{гр}$	%	$M_k/M_{гр}$	%
$L/R = 2,0$	0,83	28,3	0,68	33,0
$L/R = 3,9$	0,75	25,6	0,71	30,0
$L/R = 6,7$	0,62	20,7	0,68	27,8
$L/R = 11,3$	0,36	18,0	0,53	23,3
$L/R = 20,7$	0,50	17,9	0,59	19,2

При врахуванні геометрично нелінійної деформації поля напружень істотно змінюються по мірі зростання навантаження як біля отвору, так і по усій довжині оболонки. На рис. 4.7 – 4.16 показана трансформація полів найменших головних напружень σ_3 на внутрішній поверхні оболонок (де і знаходяться зони концентрації напружень з найбільшим ККН) з $L/R = 2$ і $L/R = 11,3$ залежно від $M_k/M_{гр}$. Картини напружень, що відображають процес утворення і зміни полів

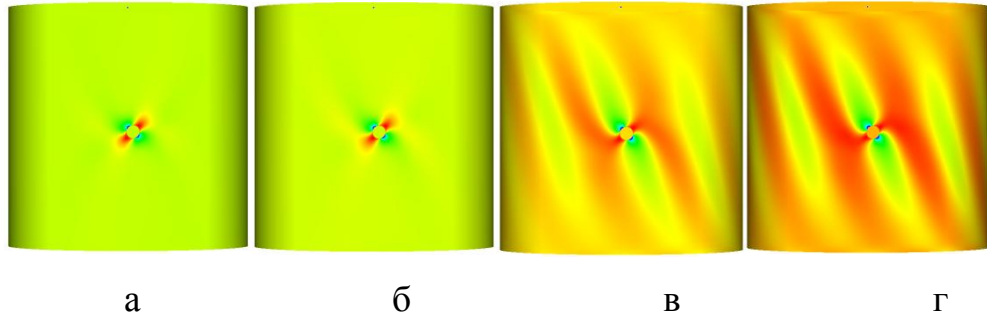
напружень, дано послідовно для трьох значень $M_k/M_{гр}$ – на початку, середині і кінці навантаження. Зони максимальних рівнів стиснюючих напружень відображені фіолетовим кольором, що розтягують – червоним, причому найтемніші ділянки на межі отвору і є зонами концентрації напружень. Як видно на рисунках, ці діаметрально розташовані зони локалізовані у вигляді вузьких смужок, витягнутих уздовж краю отвору різних отворів. Із зростанням навантаження вони поширюються в радіальному напрямі під певним кутом θ , одночасно звужуючись в кільцевому напрямі.

У разі малого розміру отвору $r/R = 0,05$ (рис. 4.7, 4.12), по мірі зростання рівня навантаження ділянка значимих напружень локальна, збільшується повільно з несуттєвими змінами до передграничного стану (рис.4.7 а, б, 4.12 а). Відчутний перерозподіл полів напружень відбувається тільки при наближенні до моменту втрати несучої здатності (рис.4.7 в, 4.12 б). Остаточна картина напруженого стану швидко формується формою втрати несучої здатності, безпосередньо перед випученням в діапазоні навантаження $M_k/M_{гр} \approx [0,98 \div 1,00]$.

Для середніх і великих отворів з самого початку процесу навантаження картини розподілу напружень у міру збільшення отвору носять усе більш складний характер (рис. 4.8 – 4.11, 4.13 – 4.16). Зона значимих неоднорідних напружень пов'язаних з внесенням отвору, який можна віднести до середніх $r/R = 0,13$, вже в першій половині навантаження розширюється і перестає бути локальною, розширюючись по самі краї оболонки з $L/R = 2$ і набуваючи форми з похилими ділянками, схожу на форму прогинів при втраті стійкості (рис. 4.8). Збільшення отвору до $r/R = 0,27$ веде до ускладнення виду розподілу напружень. Неоднорідність поля напружень біля країв оболонки з'являється безпосередньо з початку навантаження (рис. 4.9 а), продовження якого демонструє виникнення картин (рис. 4.9 б, в), що дуже відрізняються.

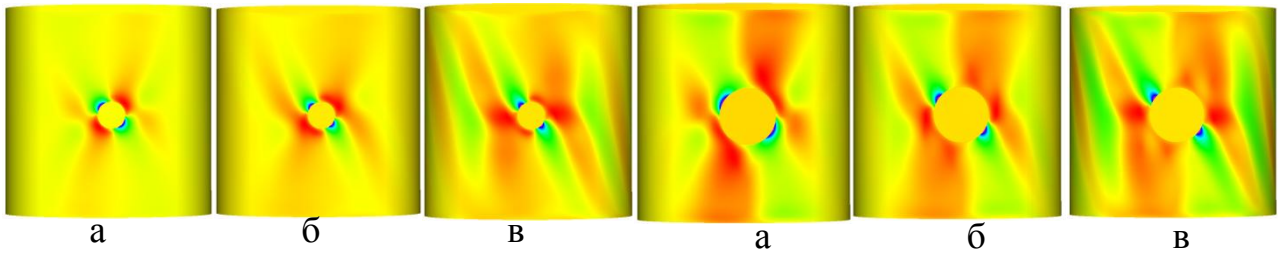
Іншими є картини розподілу напружень для довших оболонок $L/R = 11,3$ з отворами середньої величини (рис. 4.13 – 4.14). Тут можна спостерігати повільний розвиток локальної форми збурень напруженого стану (рис. 4.13 а, б, 4.14 а, б) вичерпання несучої здатності оболонки. Дещо відрізняється картина напруженого

передграничного стану (рис. 4.13 в), на якій похила витягнута зона значимих напружень схожа на форму втрати стійкості, як і для коротшої оболонки з $L/R = 2$, що обговорювалась раніше.



а – $M_k/M_{гр} = 0,04$; б – $M_k/M_{гр} = 0,5$; в – $M_k/M_{гр} = 0,99$; г – $M_k/M_{гр} = 0,999$

Рисунок 4.7 – Поля напружень σ_3 на внутрішній поверхні оболонки,
 $r/R = 0,05, L/R = 2$

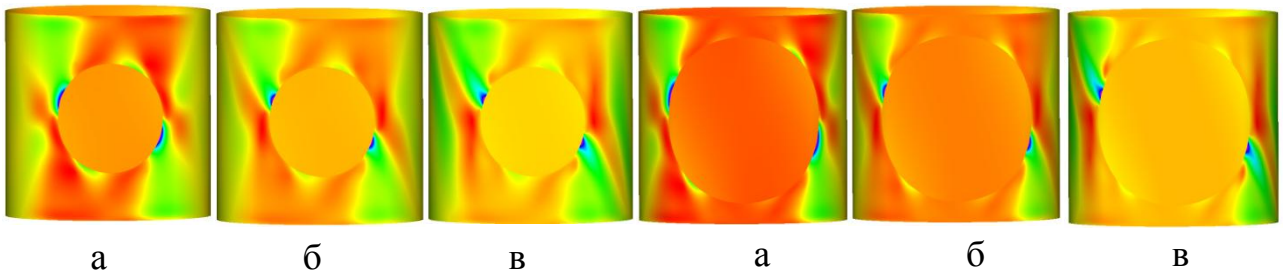


а – $M_k/M_{гр} = 0,02$; б – $M_k/M_{гр} = 0,54$;
в – $M_k/M_{гр} = 0,99$

Рисунок.4.8 – Поля напружень σ_3 ,
 $L/R = 2, r/R = 0,13$

а – $M_k/M_{гр} = 0,02$; б – $M_k/M_{гр} = 0,65$;
в – $M_k/M_{гр} = 0,99$

Рисунок 4.9 – Поля напружень σ_3 ,
 $L/R = 2, r/R = 0,27$

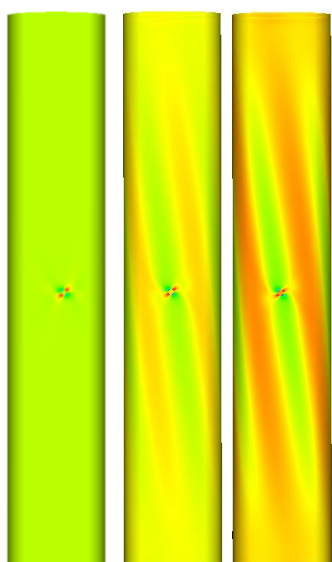


а – $M_k/M_{гр} = 0,01$; б – $M_k/M_{гр} = 0,65$;
в – $M_k/M_{гр} = 0,999$

Рисунок 4.10 – Поля напружень σ_3 ,
 $L/R = 2, r/R = 0,53$

а – $M_k/M_{гр} = 0,01$; б – $M_k/M_{гр} = 0,57$;
в – $M_k/M_{гр} = 0,999$

Рисунок 4.11 – Поля напружень σ_3 ,
 $L/R = 2, r/R = 0,8$



а б в

а – $M_K/M_{Гр} = 0,04$;

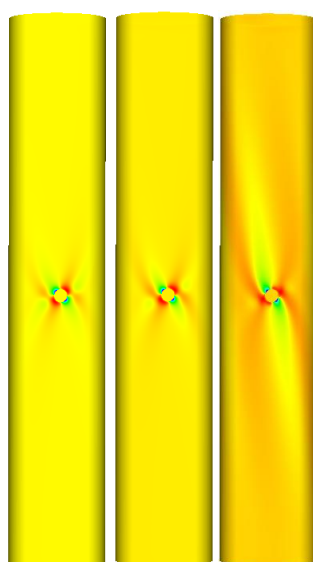
б – $M_K/M_{Гр} = 0,98$;

в – $M_K/M_{Гр} = 0,999$

Рисунок 4.12 – Поля

напряжень σ_3 ,

$L/R = 11,3, r/R = 0,05$



а б в

а – $M_K/M_{Гр} = 0,01$;

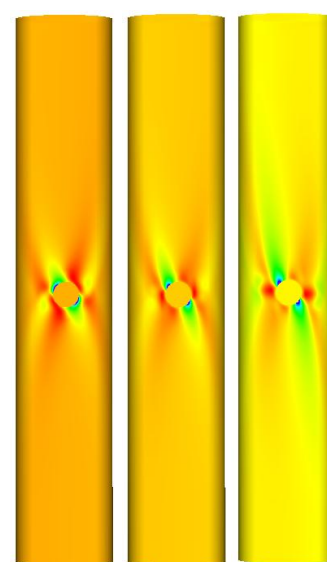
б – $M_K/M_{Гр} = 0,53$;

в – $M_K/M_{Гр} = 0,999$

Рисунок 4.13 – Поля

напряжень σ_3 ,

$L/R = 11,3, r/R = 0,13$



а б в

а – $M_K/M_{Гр} = 0,02$;

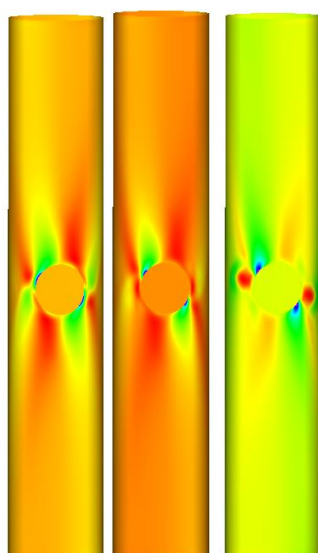
б – $M_K/M_{Гр} = 0,65$;

в – $M_K/M_{Гр} = 0,999$

Рисунок 4.14 – Поля

напряжень σ_3 ,

$L/R = 11,3, r/R = 0,27$



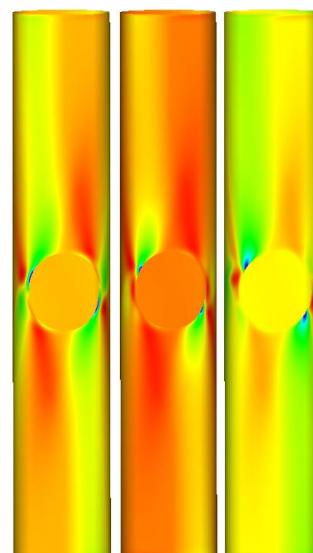
а б в

а – $M_K/M_{Гр} = 0,02$; б – $M_K/M_{Гр} = 0,52$;

в – $M_K/M_{Гр} = 0,999$

Рисунок 4.15 – Поля напряжень σ_3 ,

$L/R = 11,3, r/R = 0,53$



а б в

а – $M_K/M_{Гр} = 0,02$; б – $M_K/M_{Гр} = 0,52$;

