

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СТЕПАНОВА НАТАЛІЯ ІВАНІВНА

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ
ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ
СИЛОВИХ ВПЛИВІВ,
ВКЛЮЧЕНЬ ТА РОЗРІЗІВ У ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

01 – фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело

 Н. І. Степанова

Науковий керівник

Гук Наталія Анатоліївна,
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2019

АНОТАЦІЯ

Степанова Н. І. Обернені задачі ідентифікації силових впливів, включень та розрізів у тонкій пластині. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, м. Дніпро, 2019.

Дисертаційну роботу присвячено розробці методики виявлення у тонкій пластині, що знаходиться під дією експлуатаційного навантаження, локальних силових впливів та дефектів структури матеріалу у вигляді включень та розрізів шляхом спостереження за напружено-деформованим станом пластини.

Об'єктом дослідження є пружно деформована тонка пластина при частково невідомих параметрах її моделі. Вперше в рамках нелінійної теорії пластин із використанням методу обернених задач побудовано модель деформування спостережуваної пластини при наявності включень, розрізів, дії зосереджених навантажень, місце розташування та властивості яких підлягають визначенню.

В першому розділі проведено огляд літературних джерел за темою дисертаційної роботи та зроблено висновок, що останнім часом спостерігається підвищений інтерес науковців до досліджень в області ідентифікації неоднорідностей у тонких пластинчастих елементах, які входять до складу більшості полегшених інженерних конструкцій. Присутність в тонкостінній системі точкових силових впливів, наявність пошкоджень у вигляді включень або розрізів призводить до концентрації на ділянках з зазначеними особливостями внутрішніх напружень і може привести до передчасного руйнування системи. Тому необхідність мати надійні, ефективні та зручні у використанні методи ідентифікації у

тонкостінних системах локальних силових впливів, дефектів структури у вигляді включень та розрізів, визначення характеристик вказаних особливостей при зміні характеру діючих навантажень визначає актуальність поставленої у дослідженні задачі.

З урахуванням того, що з математичної точки зору задача ідентифікації дефектів у тонких пластинах є оберненою задачею, розглянуто класифікацію обернених задач нелінійної теорії тонкостінних систем, проведено огляд методів розв'язання обернених задач та сучасних підходів до вирішення проблеми ідентифікації силових впливів та дефектів у тонких пластинах.

За результатами аналізу публікацій з теми дисертації сформульовано мету роботи. *Метою дисертаційної роботи* є розробка методу обернених задач стосовно до спостережуваних тонких пластин для визначення невідомих локальних силових впливів, ідентифікації включень та внутрішніх граничних контурів; розвиток числових методів розв'язання обернених задач теорії тонких пластин, дослідження особливостей процесу ідентифікації зосереджених силових впливів, включень та розрізів у тонкій пластині.

У *другому розділі* дисертації задачу ідентифікації силових впливів та дефектів у тонкій пластині сформульовано як обернену задачу. Для опису невідомих оберненої задачі введено характеристичні функції з відповідними областями визначення, що враховують додаткову інформації про кількісні характеристики функцій: 1) функцію, що визначає наявність включень у матеріалі пластини; 2) функцію, яка визначає точки прикладення локальних сил; 3) функцію, що визначає місце розташування вершин розрізу.

Для побудови моделі застосовано варіаційний підхід, що базується на формулюванні повного функціоналу енергії пластини, до якого приєднується додаткова умова, що визначає близькість дійсного та спостережуваного станів пластини, а невідомі параметри моделі описано за допомогою характеристичних функцій. В побудованому функціоналі незалежно варіюються всі невідомі функції задачі в області, яку займає пластина, та на її границях.

У *третьому розділі* запропоновано метод розв'язання поставленої оберненої задачі та алгоритм його реалізації. Вперше застосовано новий числовий метод та ітераційний алгоритм, що поєднують скінченно-елементну дискретизацію моделі пластини, лінеаризацію за допомогою методу продовження по параметру навантаження та використовують теорію оптимального розбиття множин для визначення параметрів моделі.

Для побудови розв'язків прямої та оберненої задач здійснюється перехід до дискретної моделі з використанням скінченно-елементної апроксимації. Введено сітку для опису невідомих функцій прямої й оберненої задач та сітку для опису координат точок вимірювань. З використанням введених сіток функції задач подаються у вигляді векторів, компоненти яких є вузловими значеннями функцій задач, а на елементі невідомі функції задаються для локальної системи координат за допомогою апроксимацій через вузлові значення.

Після підстановки скінченно-елементних апроксимацій функцій в побудований функціонал, виконання процедур інтегрування та варіювання отримано систему нелінійних алгебраїчних рівнянь N -го порядку, де N – кількість вузлів скінченно-елементної сітки. Для розв'язання цієї системи застосовується ітераційний метод продовження по параметру навантаження.

Розроблений у роботі підхід до ідентифікації дефектів та силових впливів у пластині складається з двох етапів. На першому етапі розв'язком оберненої задачі є вектор, компоненти якого визначають місце розташування областей з дефектами або точок прикладання локальних сил. На другому етапі процедури ідентифікації виконується визначення характеристик дефектів (модулів Юнга включень, амплітуд зосереджених силових впливів), для чого застосовується метод локальної оптимізації у вигляді ітераційної процедури методу Ньютона-Рафсона.

Для оцінки близькості стану пластини, що визначається за допомогою математичної моделі, та спостережуваного стану обрано метрику, яка

використовує найбільш інформативні функції напружено-деформованого стану пластини.

У четвертому розділі досліджуються можливості запропонованого підходу щодо виявлення у тонких пластинах областей, пружні властивості яких є відмінними від пружних характеристик матеріалу пластини, або присутні локальні силові впливи.

Числове моделювання напружено-деформованого стану системи виконувалось з використанням програмного комплексу, який реалізує метод скінченних елементів. Скінченно-елементну модель тонкостінної системи було побудовано з використанням регулярної сітки з прямокутних елементів. Розмір скінченного елемента було визначено в експерименті шляхом послідовного згущення сітки до отримання стабільних результатів за основними показниками напружено-деформованого стану системи у відповідності до заданої точності розв'язання прямої задачі.

За допомогою запропонованого підходу та розробленого алгоритму досліджено процес ідентифікації жорстких включень в деформованій тонкій пластині для різних випадків взаємного розташування вказаних дефектів в матеріалі пластини та різних значень їх пружних властивостей.

Процедура ідентифікації складалась з двох етапів: на першому визначалося місце розташування включень, на другому – відбувалося уточнення їх пружних характеристик методом Ньютона-Рафсона.

Для дослідження переваг двоетапного підходу, що пропонується в роботі, було проведено порівняння отриманих результатів ідентифікації з результатами застосування класичного підходу, коли властивості дефектів визначаються шляхом мінімізації функціоналу задачі з використанням ітераційної процедури метода Ньютона-Рафсона без спеціального вибору початкового наближення. Встановлено, що використання однієї лише процедури методу Ньютона без попереднього визначення місця розташування включень не дозволяє отримати якісні результати.

В роботі досліджено вплив геометричних параметрів включень на можливість їх відновлення. Запропонований підхід продемонстрував ефективність щодо встановлення місця знаходження включень різного розміру та різного взаємного розташування. Навіть у випадку, коли відстань між включеннями була порівнянна з розмірами включень, а самі включення склалися з кількох скінченних елементів, похибка відновлення місця розташування включень не перевищувала 10%. У разі, якщо відстань між включеннями була меншою за їх розмір, алгоритм дозволяв встановити лише границі спільної області, яку займали включення.

Розглянуто процес деформування тонкої пластини комбінованим навантаженням при участі зосереджених силових впливів. Задача ідентифікації у даному випадку передбачала встановлення точок прикладання локальних сил (етап 1) та уточнення їх величин (етап 2).

Досліджено можливості підходу для ідентифікації зосереджених сил, прикладених в різних областях пластини. Слід зазначити, що незалежно від місця прикладення зосередженої сили, зі зростанням кількості ітерацій спостерігалася збіжність обчислювального процесу за значеннями деформацій. Збільшення точності відновлення параметрів локального навантаження мало місце у разі видалення точки прикладення сили від краю пластини та при збільшенні величини дійсної сили. Найбільші труднощі викликала ідентифікація сили низького рівня, яка діяла безпосередньо біля закріплених країв пластини. Найменшу кількість ітерацій потрібно було виконати у випадку, коли зосереджену силу, що викликала лінійне деформування системи та було прикладено в центральній частині пластини.

Проведено аналіз чутливості алгоритму ідентифікації до похибки вхідних даних, підтверджено стійкість запропонованого підходу до наявних похибок у результатах вимірювання та задовільну точність отриманих результатів ідентифікації.