в – $M_K/M_{Гр} = 0,999$

Рисунок 4.16 – Поля напряжень σ_3 ,

$L/R = 11,3, r/R = 0,8$

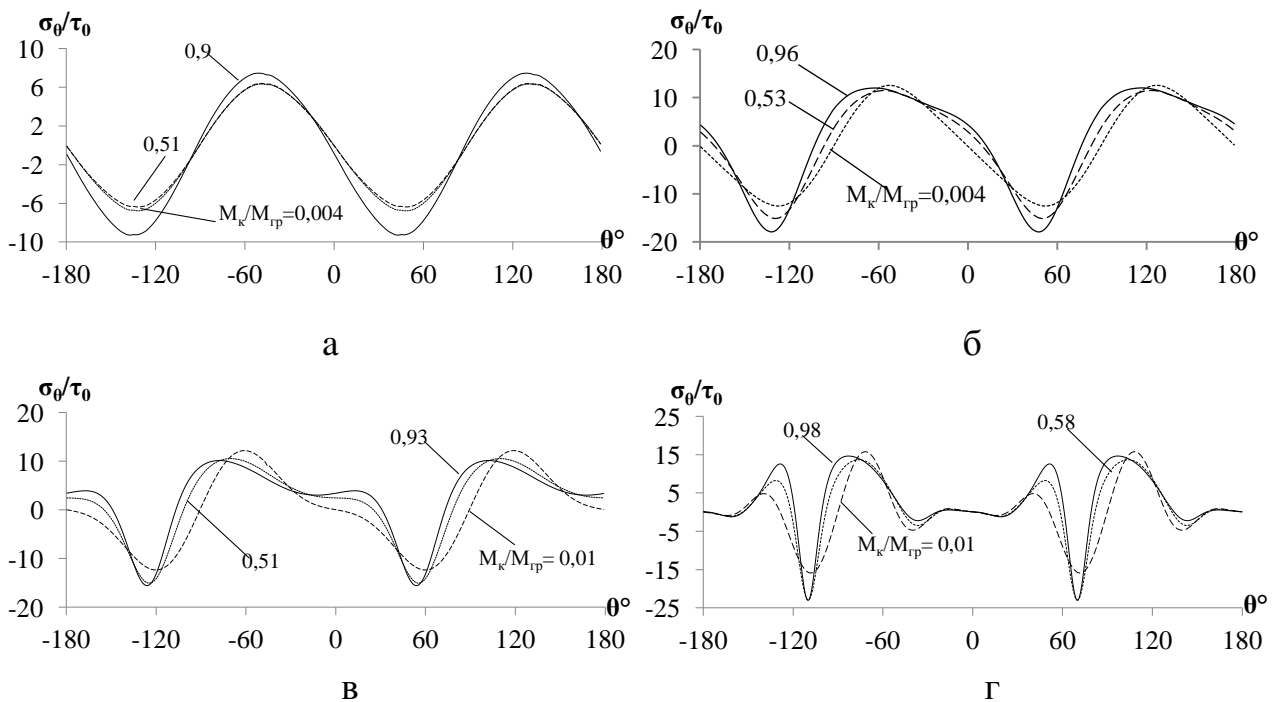
На рис. 4.10 – 4.11 і 4.15 – 4.16 приведені картини розподілу напружень σ_3 на внутрішній стороні оболонок з великими отворами. Зі збільшенням отворів, як правило, ростуть ККН, розширюються і зони концентрації напружень. Вид полів напружень по мірі зростання навантаження для коротших оболонок з $L/R = 2$ змінюється швидше (рис. 4.10 – 4.11) в порівнянні з оболонками з $L/R = 11,3$ (рис. 4.15 – 4.16). Неоднорідність загального поля напружень також збільшується і поширюється до країв навіть для відносно довгих оболонок (рис. 4.15 – 4.16), у зв'язку з чим їх підтримувальна роль на ККН стає визначальною.

Окрім характеристик загального напруженого стану представляє інтерес розподілення кільцевих напружень σ_θ на межі отвору. На рис. 4.17 – 4.18 дано величини відносних кільцевих напружень σ_θ/τ_0 уздовж межі отвору на внутрішній поверхні оболонки, в залежності від рівня навантаження для оболонок з параметрами довжини $L/R = 2$ і $11,3$. Залежності побудовані для декількох отворів при трьох рівнях навантаження, що відповідають початковому етапу навантаження, деякому рівню з середньої частини повного діапазону $M_K/M_{Gr} = [0 \div 1]$ і значенню, близькому до граничного крутного моменту.

Варто відзначити, що максимальне напруження в області концентрації σ_{\max} для усіх досліджуваних оболонок знаходиться в так званому центрі концентрації на кромці отвору, і дещо перевищує $\max|\sigma_\theta|$. Характер розподілу напружень уздовж контуру отвору ускладнюється по мірі зростання крутного моменту і величини отвору. Кільцеві напруження міняють свій знак уздовж кромки, утворюючи ділянки розтягування і стиснення, причому, кількість цих ділянок може зростати зі збільшенням радіусу отвору. Кутові координати максимумів σ_θ зміщуються уздовж краю отвору несуттєво. Розміри отвору впливають не лише на максимальні амплітудні значення, але і на вигляд кривих розподілу напружень уздовж його межі. Для малого отвору $r/R = 0,05$ на оболонці з $L/R = 2$ (рис. 4.17 а) крива параметра кільцевих напружень σ_θ/τ_0 на кромці отвору має кососиметричну форму, близьку до синусоїдальної. Вид залежності напружень на початковому етапі навантаження задовільно узгоджується з результатами, отриманими в

лінійному наближенні для довгої оболонки [9]. При наближенні до граничного стану на рівні $M_k/M_{гр} \approx 0,97$ починається деяка зміна кривої напружень. Зі збільшенням отвору антисиметрія кривих порушується. У разі середніх і великих отворів (рис. 4.17 б, в, г) синусоїдальна форма кривих, властива вирішенню на основі лінійного наближення, втрачається, трансформуючись в складніші для опису залежності. При великих отворах (рис. 4.17 в, г) положення центру концентрації напружень із зростанням навантаження практично не міняється. Для оболонок з більшою довжиною і отворами середньої величини (рис. 4.18 б, в, г) характер залежностей подібний показаним на рис. 4.17 б, в, г із відмінністю тільки в амплітудних значеннях σ_θ/τ_0 . Звертає на себе увагу випадок з малим отвором (рис. 4.18 а), який відрізняється тим, що залежності σ_θ/τ_0 на усьому діапазоні навантаження, до передграничного стану, практично збігаються, тобто майже не залежать від рівня навантаження. Крім того, вони мають синусоїдальну форму.

Варто відзначити, що явище зміщення концентрації напружень із зростанням розміру отвору виявлене в роботі D.S. Houghton [10], з чим узгоджуються отримані результати.



а – $r/R = 0,05$; б – $r/R = 0,13$; в – $r/R = 0,27$; г – $r/R = 0,8$

Рисунок 4.17 – Розподіл відносних кільцевих напружень уздовж кромки отвору на внутрішній поверхні оболонки залежно від рівня навантаження, $L/R = 2$

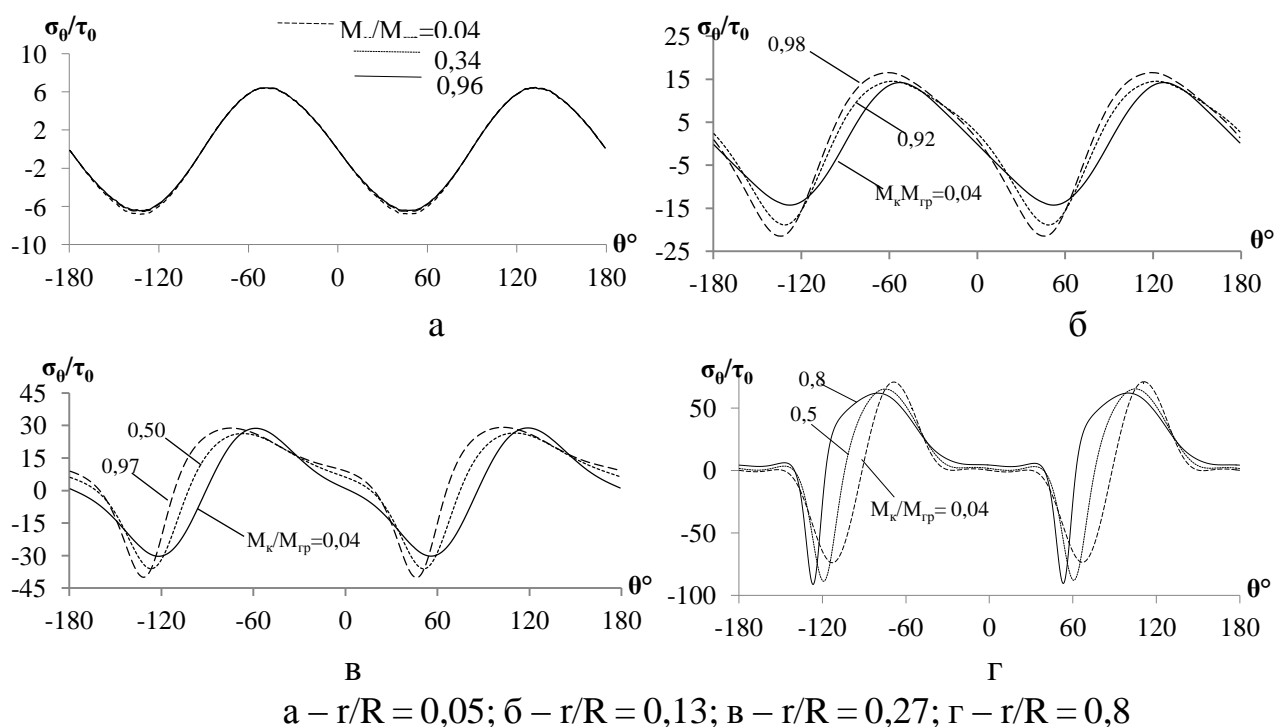


Рисунок 4.18 – Розподіл відносних кільцевих напружень уздовж кромки отвору на внутрішній поверхні оболонки залежно від рівня навантаження, $L/R = 11,3$

Вказані факти, а також попередній аналіз залежності k_t для довгої оболонки з $L/R = 20,7$ (рис. 4.4) і полів напружень (рис. 4.15 – 4.16), дозволяють стверджувати, що для досить довгих оболонок з малими отворами застосування лінійного аналізу в задачі про визначення концентрації напружень може давати задовільні результати.

Таким чином, отримано, що врахування нелінійності деформації дає можливість визначати ККН, що змінюються, в процесі навантаження. При великих і середніх за величиною отворах поля напружень оболонок, як і зони концентрації напружень, істотно трансформуються із зростанням навантаження і змінюють свою топологію. Встановлено, що на відміну від досить поширеної лінійної постановки задачі, при якій k_t не залежить від навантаження, врахування нелінійності у більшості випадків показує його підвищення на десятки відсотків в певних частинах повного діапазону навантаження. Іншими словами, величина максимальних напружень в зоні їх концентрації, отримана на основі лінійного

наближення, може давати задовільну оцінку напруженням в зоні їх концентрації тільки для довгих оболонок з малими отворами. В усіх інших випадках для правильної оцінки міцності конструкції при розрахунку потрібне врахування геометричної нелінійності деформації.

4.3 Формування тривимірних полів переміщень у процесі навантаження

Досліджуються оболонки із двома розмірами отворів, що відносяться по класифікації до великих і середніх: 1) із співвідношенням радіусів отвору і оболонки $r/R = 0,53$ і різними відношеннями довжини до радіусу оболонки $L/R = 2,0; 3,9; 6,7; 20,7$ із відношеннями $r/R = 0,13$ і $L/R = 0,5; 2,0$. Відношення радіусу до товщини для усіх оболонок однакове: $R/h = 163$.

Для опису полів переміщень використовуються системи координат наведені на рис. 4.19. Глобальна система декартових координат (x, y, z) пов'язана з верхнім торцевим перерізом оболонки в її ненавантаженому, недеформованому стані і залишається нерухомою при виникненні деформацій при дії крутного моменту. Початок цієї системи координат розташований в незалежному вузлі, що знаходиться на осі оболонки в центрі жорсткого елемента (т.О). Позитивні напрями переміщень, а також знаки кутових поворотів збігаються з напрямками осей і поворотів навколо них. Локальна система координат з початком в центрі кругового вирізу на розгортці оболонки використовується для опису осьових, окружних і радіальних переміщень на контурі отвору та всієї поверхні оболонки. Ця циліндрична система координат також нерухома в процесі деформації оболонки.

Досліджувалася поведінка оболонок на усьому діапазоні статичної деформації до вичерпання їх несучої здатності, відповідної граничним крутним моментам $M_{гр}$. Для отримання повної картини тут представлені переміщення T_x, T_y, T_z і повороти незалежного вузла R_x, R_y, R_z жорсткого елемента, зв'язаного з верхнім торцем оболонки і тангенціальні та радіальні переміщення u, v і w на межі отвору й на поверхні усієї оболонки.