У *п'ятому розділі* виконано ідентифікацію лінійних розрізів у тонкій пластині. Зазначено, що при розв'язанні оберненої задачі ідентифікації

розрізів у пластині виникає необхідність у розв'язуванні послідовності прямих задач з різним розташуванням розрізів. При застосуванні методу скінченних елементів це вимагає на кожній ітерації перебудовувати скінченно-елементну модель пластини, створювати нову нумерацію вузлів, тобто призводить до значних часових витрат.

В роботі для моделювання лінійних розрізів розвинуто підхід, що застосовує однократно побудовану модель пластини і ґрунтується на використанні варіаційного принципу: умови на берегах розрізу перетворюються в умови на лінії, що імітує розріз у суцільній конструкції. Умови на лінії розрізу для суцільної пластини визначаються шляхом розв'язання оберненої задачі, невідомими функціями якої є стрибки узагальнених переміщень на лінії розрізу, а в якості функції, що мінімізується, виступає середньоквадратичне відхилення значень зусиль та моментів на лінії розрізу від нульових значень.

Запропонований підхід та побудований алгоритм визначення стрибків переміщень застосовано для уточнення картини напружено-деформованого стану пластини з математичним розрізом.

Далі в роботі виконано моделювання розрізу у пластині за допомогою запропонованого підходу: розріз моделювався лінією у суцільній пластині, на лінії задавалися значення стрибків переміщень і кутів повороту. Ці значення утворювали вектор невідомих оберненої задачі і визначалися в ітераційній процедурі з використанням методу Ньютон-Рафсона, при виконанні якої контролювалося виконання статичних умов на берегах розрізу.

Запропонований підхід було застосовано при проведенні процедури ідентифікації в пластині дефектів у вигляді лінійних розрізів, задачу було сформульовано як обернену задачу, для визначення компонент вектору невідомих першого етапу ідентифікації (вершин розрізу) використовувався метод вектора спаду.

Досліджено вплив місця розташування розрізу відносно закріпленої та навантаженої кромки пластини, а також довжини розрізу на виконання

процедури ідентифікації. Встановлено, що наближення до затисненої кромки супроводжується зменшенням стрибків напружень в вершинах розрізу, характер їх розподілу перестає бути симетричним: значення напружень для вершини розрізу, розташованої ближче до затисненої кромки, значно менше. Зазначені особливості характеру напружено-деформованого стану впливають на процедуру ідентифікації: наближення до затисненої кромки збільшує кількість ітерацій, необхідних для ідентифікації вершини з заданою точністю. Більша кількість ітерацій потрібна також при зменшенні довжини розрізу, тому що присутність в пластині незначного за розміром дефекту супроводжується незначними відхиленнями характеристик її напружено-деформованого стану від відповідних характеристик суцільної пластини, що призводить до збільшення області початкового наближення вектору невідомих оберненої задачі.

Практичне значення отриманих у роботі результатів полягає у можливості застосування у розрахунковій практиці науково-дослідних установ розроблених математичних моделей і методів дослідження тонкостінних систем, можливості безпосереднього використання результатів розв'язання задач визначення дійсного стану тонких пластинчастих елементів конструкцій в умовах експлуатації.

Ключові слова: тонка пластина, обернена задача, метод ідентифікації, жорсткі включення, зосереджена силова дія, розріз, потенціальна енергія, функція Лагранжа, метод скінченних елементів.

ABSTRACT

Stepanova N. Inverse problems of identification of force effects, inclusions and cuts in a thin plate. – Qualification scientific work presented as a manuscript.

Thesis for Science Candidate Degree in Physics and Mathematics by specialty 01.02.04 – Mechanics of the Deformable Solids (Physics and Mathematics). – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2019.

The thesis is devoted to the development of a technique for detection in a thin plate put under the operational load, of local force influences and defects of material structure in the form of inclusions and cuts by observing the stress-strain state of the plate.

The object of the study is a resiliently deformed thin plate with some of the model's parameters unknown. For the first time, within the framework of nonlinear plate theory using the inverse problem method, a model of deformation is constructed of the observed plate in the presence of inclusions, cuts, action of concentrated loads, the location and properties of which are to be determined.

The first section reviews the literature on the topic of the thesis, and concludes that recently there has been an increased interest of scientists to the field of identification of inhomogeneities in thin plate elements, which are part of most lightweight engineering structures. The presence of point force influences in the thin-walled system, the presence of faults in the form of inclusions or cuts leads to concentration of internal stresses on the sites with the specified features and can lead to premature destruction of the system. Therefore, the need to have reliable, effective and easy-to-use methods of identification of local force influences, defects of the structure in the form of inclusions and cuts in thin-walled systems, determining the characteristics of these features when changing the nature of the existing loads, determines the relevance of the present study.