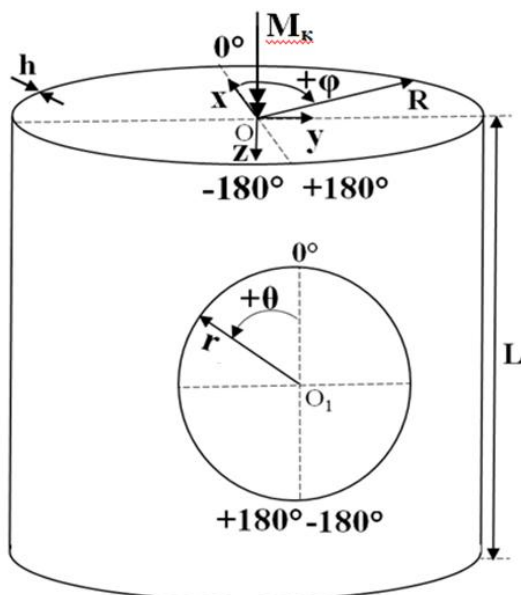
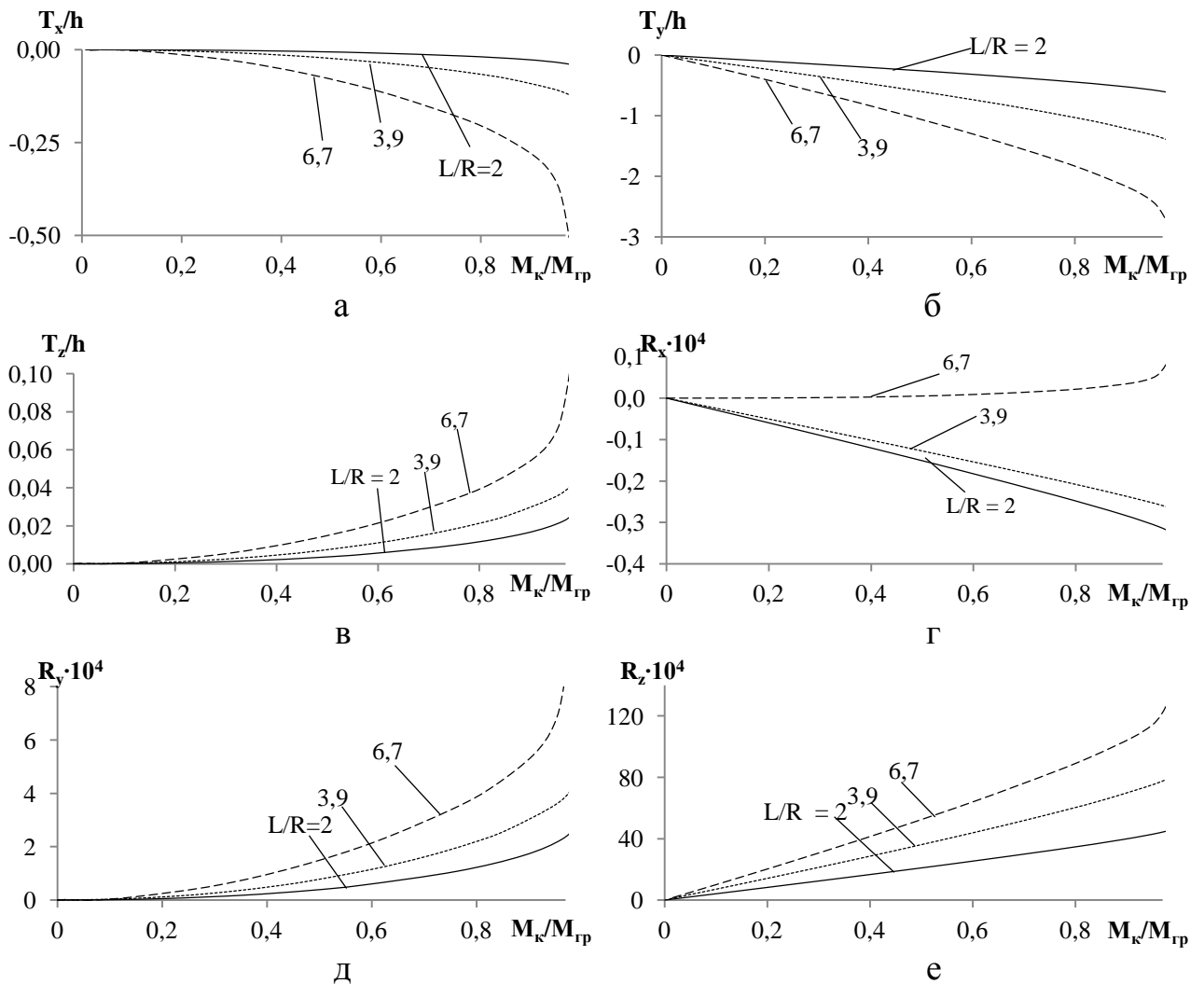


Рисунок 4.19 – Загальний вид оболонки

Розрахунки показують, що жорсткий елемент, зв'язаний з верхнім торцем, із зростанням навантаження переміщається і обертається по усіх шести ступенях свободи. Усі залежності, приведені на рис. 4.20 – 4.21, побудовані при зростаючому крутному моменті M_k , віднесеному до величини граничного крутного моменту $M_{гр}$.

На рис. 4.20 приведені рухи незалежного вузла жорсткого елемента для оболонок з великим отвором ($r/R = 0,53$) для трьох варіантів довжин залежно від відношення крутного моменту, що прикладається, до граничних його значень, різним для усіх трьох довжин. Переміщення віднесені до товщини оболонок, яка в усіх розрахунках не змінювалася, кути повороту дані в радіанах. Рис. 4.20 а, б, в ілюструють відносні переміщення центральної точки верхнього крайового перерізу. У напрямі, протилежному до осі Y, переміщення найзначніші, найменшими є переміщення, що характеризують зближення країв оболонки. Спостерігається і помітний рух у напрямі, протилежному до осі X. Очевидним результатом можна назвати той факт, що збільшення переміщень в дограничному діапазоні навантажень для оболонок виходить при збільшенні L/R . Для кутів повороту верхнього краю оболонок (рис. 4.20 д, е) показують ту ж тенденцію. Кути повороту відносно осей Y, Z відрізняються більш ніж на порядок, при цьому верхній торець оболонки обертається до отвору. Поворот відносно осі X дуже

незначний, проте для коротших оболонок кут R_x негативний, але зі збільшенням L/R міняє свій знак (рис. 4.20 г).



а – переміщення уздовж осі X; б – переміщення уздовж осі Y;

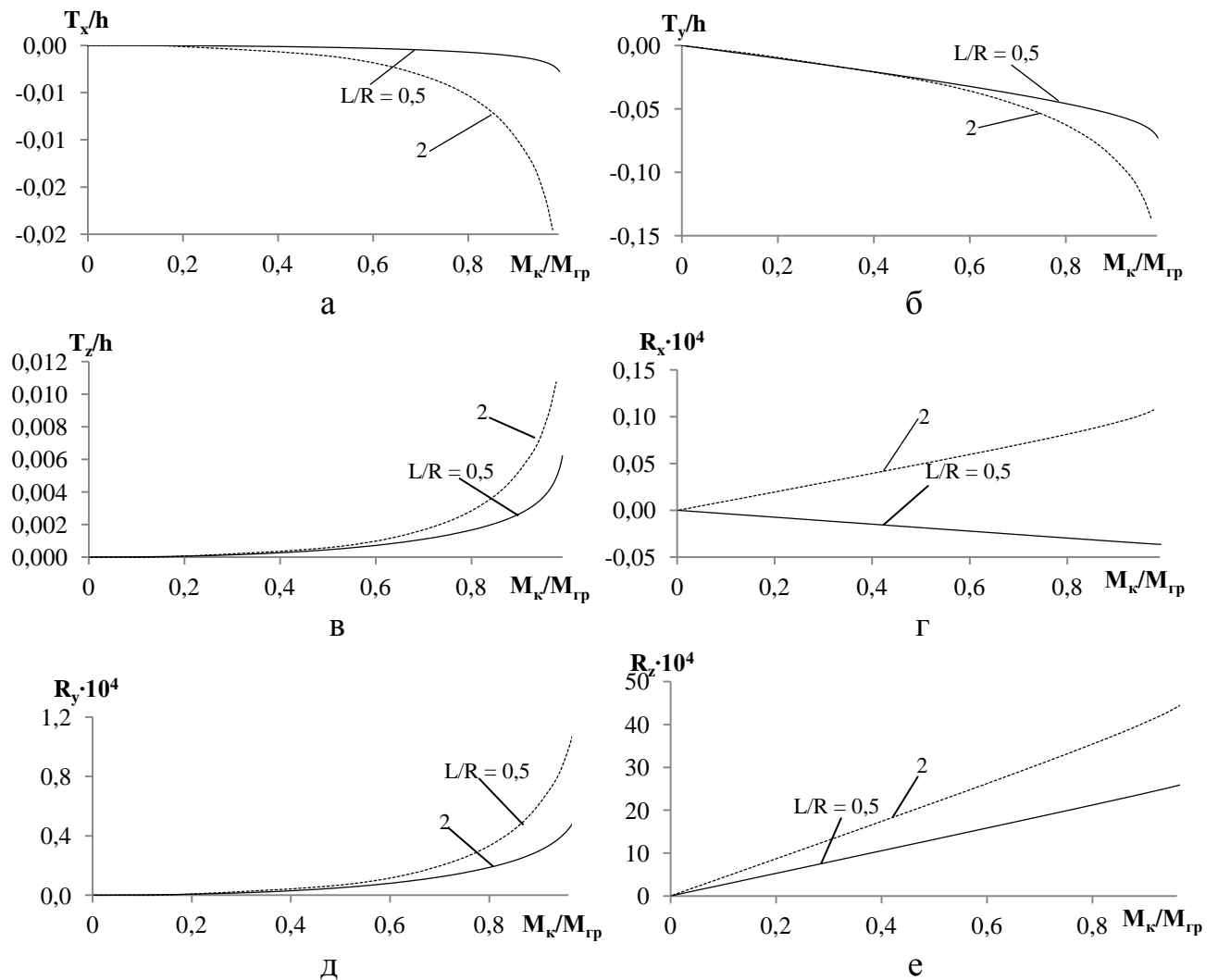
в – переміщення уздовж осі Z; г – поворот навколо осі X;

д – поворот навколо осі Y; е – поворот навколо осі Z

Рисунок 4.20 – Відносні переміщення і повороти (рад) незалежного вузла (т.О) з відношенням радіусів отвору і оболонки $r/R = 0,53$ для різних L/R

На рис.4.21 дано аналогічні показаням на рис. 4.20 залежності переміщень і поворотів незалежного вузла для оболонки з отвором середньої величини ($r/R = 0,13$). Порівняння рухів верхнього торця оболонок з довжинами, що відрізняються в 4 рази, показує, що для усіх залежностей можна сформулювати такі закономірності: 1. Збільшення довжини оболонки завжди призводить до

зростання усіх компонентів переміщень і поворотів. Цей ефект збільшується в другій фазі навантаження (рис. 4.21 а, б, в, д), коли крутний момент, наближається до свого граничного значення. 2. Повороти відносно осей X і Z відрізняються за величиною з самого початку навантаження (рис. 4.21 г, е). Напрямок поворотів відносно осі X залежить від довжини оболонки. Ті ж закономірності властиві і оболонкам з великим отвором (рис. 4.20).



а – переміщення уздовж осі X; б – переміщення уздовж осі Y;

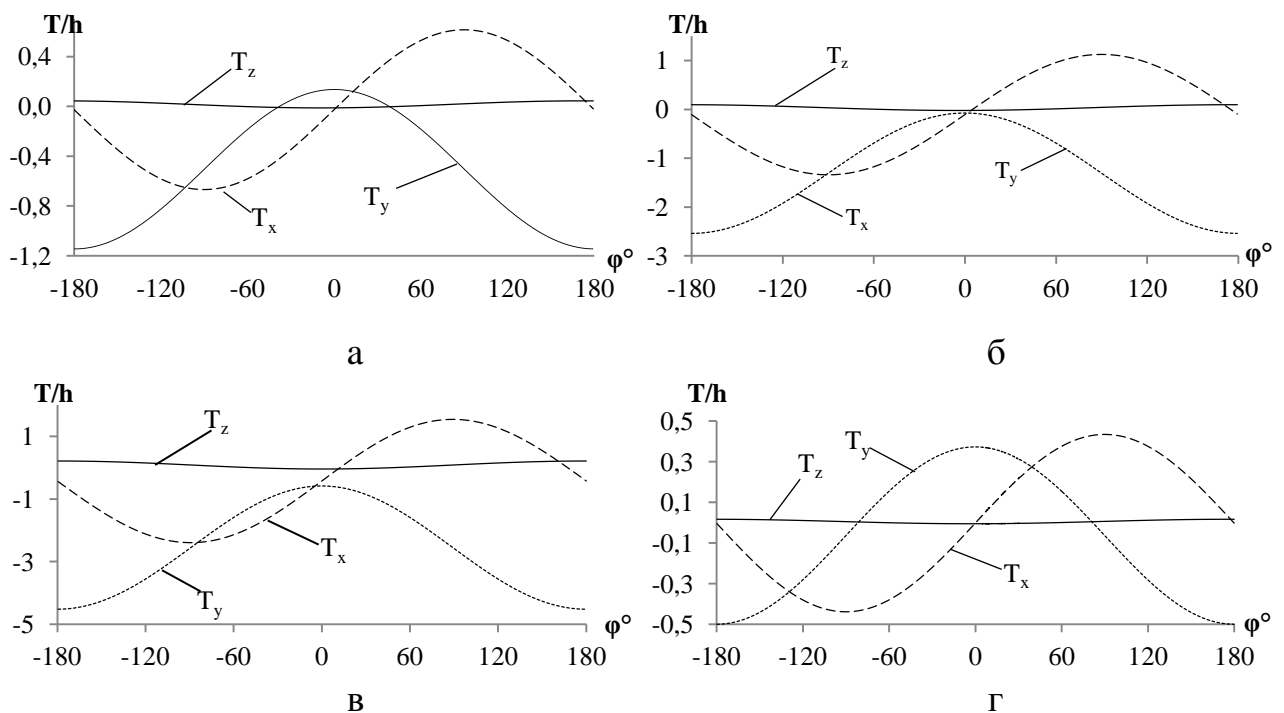
в – переміщення уздовж осі Z; г – поворот навколо осі X;

д – поворот навколо осі Y; е – поворот навколо осі Z

Рисунок 4.21 – Відносні переміщення і повороти (рад) незалежного вузла (т.О) з відношенням радіусів отвору і оболонки $r/R = 0,13$ для різних L/R

На рис. 4.22 а, б, в приведені переміщення по трьох координатах верхнього торця оболонки з великим отвором $r/R = 0,53$ для трьох довжин. Переміщення у напрямі осі оболонки T_z малі і відрізняються від нульових несуттєво. Компоненти переміщень в площині крайового перерізу T_x і T_y мають порядок товщини оболонки.

Примітним видається варіант з $L/R = 3,9$ (рис. 4.22 б), коли при навантаженні, близькому до граничного, переміщення точки краю оболонки, що знаходиться на тій, що утворює з координатою $\varphi = 0^\circ$ і відносно якої відбувається поворот торцевого перерізу, дорівнюють нулю. Відповідні переміщення для короткої оболонки з отвором $r/R = 0,13$ показані на рис. 4.22 г. Для оболонок більшої довжини переміщення T_x , T_y і T_z по виду близькі і відрізняються лише величиною амплітуд.



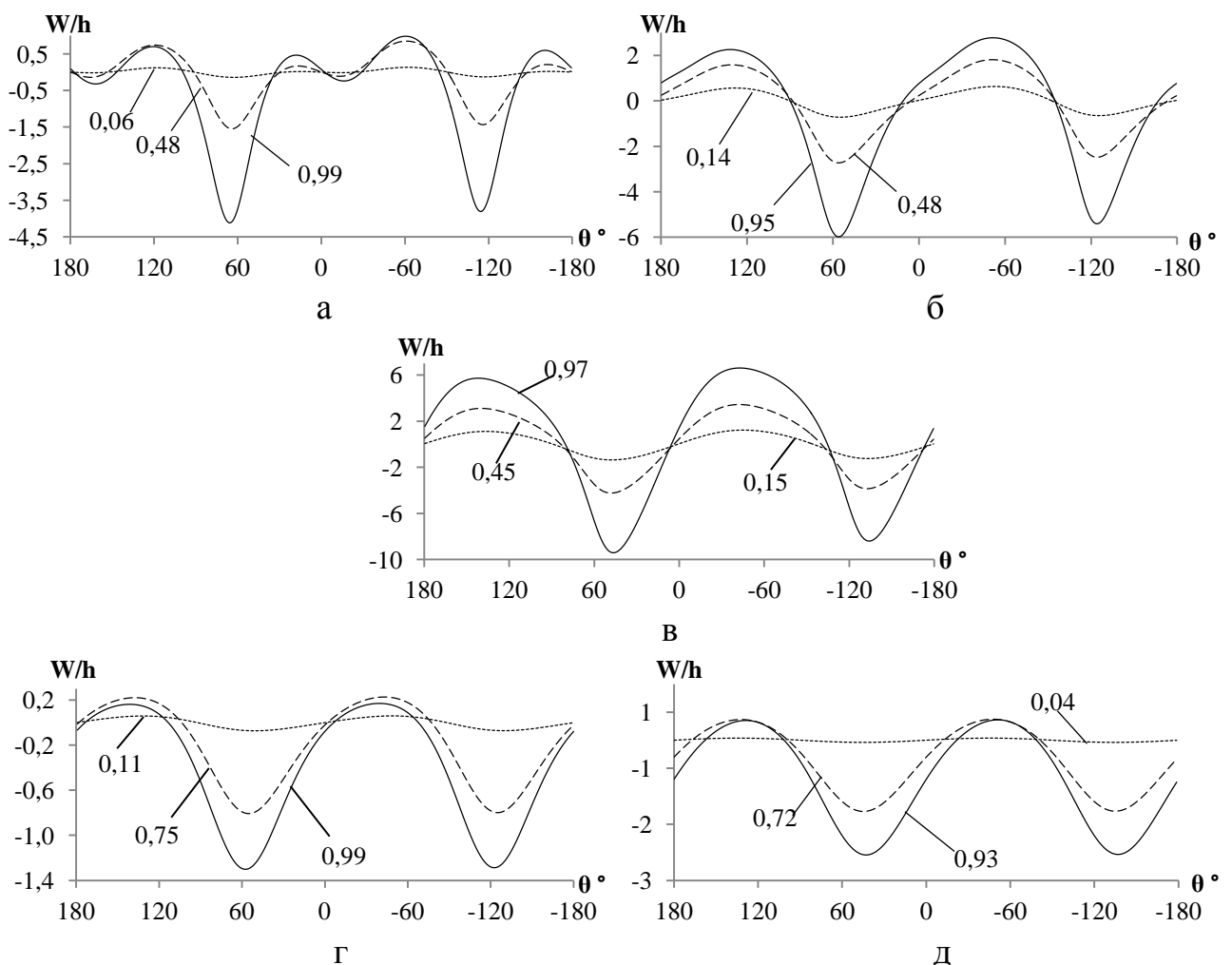
а – $r/R = 0,53$, $L/R = 2$, $M_K/M_{ГР} = 0,89$; б – $r/R = 0,53$, $L/R = 3,9$, $M_K/M_{ГР} = 0,95$
 в – $r/R = 0,53$; $L/R = 6,7$; $M_K/M_{ГР} = 0,97$; г – $r/R = 0,13$; $L/R = 0,5$; $M_K/M_{ГР} = 0,99$

Рисунок 4.22 – Відносні переміщення верхнього краю оболонки

На рис. 4.23 представлено прогин w оболонки на кромці отвору, який вважається позитивним усередину оболонки в локальній системі координат

(рис. 4.19). Числа, вказані для кожної кривої, означають рівень навантаження відносно граничного його значення для кожної оболонки. Для усіх виконаних варіантів розрахунку спостерігається переважний прогин (випучення) оболонки назовні, причому зона максимального прогину завжди знаходиться у верхній частині контуру отвору, майже не зміщуючись в процесі навантаження.

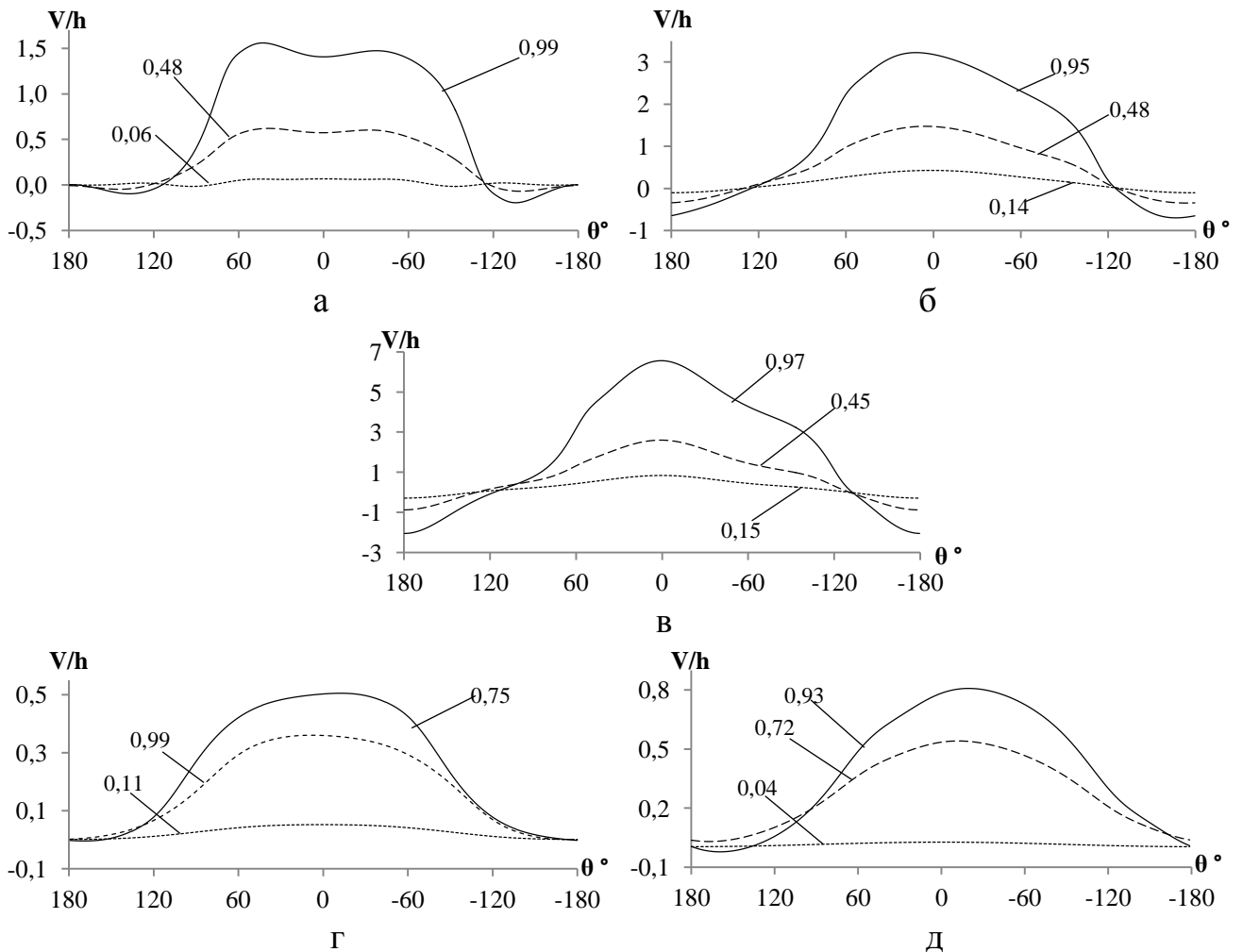
Найбільші прогини усередину оболонки (вм'ятини) також розташовані у верхній частині отвору, але по іншу сторону від вертикальної площини симетрії оболонки.



а – $r/R = 0,53$; $L/R = 2$; б – $r/R = 0,53$; $L/R = 3,9$; в – $r/R = 0,53$; $L/R = 6,7$;
 г – $r/R = 0,13$; $L/R = 0,5$; д – $r/R = 0,13$; $L/R = 2$

Рисунок 4.23 – Відносні прогини на межі отвору

У процесі навантаження зони з максимальною амплітудою вм'ятин можуть переміщатися як уздовж контуру, так і віддалятися від межі отвору. Зі збільшенням довжини оболонок картина зміни прогинів стає ближче до гармонійної і кососиметричної. Амплітудні значення прогинів істотно зростають вже при величинах крутного моменту, в середній частині діапазону навантаження і досягають близько декількох товщин. Слід підкреслити, що отримані тут результати якісно збігаються з експериментальними даними [11], отриманими методом голографічної інтерферометрії для усіх трьох компонентів переміщень межі отвору (рис. 4.23 – 4.25).

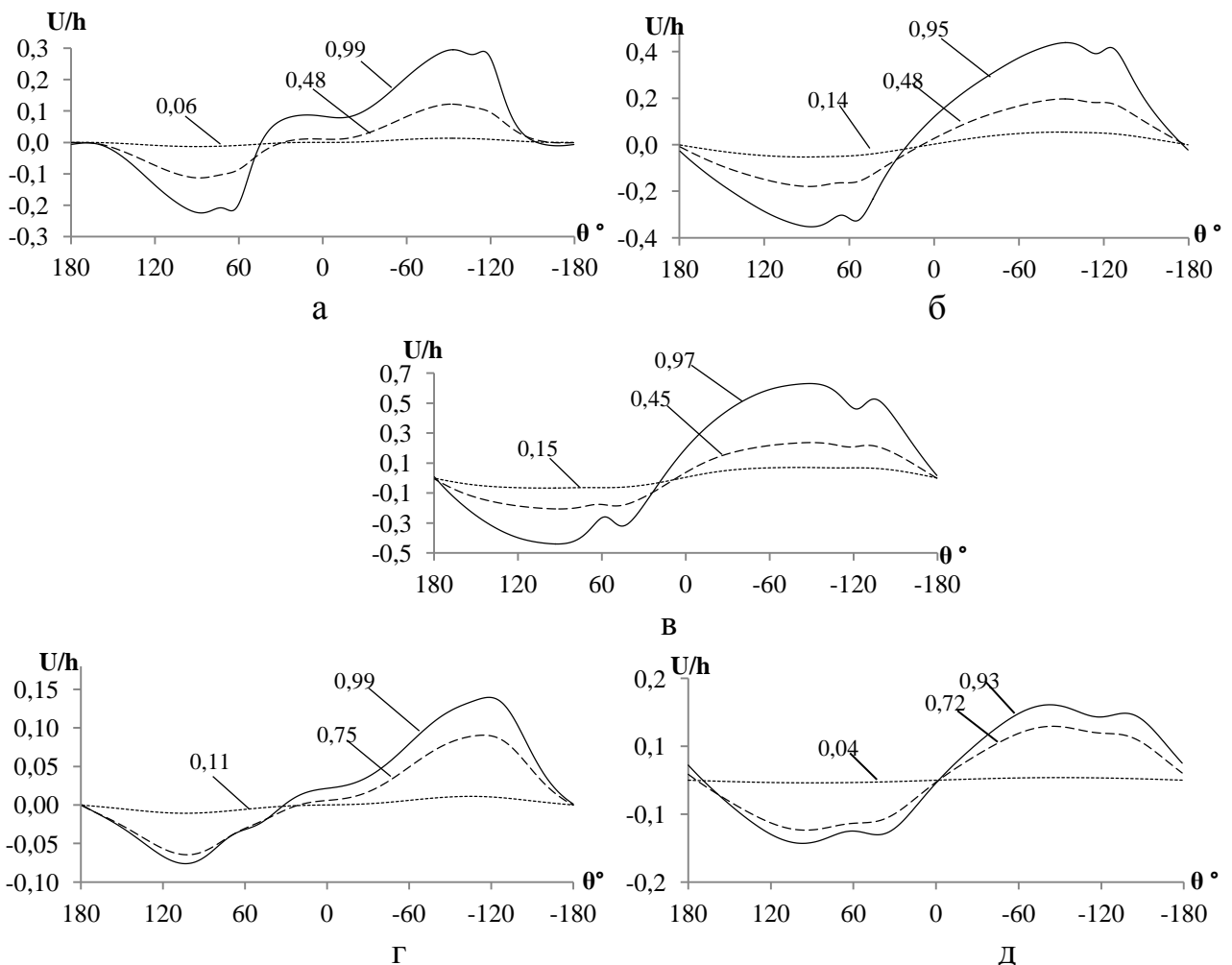


а – $r/R = 0,53; L/R = 2$; б – $r/R = 0,53; L/R = 3,9$; в – $r/R = 0,53; L/R = 6,7$;

г – $r/R = 0,13; L/R = 0,5$; д – $r/R = 0,13; L/R = 2$

Рисунок 4.24 – Відносні окружні переміщення на межі отвору в розгортці

Як і слід було чекати, максимальні окружні переміщення, величина яких має порядок однієї або декількох товщин, як правило, спостерігаються у верхній точці контуру отвору (рис. 4.24). У нижній частині отвору переміщення v або близькі до нуля (рис. 4.24 г), або можуть бути навіть негативними (рис. 4.24 а, б, в, д), тобто можуть бути спрямовані убік, протилежну до дії крутного моменту. Такий випадок отриманий і в експерименті [11]. У початковій стадії навантаження залежності окружних переміщень близькі до симетричних, при зростанні навантаження симетрія порушується.