Taking into account that from a mathematical point of view the problem of defect identification in thin plates is an inverse problem, the classification of inverse problems in the nonlinear theory of thin-walled systems is considered, and the methods are surveyed of solving inverse problems and modern approaches to solving the problem of identification of faults and forces in thin plates.

According to the results of the analysis of publications on the topic of the thesis, the purpose of the work is formulated. *The purpose of the thesis* is to develop a method of inverse problems applicable to the observed thin plates in order to determine unknown local force effects, identification of inclusions and internal boundary contours; development of numerical methods for solving inverse

problems of the theory of thin plates; investigation of the features of the process of identification of concentrated force effects, inclusions and cuts in a thin plate.

In the second section of the thesis, the problem of identification of force effects and defects in a thin plate is formulated as an inverse problem. To describe the unknowns of the inverse problem, the characteristic functions with corresponding domains are introduced, which take into account additional information on the quantitative characteristics of the functions: 1) a function that determines the presence of inclusions in the material of the plate; 2) a function that determines the points of application of local forces; 3) the function that determines the location of the vertices of the cut.

To construct the model a variational approach is applied based on the formulation of the full functional of the energy of the plate, to which an additional condition is attached, which determines the closeness of the real and observed states of the plate, and the unknown parameters of the model are described by means of characteristic functions. In the built-in functional, all unknown functions of the problem are varied independently in the area occupied by the plate and at its boundaries.

The third section proposes a method for solving a given inverse problem and the algorithm for its implementation. For the first time, a new numerical method and an iterative algorithm have been applied, which combine finite element discretization of the plate model, linearization by continuation of the load parameter, and use the theory of optimal partitioning of the sets to determine the model parameters.

To construct solutions of direct and inverse problems, one makes use of a discrete model using a finite element approximation. A grid has been introduced to describe unknown functions of direct and inverse problems, and another grid to describe the coordinates of measurement points. Using the introduced grids, the task functions are presented in the form of vectors whose components are the nodal values of the task functions, and the unknown functions on the element are given for the local coordinate system by means of nodal approximations.

After substitution of finite element approximations of functions into the constructed functional, execution of integration and variation procedures, a system of nonlinear algebraic equations of the N th order is obtained, where N is the number of nodes of the finite element grid. An iterative method of load parameter extension is used to resolve this system.

The approach developed to identify defects and force effects in the plate consists of two steps. In the first step, the inverse of the inverse problem is a vector whose components determine the location of defective areas or points of application of local forces. In the second stage of the identification procedure, defect characteristics (Young's modulus of inclusions, amplitudes of concentrated force effects) are determined, for which the method of local optimization is applied in the form of an iterative procedure of the Newton-Rafson method.

To estimate the proximity of the plate state, which is determined using a mathematical model, and the observed state, a metric is selected that uses the most informative functions of the stress-strain state of the plate.

The fourth section explores the possibilities of the proposed approach for the detection of thin plate regions whose elastic properties are different from the elastic characteristics of the material of the plate, or present force effects.

The numerical simulation of the stress-strain state of the system was performed using a software complex that implements the finite element method. The finite element model of a thin-walled system was constructed using a regular grid of rectangular elements. The size of the finite element was determined in the experiment by sequentially thickening the grid to obtain stable results by the basic indices of the stress-strain state of the system in accordance with the specified accuracy of solving the direct problem.

Using the proposed approach and the algorithm developed, the process of identification of rigid inclusions in a deformed thin plate was investigated for different cases of mutual location of the specified defects in the material of the plate and different values of their elastic properties.

The identification procedure consisted of two steps: the first was the location of the inclusions, and the second was the refinement of their elastic characteristics by the Newton-Rafson method.

To investigate the advantages of the two-step approach proposed in the paper, the obtained identification results were compared with those of the classical approach, when defect properties are determined by minimizing the functional of the problem using the iterative procedure of the Newton-Rafson method without special choice of the initial approximation. It is found that using the Newton method alone without first determining the location of the inclusions does not allow for qualitative results. The influence of geometrical parameters of inclusions on the possibility of their restoration is investigated. The proposed approach demonstrated the effectiveness of locating inclusions of different sizes and different relative locations. Even when the distance between the inclusions was comparable to the size of the inclusions and the inclusions themselves consisted of several finite elements, the error of restoring the placement of inclusions did not exceed 10%. If the distance between the inclusions was smaller than their size, the algorithm allowed to establish only the boundaries of the common area occupied by the inclusions.