а – $r/R = 0,53$; $L/R = 2$; б – $r/R = 0,53$; $L/R = 3,9$; в – $r/R = 0,53$; $L/R = 6,7$;
 г – $r/R = 0,13$; $L/R = 0,5$; д – $r/R = 0,13$; $L/R = 2$

Рисунок 4.25 – Відносні осьові переміщення на межі отвору

Залежності осьових переміщень контуру отвору в розгортці від координати θ° для початкових навантажень кососиметричні (рис. 4.25), але у міру збільшення M_k або зменшення відношення довжини оболонки до радіусу отвору (рис. 4.25 а, г) ця властивість порушується. У другій половині від повного діапазону навантаження осьові переміщення на межі отвору істотно зростають і стають порівняними за величиною з товщиною оболонки, особливо для великих отворів (рис. 4.25 в).

На рис. 4.26 показані залежності, що ілюструють зміну величини і місця розташування позитивних w_{\max}^+ і негативних w_{\max}^- , узятих по модулю максимальних прогинів контуру великого отвору ($r/R = 0,53$) оболонок різної довжини.

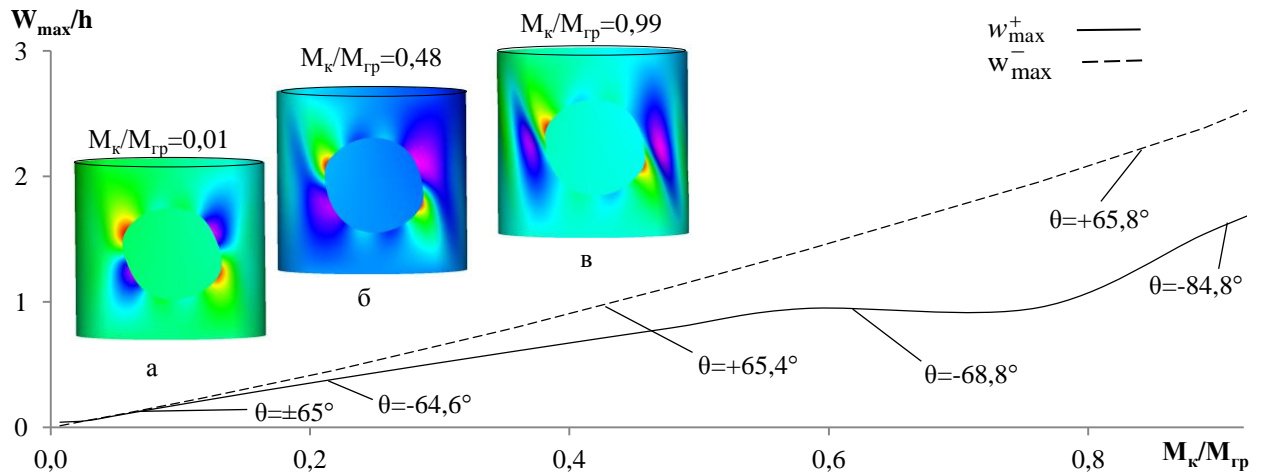
Точка прогину на випученні w_{\max}^- розташована на кромці отвору в усіх розглянутих випадках. Для $L/R = 2$ координати точок з переміщеннями w_{\max}^+ і w_{\max}^- при малих навантаженнях дорівнюють $\theta = +65^\circ$ і $\theta = -65^\circ$ відповідно, при збільшенні навантаження на усіх етапах навантаження змінює свою координату θ° незначно.

Максимальні прогини всередину оболонки w_{\max}^+ із зростанням крутного моменту змінюють як окружну, так і радіальну координати, їх зона відходить від контуру отвору і при $M_k/M_{гр} = 0,99$ прогини w_{\max}^+ розташовані в точці з координатою $\theta = -84,8^\circ$ на відстані від отвору $r'/r = 1,3$, де r' – поточна координата.

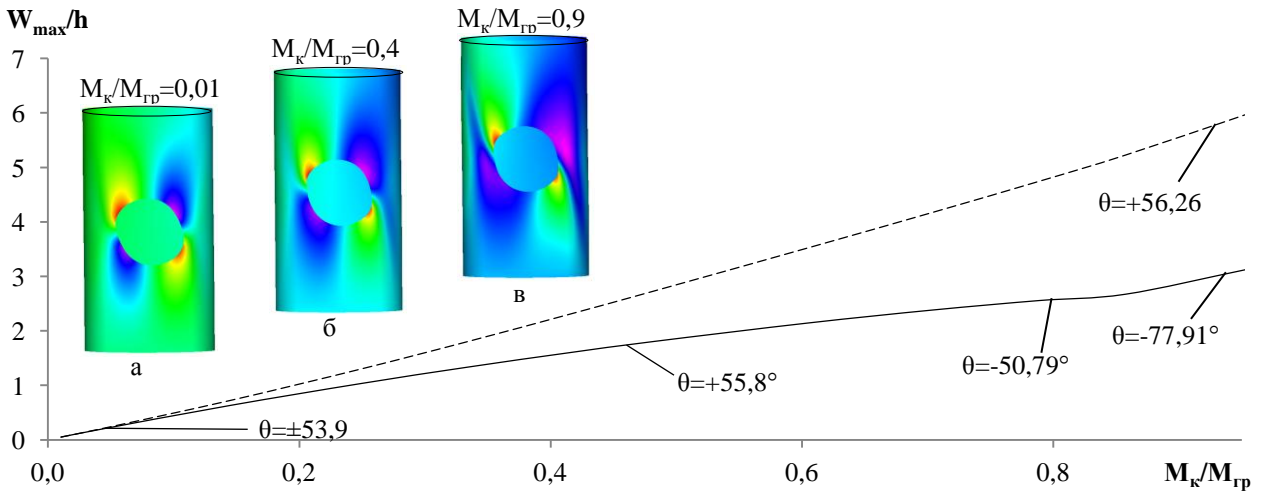
Для більш довгих оболонок $L/R = 3,9$ і $L/R = 6,7$ точка з w_{\max}^- незначно рухається по колу, із зростанням навантаження. У разі $L/R = 3,9$ максимум зрушується на 3° в напрямі $+\theta$, а у разі $L/R = 6,7$ на 7° в напрямі $-\theta$. Переміщення точок максимального прогину всередину оболонки w_{\max}^+ в радіальному напрямі спостерігається при навантаженнях, близьких до граничних ($M_k/M_{гр} = 0,95 \div 0,97$). При цьому положення вказаних точок визначається як і при $L/R = 2$ радіальною координатою $r'/r = 1,3$.

Зміни кутових координат для навантажень, що змінюються, показані на рисунку. Тут також представлені картини прогинів на фасадній стороні оболонок. Поля червоного кольору відповідають максимальним прогинам оболонок назовні (позитивні переміщення), фіолетового – максимальним прогинам усередину (негативні переміщення). Тут, і на подальших рисунках, негативним переміщенням відповідають зони фіолетового, синього, блакитного, зеленого і жовтого кольорів, позитивним переміщенням – червоний колір. Аналіз представлених картин показує, що розподіл прогинів на відміну від лінійного розв'язку істотно залежить і від рівня навантаження, і від довжини оболонок. При зростанні навантаження область прогинів збільшується, зростають їх амплітуди. Зменшення довжини оболонок збільшує значущість крайових умов.

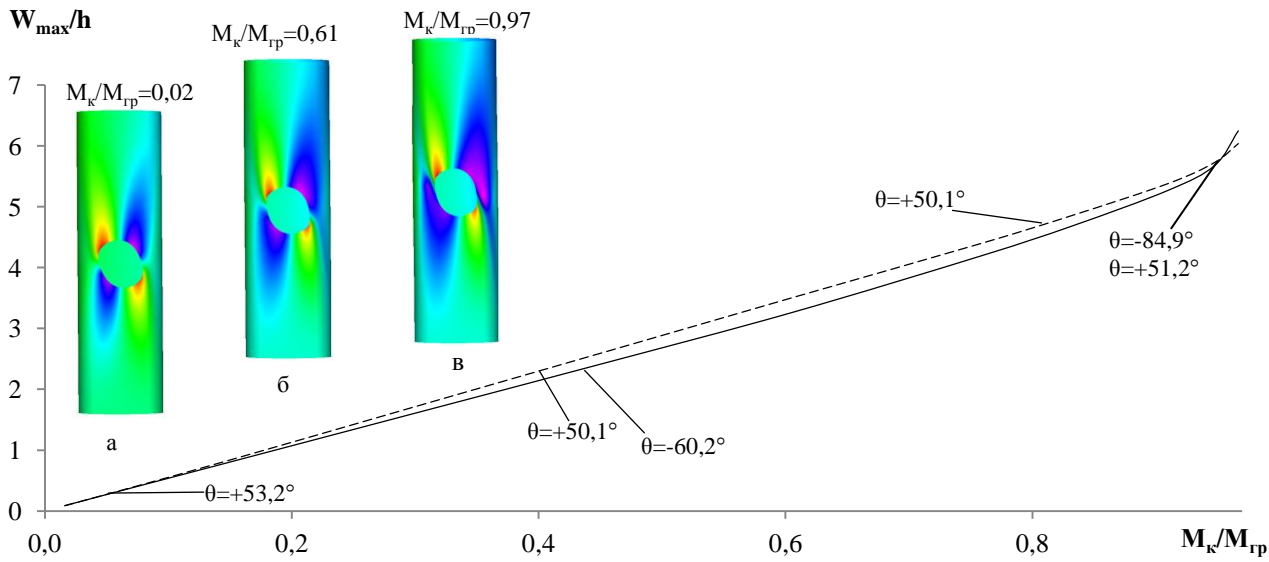
Картини тангенціальних переміщень u і v для оболонки з параметрами $r/R = 0,53$, $L/R = 2$ показані на рис. 4.27 – 4.28. Розподіл u і v для інших довших оболонок з великим отвором відрізняється незначно, тому тут не наводиться. Фіолетовий колір на рис. 4.27 відповідає максимальним позитивним окружним переміщенням, по напрямку збіжним з напрямом крутного моменту, а на рис. 4.28 – максимальним позитивним подовжнім переміщенням, спрямованим вгору. При невеликих навантаженнях (рис. 4.27 а) розподіл близький до симетричного, в другій половині діапазону навантаження симетричність спотворюється. Картина подовжніх переміщень спочатку близька до антисиметричної (рис. 4.28 а), але зростання навантаження також призводить до втрати цієї властивості (рис. 4.28 б, в). Розвиток і зміна розподілу тангенціальних переміщень u і v при зростанні навантаження відбувається істотно повільніше, ніж прогинів w .



a



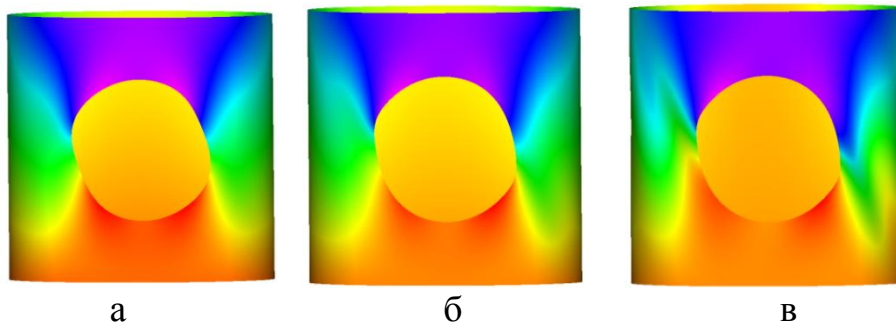
б



в

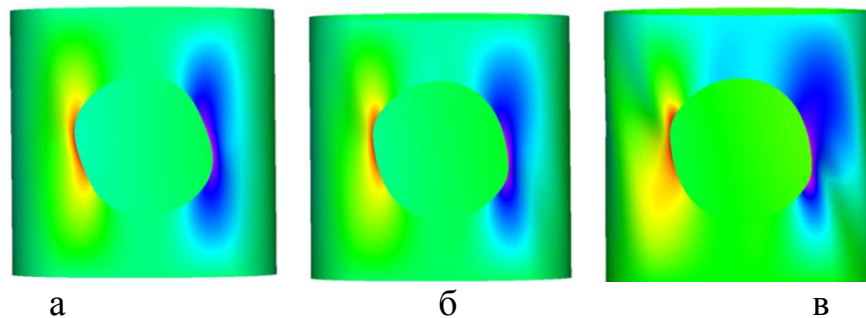
a – $L/R = 2$; б – $L/R = 3,9$; в – $L/R = 6,7$

Рисунок 4.26 – Залежність максимальних позитивних і негативних відносних прогинів контуру отвору від рівня навантаження і загальні картини розвитку прогину оболонок, $r/R = 0,53$



а – $M_k/M_{gp} = 0,01$; б – $M_k/M_{gp} = 0,48$; в – $M_k/M_{gp} = 0,99$

Рисунок 4.27 – Картини розвитку окружних переміщень, $r/R = 0,53$, $L/R = 2$



а – $M_k/M_{gp} = 0,01$; б – $M_k/M_{gp} = 0,48$; в – $M_k/M_{gp} = 0,99$

Рисунок 4.28 – Картини розвитку осьових переміщень, $r/R = 0,53$, $L/R = 2$

На рис. 4.29 представлені такі ж, як на рис. 4.26 залежності позитивних і негативних максимальних прогинів, розподіли радіальних переміщень поверхні оболонки при зростанні навантаження, але для вчетверо меншого отвору.

На початковому етапі навантаження оболонки з $L/R = 0,5$, прогини всередину і назовні оболонки, розташовані симетрично ($\theta = \pm 49,5^\circ$) відносно вертикальної утворюючої, що проходить через центр отвору.

У міру збільшення відношення до $M_k/M_{gp} = 0,99$ точка максимального прогину w_{\max}^- переміщається уздовж окружності майже на 10° ($\theta = +58,7^\circ$).

Точка максимального прогину, спрямованого всередину оболонки (w_{\max}^+), знаходиться на кромці отвору до $M_k/M_{gp} = 0,75$, далі w_{\max}^+ віддаляється від кромки отвору, при цьому розвиваються додаткові хвилі прогинів на бічній поверхні оболонки.

До $M_k/M_{гр} = 0,99$ точка прогину w_{max}^+ зміщується до серединного перерізу оболонки ($\theta = +88^\circ$), віддаляючись від кромки отвору ($r/r = 2,4$).

Картина прогинів у передграничному стані складається з восьми похилих хвиль, що досягають країв оболонки, а по окружності затухаючих до $\theta = \pm 90^\circ$. Залежності максимальних прогинів w_{max}^- і w_{max}^+ від навантаження для оболонки з $L/R = 2$ показані на рис. 4.29. На відміну від коротшої оболонки (рис. 4.30) w_{max}^- міняє напрям переміщення, одночасно рухається однонаправлено.

Загальний вигляд розвитку тангенціальних переміщень представлений на рис. 4.31 – 4.34. Як випливає з рис. 4.31 б і рис. 4.33 б, для оболонки з $L/R = 0,5$ процес передграничного формування хвилеутворення починається задовго до вичерпання несучої здатності оболонки. В цілому картини розвитку полів переміщень на рис. 4.31 – 4.34 демонструють динаміку нелінійних змін, особливо при навантаженнях, близьких до граничних.

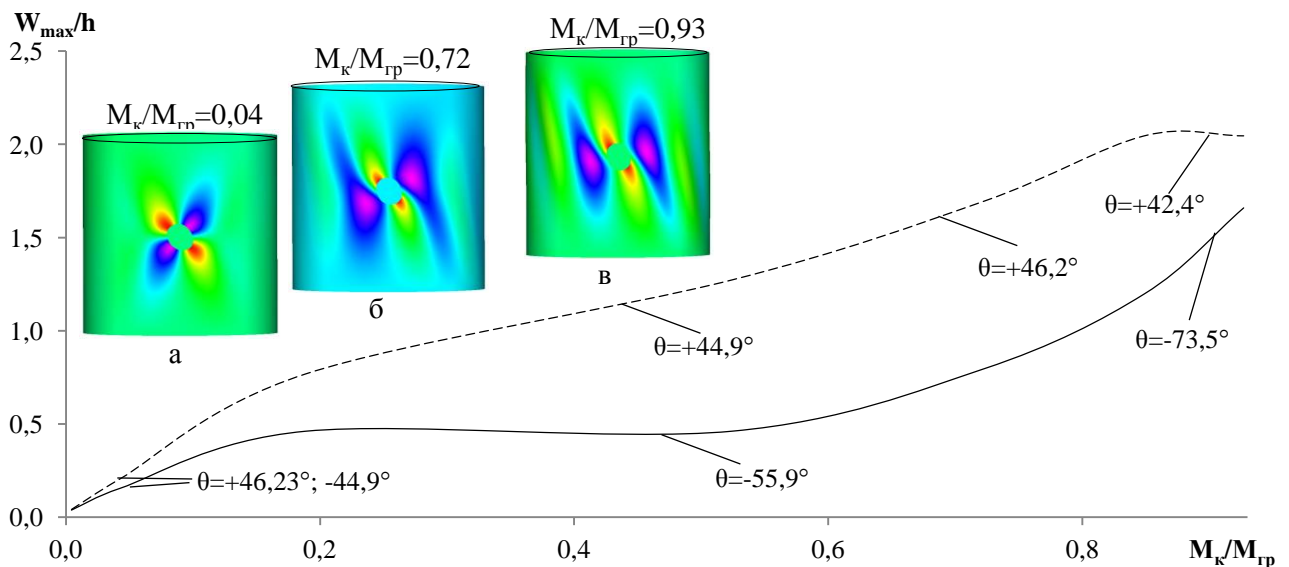


Рисунок 4.29 – Залежність максимальних позитивних і негативних відносних прогинів контуру отвору від рівня навантаження і загальні картини розвитку прогину оболонок, $r/R = 0,13$, $L/R = 2$

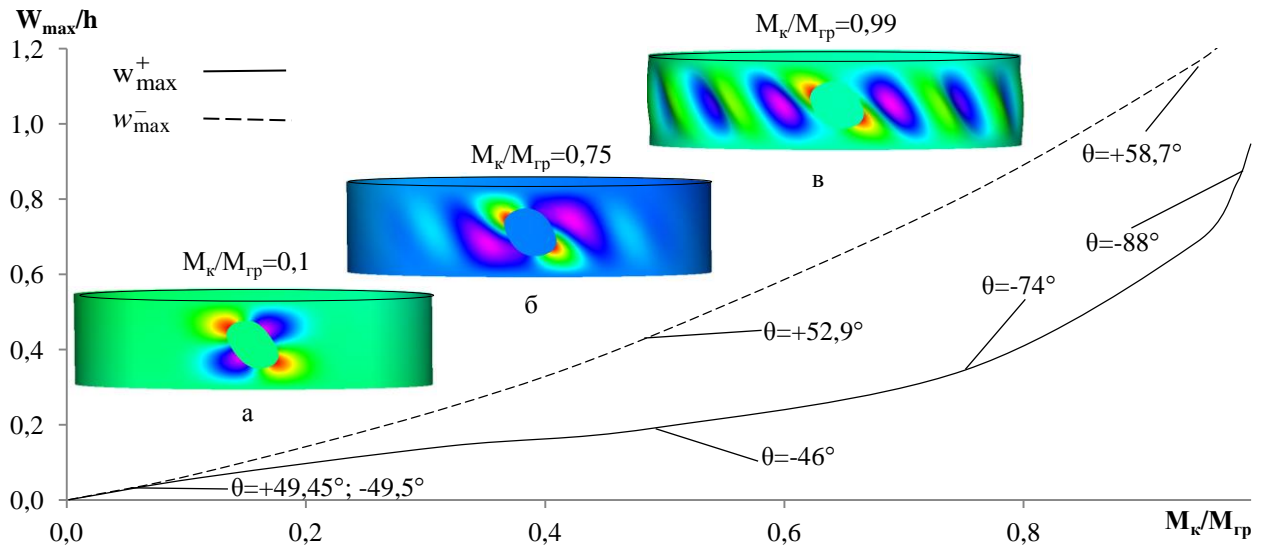


Рисунок 4.30 – Залежність максимальних позитивних і негативних відносних прогинів контуру отвору від рівня навантаження і загальні картини розвитку прогину оболонок, $r/R = 0,13$, $L/R = 0,5$

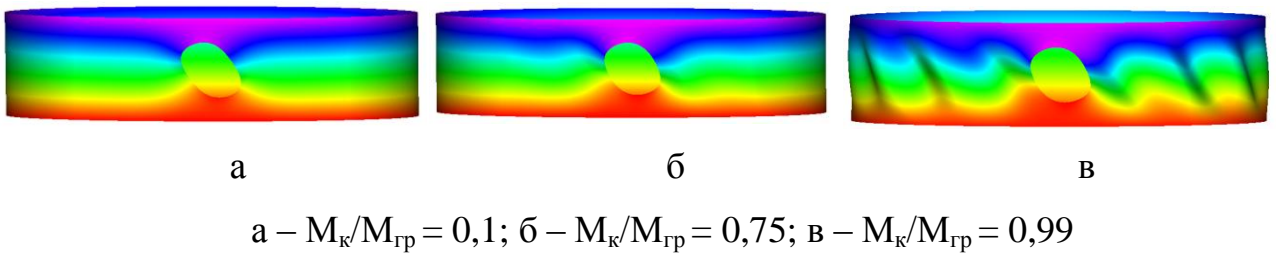


Рисунок 4.31 – Картини розвитку окружних переміщень, $r/R = 0,13$, $L/R = 0,5$

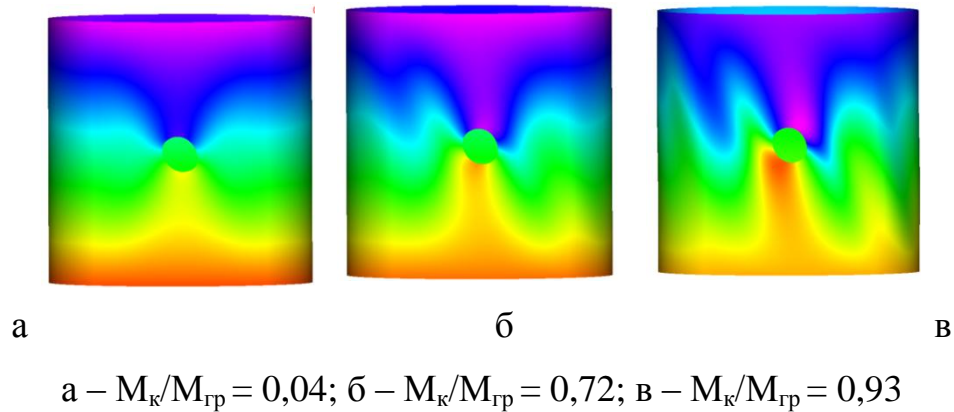


Рисунок 4.32 – Картини розвитку окружних переміщень, $r/R = 0,13$, $L/R = 2$

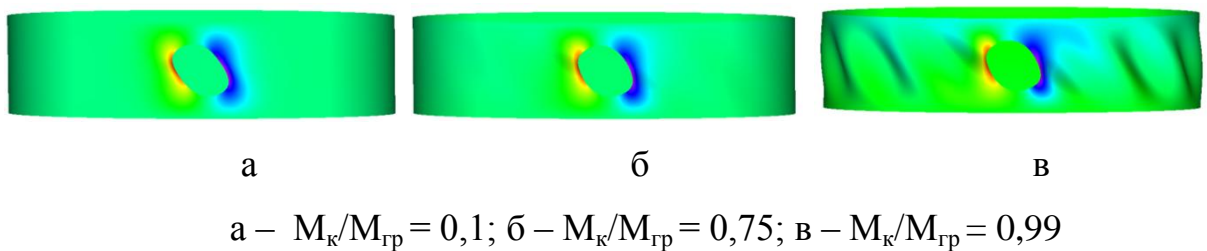
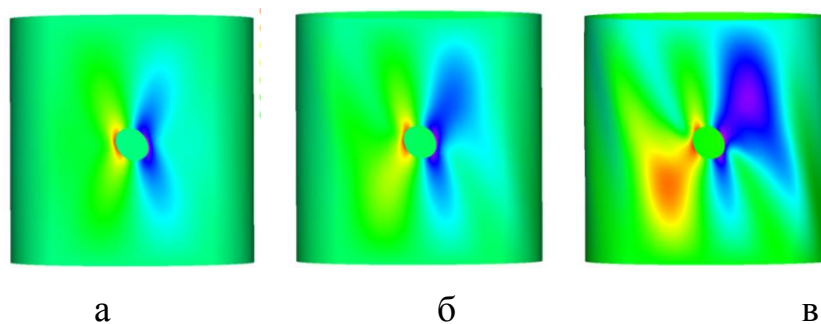


Рисунок 4.33 – Картини розвитку осьових переміщень, $r/R = 0,13$, $L/R = 0,5$



а – $M_k/M_{гр} = 0,04$; б – $M_k/M_{гр} = 0,72$; в – $M_k/M_{гр} = 0,93$

Рисунок 4.34 – Картини розвитку осьових переміщень, $r/R = 0,13$, $L/R=2$

Аналіз полів переміщень показав, що компонентні поля тангенціальних і радіальних переміщень серединної поверхні оболонок розвиваються при навантаженні крутним моментом, і змінюють, на відміну від лінійного аналізу, свою топологію. Зона переміщень біля отвору, що з'являється при початковому навантаженні, розширюється при зростанні навантаження і для крутних моментів, близьких до граничних, може поширюватися по самі краї оболонки. Зона максимальних прогинів (випучин), спрямованих назовні, яка співпадає із зоною концентрації напружень, завжди знаходиться на контурі отвору, обмежено переміщаючись уздовж кромки при зміні крутного моменту. Навантажуваний крайовий переріз оболонки здійснює при зростанні крутного моменту, складний рух з переміщеннями і поворотами по усіх просторових ступенях свободи.

4.4 Висновки до розділу

Проведено геометрично нелінійний МСЕ-аналіз напруженого стану циліндричних оболонок скінченних довжин, ослаблених одним круговим отвором, при крученні. Аналіз виконаний у вигляді систематичного чисельного двопараметричного експерименту на множині довжин оболонок і розмірів отворів. Досліджено вплив урахування геометричної нелінійності при розрахунку на міцність в задачах про визначення концентрації напружень в оболонках. Показано, що поля напружень і переміщень, а також зони концентрації напружень трансформуються з ростом навантаження і змінюють свою топологію, на відміну

від лінійного МСЕ-розв'язку. Досліджена концентрація напружень, що виникає біля отворів, побудовані залежності ККН від величини навантаження на всьому діапазоні до граничних значень крутних моментів для різних комбінацій параметра довжини оболонки L/R і параметра величини отвору r/R . Отримано результат, що урахування геометричної нелінійності дозволяє визначати змінність коефіцієнта концентрації напружень у процесі навантаження. На відміну від лінійної постановки задачі, для якої k_t не залежить від навантаження, урахування нелінійності показує його зростання з ростом навантаження на десятки відсотків. Показано, що лінійний МСЕ-розв'язок придатний для визначення напруженого стану тільки для довгих оболонок з малими отворами. У випадку немалих отворів, навіть при великих довжинах вказаний розв'язок може використовуватися на початковому етапі навантаження в обмеженому діапазоні навантажень, який суттєво залежить від геометричних розмірів оболонки і отвору.

Можна зробити висновок, що для правильної оцінки міцності конструкції при розрахунку необхідно враховувати геометричну нелінійність деформування.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ ДО РОЗДІЛУ 4

1 Kolodiaznyi A. The influence of the deformation nonlinearity on stress concentration in cylindrical shells with holes under torsion / A. Kolodiaznyi, M. Mednikova // *Materials Science*, Vol. 968, 2019. PP. 548 – 559.

2 Колодяжний А. П. Трехмерные поля перемещений при кручении цилиндрических оболочек с отверстием / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // *Вісник Дніпропетровського університету. Сер. : Механіка неоднорідних структур.* – 2016. – Вип. 1(20). – С. 21 – 37.

3 Колодяжний А. П. Эффекты влияния отверстия на устойчивость цилиндрических оболочек при кручении. Численные и модельные эксперименты / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: Тези доп. II міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка В. І. Моссаковського, 10 – 12 жовтня 2019 р. – Дніпро, 2019.* – С. 165.

4 Колодяжний А. П. Геометрически нелинейный анализ напряженного состояния цилиндрических оболочек с отверстием при кручении / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // *Актуальні проблеми інженерної механіки : Тези доп. VI міжнар. наук.-практ. конф., 20 – 24 травня 2019 р. – Одеса, 2019.* – С. 364 – 365.

5 Колодяжний А. П. Дослідження переміщень при крученні циліндричних оболонок з отвором / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // *Актуальні проблеми інженерної механіки : Тез. доп. IV міжнар. наук.-практ. конф., 16 – 19 травня, 2017 р. – Одеса, 2017.* – С. 70 – 71.

6 Колодяжний А. П. Концентрация напряжений в оболочечных конструкциях с отверстиями при кручении / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // *Космические технологии: настоящее и будущее : Тез. докл. 6-й междунар. конф., 23 – 26 мая 2017 г. – Днепр, 2017.* – С. 29.

7 Колодяжний А. П. О влиянии нелинейного деформирования на концентрацию напряжений в цилиндрических оболочках, ослабленных круговым отверстием / А. П. Колодяжний, М. А. Медникова // *Динаміка, міцність та*

модельовання в машинобудуванні : Тези доп. I міжнар. наук.-техн. конф., 10 – 14 вересня 2018 р. – Харків, 2018. – С. 33.

8 Лурье А. И. Концентрация напряжений в области кругового отверстия на поверхности кругового цилиндра /А. И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1946. – Т. 10, № 3, – С. 307 – 406.

9 Гузь А. Н. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов и др. – Киев, 1980. – 636 с.

10 Houghton D. S. The effects of curvature on the stress concentration around holes in shells / D. S. Houghton and A. Rothwell // College of Aeronautics, Rpt. – No 156. –1962. – 20 p.

11 Балалов В. В. Определение перемещений контура выреза в цилиндрических оболочках при кручении методом голографической интерферометрии / В. В. Балалов, В. С. Писарев, В. П. Щепинов, В. В. Яковлев // Прикладная механика – 1988. – Т. 24, № 7. – С. 63 – 69.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертація є закінченою науково-дослідною роботою, у якій розв'язана актуальна наукова задача про визначення напружено-деформованого стану пружних ізотропних тонких циліндричних оболонок скінченних довжин, ослаблених круговим отвором при дії крутного моменту з використанням лінійного та геометрично нелінійного аналізів методу скінченних елементів.

Основними науковими і практичними результатами є:

– Запропоновано алгоритм розробки ефективної скінченно-елементної моделі для визначення швидкозмінних напружено-деформованих станів у циліндричних оболонках з отвором, заснований на застосуванні адаптивних сіток в сукупності зі спеціально сформульованими методами контролю точності.

– Проведено дослідження напружено-деформованого стану, зокрема коефіцієнту концентрації напружень тонких оболонок в широкому діапазоні скінченних довжин та розміру отворів в лінійній постановці методом скінченних елементів. Виявлено, що для невеликих отворів вкорочення оболонки приводить до зниження рівня концентрації напружень починаючи з певної довжини, для великих отворів зменшення довжини оболонки завжди веде до його зниження.

– Проведено дослідження впливу нелінійності деформацій на напружено-деформований стан та коефіцієнт концентрації напружень в процесі навантаження оболонки. Для оболонок скінченних довжин збурюючі частини полів напружень і переміщень, що вносяться отвором, при збільшенні рівня навантаження зростають і розповсюджуються навколо отвору досягаючи її країв. Проаналізовано змінність напруженого стану уздовж границі отвору та в зоні між отвором та краями оболонки із зростом навантаження. Отримано, що зони концентрації напружень переміщуються уздовж отвору, а в крайовому перерізі оболонки змінюється характер розподілу напружень і зростають їх амплітудні значення. Виявлено, що коефіцієнт концентрації напружень може зростати на десятки відсотків в певних частинах повного діапазону навантаження, в залежності від комбінації розмірів отвору і довжини оболонки.

– Порівняння розв’язків, отриманих методом скінченних елементів у лінійній і геометрично нелінійній постановках показало, що лінійний аналіз застосовний тільки на початковому етапі навантаження в обмеженому діапазоні навантажень, величина якого суттєво залежить від геометричних розмірів оболонки та отвору. Тільки у випадку довгих оболонок, послаблених малим отвором, лінійний аналіз дозволяє одержати задовільні результати практично на всьому діапазоні навантаження до передграничних значень.

– Досліджено межі застосовності широкоживаної лінійної моделі А. І. Лур’є в задачі про визначення рівня концентрації напружень в оболонках скінченних довжин, ослаблених круговим отвором в широкому діапазоні його розмірів. Отримано, що модель може застосовуватися для оболонок великих довжин з малими отворами, при цьому оболонка повинна бути довше певної довжини L^* , та непридатна для оболонок з немалими отворами, навіть при умові їх великої довжини. При застосуванні зазначеного підходу до оболонок з $L/R < L^*/R$ коефіцієнти концентрації напружень можуть бути багаторазово завищені.

Таким чином, для правильної оцінки міцності оболонок скінченних довжин, ослаблених круговим отвором із зростанням навантаження необхідно враховувати геометричну нелінійність деформування при розрахунку.

В результаті проведеної роботи, розроблено рекомендації, щодо отримання достатньо точних розв’язків задачі про визначення рівня концентрації напружень біля кругових отворів в тонкостінних оболонках, які стануть корисними для інженерів. Отримані дані про закономірності розвитку напружень та переміщень біля отвору, дані про залежності коефіцієнта концентрації напружень у процесі навантаження та від зміни довжини оболонки і розміру отвору можуть використовуватися для розробки раціонального підкріплення отвору та дозволять зменшувати вагу несучих конструкцій.

Результати дослідження впроваджені у практиці державного підприємства «Конструкторське Бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля при проєктуванні ракети космічного призначення, зокрема адаптеру та головного обтічника в рамках роботи за міжнародним контрактом за темою «АКРК-2».

ДОДАТОК А
ДОКУМЕНТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник Генерального конструктора
з наукової та навчальної роботи
ДП «Конструкторське бюро «Південне»
доктор технічних наук



 В.С. Шеховцов

10 2020 р.

Акт

про впровадження результатів наукових досліджень за темою
«Вплив кругових отворів на напружено-деформований стан циліндричних
оболонок скінченної довжини при крученні»

Комісія в складі: І.Ф. Ларіонова, В.М. Сіренка, Д.В. Клименка склала цей акт про те, що метод вирішення та результати чисельного аналізу задачі про визначення напружено-деформованого стану оболонок, послаблених круговим отвором, з використанням відповідного програмного забезпечення на основі методу скінченних елементів, що представлені у дисертаційній роботі на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Меднікової Маргарити Анатоліївни «Вплив кругових отворів на напружено-деформований стан циліндричних оболонок скінченної довжини при крученні», було впроваджено та використано у науково-виробничій діяльності ДП «Конструкторське бюро «Південне» для дослідження напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій ракетної техніки, зокрема адаптеру і головного обтічника за темою «АКРК-2».

Члени комісії:

Начальник розрахунково-
теоретичного комплексу,
кандидат технічних наук



В.М. Сіренко

Головний науковий співробітник,
кандидат технічних наук



І.Ф. Ларіонов

Начальник відділу
міцності і навантажень,
кандидат технічних наук



Д.В. Клименко

Вчений секретар
ДП «КБ «Південне»,
кандидат технічних наук



Л. П. Потапович

ДОДАТОК Б
ДОВІДКОВІ ДАНІ ПРО КОЕФІЦІЄНТИ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У
ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ОБОЛОНКИ ПРИ ДІЇ
КРУЧЕННЯ

Довідкові дані про коефіцієнти концентрації напружень у залежності від геометричних параметрів оболонки при дії кручення

Таблиця 3.1

Залежності коефіцієнта концентрації напружень (k_t) від параметра довжини оболонки (L/R) при фіксованому β

β	R/h	r/R	L/R	k_t
0,3	80	0,053	0,2	3,17
			0,5	4,64
			1,0	5,18
			2,0	5,31
			3,9	5,34
			6,7	5,39
			11,3	5,35
			20,7	5,37
0,4	163	0,053	0,2	3,40
			0,5	5,45
			1,0	6,19
			2,0	6,38
			3,9	6,43
			6,7	6,50
			11,3	6,45
			20,7	6,46
0,46	80	0,08	0,2	2,89
			0,5	4,71
			1,0	6,13
			2,0	6,51
			3,9	6,63
			6,7	6,65
			11,3	6,65
			20,7	6,65
0,7	163	0,08	0,2	3,1
			0,5	5,7
			1,0	7,8
			2,0	8,5
			3,9	8,7
			6,7	8,7
			11,3	8,7
			20,7	8,7
0,7	367	0,05	0,2	3,9
			0,5	6,9
			1,0	8,2
			2,0	8,6
			3,9	8,7
			6,7	8,8
			11,3	8,7
			20,7	8,7

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
0,77	80	0,13	0,5	4,51
			1,0	7,57
			2,0	9,22
			3,9	9,83
			6,7	9,95
			11,3	9,98
			16,0	9,98
			20,7	9,98
0,77	500	0,053	0,2	4,16
			0,5	7,68
			1,0	9,33
			2,0	9,80
			3,9	9,96
			6,7	10,04
			11,3	9,98
			20,7	9,99
1,0	417	0,08	0,2	3,50
			0,5	7,16
			1,0	11,22
			2,0	12,91
			3,9	13,49
			6,7	13,61
			11,3	13,63
			20,7	13,63
1,0	938	0,053	0,2	4,68
			0,5	9,33
			1,0	12,30
			2,0	13,26
			3,9	13,55
			6,7	13,66
			11,3	13,62
			20,7	13,65
1,1	163	0,13	0,5	5,16
			1,0	9,36
			2,0	12,50
			3,9	13,88
			6,7	14,18
			11,3	14,24
			20,7	14,25
1,2	1200	0,053	0,2	4,82
			0,5	9,93
			1,0	13,73
			2,0	15,02
			3,9	15,40
			6,7	15,53
			11,3	15,51
			20,7	15,56

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
1,3	1500	0,053	0,2	4,90
			0,5	10,39
			1,0	15,09
			2,0	16,80
			3,9	17,34
			6,7	17,49
			11,3	17,47
			20,7	17,52
1,53	80	0,27	1,0	6,49
			2,0	11,76
			3,9	17,68
			6,7	19,69
			11,3	20,15
			16,0	20,22
			20,7	20,24
1,57	338	0,13	0,5	5,45
			1,0	10,59
			2,0	16,55
			3,9	20,00
			6,7	20,82
			11,3	21,00
			20,7	21,04
1,57	938	0,08	0,2	4,03
			0,5	7,68
			1,0	14,62
			2,0	18,89
			3,9	20,59
			6,7	20,93
			11,3	21,01
			20,7	21,04
1,78	1200	0,08	0,2	4,15
			0,5	7,62
			1,0	15,42
			2,0	21,00
			3,9	23,40
			6,7	23,89
			11,3	24,00
			20,7	24,04
1,92	500	0,13	0,5	5,49
			1,0	10,69
			2,0	18,54
			3,9	24,15
			6,7	25,63
			11,3	25,97
			16,0	26,04
			20,7	26,03

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
2,0	1500	0,08	0,2	4,22
			0,5	7,50
			1,0	15,93
			2,0	22,92
			3,9	26,19
			6,7	26,92
			11,3	27,08
			20,7	27,10
2,2	163	0,27	1,0	6,78
			2,0	12,28
			3,9	22,74
			6,7	28,04
			11,3	29,52
			20,7	29,81
2,2	652	0,13	0,5	5,23
			1,0	10,53
			2,0	19,59
			3,9	27,23
			6,7	29,43
			11,3	29,95
			20,7	30,06
2,6	900	0,13	0,5	5,65
			1,0	10,21
			2,0	20,42
			3,9	31,16
			6,7	34,72
			11,3	35,60
			16,0	35,75
			20,7	35,79
2,7	243	0,27	1,0	6,99
			2,0	12,07
			3,9	25,03
			6,7	33,73
			11,3	36,55
			16,0	37,06
			20,7	37,19
			2,7	974
1,0	10,11			
2,0	20,55			
3,9	32,17			
6,7	36,16			
11,3	37,18			
16,0	37,35			
20,7	37,39			

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
2,7	2671	0,08	0,2	4,36
			0,5	7,15
			1,0	16,34
			2,0	27,79
			3,9	34,90
			6,7	36,71
			11,3	37,12
			20,7	37,15
2,8	19	1,0	2,0	16,30
			3,9	25,23
			6,7	35,20
			11,3	41,97
			16,0	42,44
			20,7	42,52
3,0	1200	0,13	0,5	5,76
			1,0	9,81
			2,0	20,75
			3,9	34,88
			6,7	40,29
			11,3	41,71
			16,0	41,95
			20,7	42,02
3,1	80	0,53	2,0	11,02
			3,9	18,96
			6,7	33,14
			11,3	41,31
			16,0	42,93
			20,7	43,39
3,3	1500	0,13	0,5	5,87
			1,0	9,51
			2,0	20,64
			3,9	37,70
			6,7	45,12
			11,3	47,17
			16,0	47,54
			20,7	47,63
3,5	101	0,53	2,0	11,40
			3,9	19,15
			6,7	35,14
			11,3	46,34
			16,0	48,82
			20,7	49,55

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
3,5	406	0,27	1,0	7,88
			2,0	11,69
			3,9	26,66
			6,7	41,72
			11,3	47,99
			16,0	49,16
			20,7	49,49
3,8	500	0,27	1,0	7,47
			2,0	11,59
			3,9	26,83
			6,7	45,01
			11,3	53,58
			16,0	55,80
			20,7	55,28
4,1	144	0,53	2,0	11,95
			3,9	19,48
			6,7	37,50
			11,3	54,55
			16,0	59,14
			20,7	60,54
4,1	577	0,27	1,0	7,55
			2,0	11,54
			3,9	26,83
			6,7	47,18
			11,3	57,72
			16,0	59,91
4,4	163	0,53	2,0	12,13
			3,9	19,63
			6,7	38,13
			11,3	57,58
			16,0	63,25
			20,7	65,01
4,4	652	0,27	1,0	7,61
			2,0	11,53
			3,9	26,72
			6,7	49,01
			11,3	61,54
			16,0	64,18
			20,7	64,98
4,6	80	0,8	2,0	14,81
			3,9	23,70
			6,7	37,61
			11,3	59,24
			16,0	67,36
			20,7	70,02

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
5,1	900	0,27	1,0	7,73
			2,0	11,60
			3,9	26,08
			6,7	53,25
			11,3	72,41
			16,0	77,22
			20,7	78,49
5,4	247	0,53	2,0	12,67
			3,9	20,33
			6,7	39,43
			11,3	67,90
			16,0	78,91
			20,7	82,76
5,4	987	0,27	1,0	7,75
			2,0	11,66
			3,9	25,85
			6,7	54,22
			11,3	75,71
			16,0	81,33
			20,7	83,02
5,7	80	1,0	2,0	19,86
			3,9	34,45
			6,7	50,26
			11,3	78,53
			16,0	96,60
			20,7	103,27
5,9	1200	0,27	1,0	7,77
			2,0	11,84
			3,9	25,19
			6,7	55,95
			11,3	83,08
			16,0	90,94
			20,7	93,10
6,1	139	0,80	2,0	15,66
			3,9	26,08
			6,7	40,20
			11,3	69,91
			16,0	87,41
			20,7	94,97
6,1	313	0,53	2,0	12,93
			3,9	20,93
			6,7	39,73
			11,3	73,35
			16,0	88,88
			20,7	94,82

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
6,6	104	1,0	2,0	20,43
			3,9	35,89
			6,7	53,37
			11,3	84,04
			16,0	108,64
			20,7	120,08
6,6	163	0,8	2,0	15,97
			3,9	26,99
			6,7	40,93
			11,3	72,96
			16,0	93,49
			20,7	103,38
6,6	367	0,53	2,0	13,09
			3,9	21,41
			6,7	39,80
			11,3	76,78
			16,0	96,02
			20,7	103,94
6,6	1500	0,27	1,0	7,81
			2,0	12,11
			3,9	24,44
			6,7	56,97
			11,3	91,76
			16,0	102,81
			20,7	106,45
7,7	500	0,53	2,0	13,40
			3,9	22,44
			6,7	39,78
			11,3	81,82
			16,0	109,88
			20,7	123,06
8,2	163	1,0	2,0	21,33
			3,9	38,15
			6,7	59,20
			11,3	91,90
			16,0	127,20
			20,7	150,00
8,9	300	0,8	2,0	16,66
			3,9	28,87
			6,7	45,32
			11,3	78,84
			16,0	114,20
			20,7	138,31

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
9,1	700	0,53	2,0	13,74
			3,9	23,74
			6,7	40,09
			11,3	85,15
			16,0	124,04
			20,7	145,86
10,3	900	0,53	2,0	14,01
			3,9	24,71
			6,7	40,61
			11,3	86,10
			16,0	132,99
			20,7	163,60
11,6	326	1,0	2,0	22,63
			3,9	41,65
			6,7	68,63
			11,3	104,26
			16,0	147,46
			20,7	191,44
11,6	510	0,8	2,0	17,26
			3,9	30,30
			6,7	50,34
			11,3	83,01
			16,0	125,34
			20,7	166,26
13,3	1500	0,53	2,0	14,53
			3,9	26,31
			6,7	43,31
			11,3	85,21
			16,0	143,53
			20,7	195,50
13,6	700	0,8	2,0	17,58
			3,9	31,17
			6,7	53,50
			11,3	85,88
			16,0	128,90
			20,7	178,34
14,4	500	1,0	2,0	23,38
			3,9	43,75
			6,7	73,56
			11,3	115,58
			16,0	157,21
			20,7	208,64
15,4	900	0,8	2,0	17,87
			3,9	31,86
			6,7	55,73
			11,3	89,31
			16,0	131,06
			20,7	184,47

Продовження таблиці 3.1

β	R/h	r/R	L/R	k_t
17,8	1200	0,8	2,0	18,12
			3,9	32,80
			6,7	57,77
			11,3	94,60
			16,0	134,01
			20,7	189,04
19,3	900	1,0	2,0	24,94
			3,9	46,59
			6,7	79,78
			11,3	134,83
			16,0	178,11
			20,7	228,58
19,9	1500	0,8	2,0	18,31
			3,9	33,46
			6,7	59,35
			11,3	99,26
			16,0	137,04
			20,7	191,02
22,3	1200	1,0	2,0	25,84
			3,9	47,88
			6,7	83,14
			11,3	144,23
			16,0	192,69
			20,7	241,76
24,9	1500	1,0	2,0	26,51
			3,9	48,95
			6,7	85,75
			11,3	150,70
			16,0	205,50
			20,7	254,61

ДОДАТОК В
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ І
ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

СПИСОК
НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ
МЕДНІКОВОЇ МАРГАРИТИ АНАТОЛІЇВНИ

№ п.п	Назва праці	Назва видання та його вихідні відомості, що дозволяють ідентифікувати та відрізнити це видання від усіх інших	Кількість друкованих сторінок	Прізвища співавторів
1	2	4	5	6
1	The influence of the deformation nonlinearity on stress concentration in cylindrical shells with holes under torsion	Materials Science, Vol. 968, 2019. PP. 548 – 559.	12	Kolodiazhnyi A.
2	Контроль точности решения при определении напряженного состояния в ослабленных отверстием цилиндрических оболочках	Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкції – Вип. 29. – 2019. – С. 175 – 187.	13	
3	Напряженное состояние цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием при кручении	Вісник Дніпропетровського університету. Сер.: Механіка. – 2015. – Вип. 19. – Т. 2. – С. 64 – 76.	13	Колодяжный А.П.
4	Трехмерные поля перемещений при кручении цилиндрических оболочек с отверстием	Вісник Дніпропетровського університету. Сер.: Механіка неоднорідних структур. – 2016. – Вип. 1(20). – С. 21 – 37.	17	Колодяжный А.П.
5	Напряжения в тонкой цилиндрической оболочке с круговым отверстием, при кручении	Вісник Дніпровського університету. Сер.: Механіка неоднорідних структур. – 2017. – Вип. 2(21) – С. 55 – 68.	14	Колодяжный А.П.
6	КЭ-моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с отверстием	Человек и космос: Тез. докл. XIX междунар. науч.-практ. конф., 12 – 14 апреля, 2017 г. – Днепр, 2017 – С. 174.	1	Колодяжный А.П.
7	Дослідження переміщень при крученні циліндричних оболонок з отвором	Актуальні проблеми інженерної механіки: Тез. доп. IV міжнар. наук.-практ. конф., 16 – 19 травня, 2017 р. – Одеса, 2017. – С. 70 – 71.	2	Колодяжный А.П.
8	Концентрация напряжений в оболочечных конструкциях с отверстиями при кручении	Космические технологии: настоящее и будущее: Тез. докл. 6-й междунар. Конф., 23 – 26 мая 2017 г. – Днепр, 2017. – С. 29.	1	Колодяжный А.П.

9	О влиянии нелинейного деформирования на концентрацию напряжений в цилиндрических оболочках, ослабленных круговым отверстием	Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні: Тези доп. I міжнар. наук.-техн. конф., 10 – 14 вересня 2018 р. – Харків, 2018. – С. 33.	1	Колодяжний А.П.
12	Про межі застосовності моделі А.І. Лур'є в задачах напружено-деформованого стану оболонок з круговим отвором	Сучасні проблеми механіки та математики: Зб. наук. праць міжнар. наук.-практ. конф., 22 – 25 травня 2018 р. – Львів, 2018. – С. 103 – 104.	2	Колодяжний А.П.
13	Геометрически нелинейный анализ напряженного состояния цилиндрических оболочек с отверстием при кручении	Актуальні проблеми інженерної механіки: Тези доп. VI міжнар. наук.-практ. конф., 20 – 24 мая 2019 г. – Одеса, 2019. – С. 364 – 365.	2	Колодяжний А.П.
14	Напряженное состояние в цилиндрических оболочках конечной длины с отверстием /	Космические технологии: настоящее и будущее: Тез. докл. 7-й междунар. конф., 21 – 24 мая 2019 г. – Днепр, 2019. – С. 38.	1	Колодяжний А.П., Сиренко В.Н.
15	Эффекты влияния отверстия на устойчивость цилиндрических оболочек при кручении. Численные и модельные эксперименты	Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: Тези доп. II міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка В.І. Моссаковського, 10 – 12 жовтня 2019 р. – Дніпро, 2019. – С. 165.	1	Колодяжний А.П.

Апробація результатів дисертації. Дисертація в цілому розглядалася на науково-технічній раді Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне ім. М.К. Янгеля».

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на XIX міжнародній науково-практичній конференції «Людина і Космос» (Дніпро, 2017 р.); I міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2018 р.); міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки і математики» (Львів, 2018 р.); IV, VI міжнародних науково-практичних конференціях «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2017 р., 2019 р.); VI, VII міжнародних конференціях «Космічні технології: сьогодні і майбутнє» (Дніпро, 2017 р., 2019 р.); VII міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Запоріжжя, 2019 р.); II міжнародній науково-технічній конференції пам'яті академіка В. І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпро, 2019 р.).