Next, the process of deformation of a thin plate by combined loading with the participation of concentrated force influences was considered. The task of identification in this case involved the establishment of points of application of local forces (the stage 1) and the specification of their magnitudes (the stage 2).

Possibilities of an approach for identification of the concentrated forces applied in different areas of the plate are investigated. It should be noted that, regardless of the location of the applied force, with the increasing number of iterations, the convergence of the computational process in terms of deformation values was observed. An increase in the accuracy of restoration of local load parameters occurred when the force point was removed from the edge of the plate and the magnitude of the true force increased. The greatest difficulty was caused by the identification of the low-level force acting directly at the fixed edges of the

plate. The smallest number of iterations needed to be performed when the concentrated force caused a linear deformation of the system and was applied in the central part of the plate.

The sensitivity of the algorithm proposed to the input error was analyzed, which demonstrated the stability of the proposed approach to the existing errors in the measurement results and the satisfactory accuracy of the obtained identification results.

The fifth section identifies the linear sections in the thin plate. It is stated that when solving the inverse problem of section identification in the plate, there is a need to solve a sequence of direct problems with different arrangement of sections. When applying the finite element method, it requires that at each iteration, the finite element model of the plate be re-created, and that the new numbering of the nodes be created, that is, it will lead to considerable time costs.

In the work for modeling of linear sections an approach is developed, which uses a single-plate model of the plate and is based on the use of the variational principle: conditions on the sides of the section are transformed into conditions on a line that simulates the section in a solid structure. Section conditions for a solid plate are determined by solving a inverse problem whose unknown functions are the jumping of generalized displacements along the section line, and as a minimizing function the standard deviation of the values of the forces and moments on the cut line from zero values.

The proposed approach and the built-in algorithm for determining the jumps of displacements were applied to refine the picture of the stress-strain state of the plate with a mathematical section.

Later, the section was simulated by a section in the plate using the proposed approach: the section was modeled by a line in a continuous plate, the values of the jumps of displacements and angles of rotation were specified on the line. These values formed a vector of unknown inverse problems and were determined in an iterative procedure using the Newton-Raphson method, the execution of which controlled the fulfillment of static conditions on the edges of the section.

The proposed approach was applied during the procedure of identification in the plate of defects in the form of linear sections, the problem was formulated as an inverse problem, the method of recession vector was used to determine the components of the unknown vector of the first identification step (section vertices).

The influence of the location of the incision relative to the fixed and loaded edges of the plate, as well as the length of the incision on the identification procedure was investigated. It is established that the approach to the clamped edge is accompanied by a decrease in stress jumps in the section vertices, the nature of their distribution ceases to be symmetrical: the value of the stresses for the section top, located closer to the clamped edge, is much smaller. These peculiarities of the stress-strain character affect the identification procedure: approaching the clamped edge increases the number of iterations required to identify the vertex with a given accuracy. A larger number of iterations is also required when reducing the section length, since the presence of a slight defect size in the plate is accompanied by slight deviations of the characteristics of its stress-strain state from the corresponding characteristics of the solid plate, which leads to an increase in the initial approximation of the vector of unknown inverse.

The practical significance of the results obtained is the ability to use in the design practice of research institutions developed mathematical models and methods of study of thin-walled systems, taking into account different, including critical values of model parameters, the ability to directly use the results of solving inverse problems to evaluate the real state thin plate elements of structures in service conditions.

Keywords: thin plate, inverse problem, identification method, rigid inclusion, local force, incision, potential energy, Lagrange function, finite element method.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА:

1. Гук Н.А. Идентификация геометрических параметров и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Прикладная математика. – 2016. – Том 2. – № 7 (80). – С.4-9. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.64395.
2. Гук Н.А. Ідентифікація жорстких включень у тонкій пластині / Н.А. Гук , Н.І. Степанова // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Сер.: «Математика, прикладна математика і механіка». – 2015. – Том 82. – С. 47-60.
3. Гук Н.А. Идентификация точечных силовых воздействий в тонкостенных системах / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Зб. наук. пр. «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дн-ськ: Ліра. – 2015. – Вип. 24 – С. 58-72.
4. Гук Н.А. Нелинейное деформирование сжато-изогнутой пластины с разрезом / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Вісник Запорізького національного університету. Сер.: «Фізико-математичні науки». –2016. – №2. – С. 89-102.
5. Гук Н.А. Идентификация трещин в тонких пластинах / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Зб. наук. пр. «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дн-ськ: Ліра. – 2017. – Вип. 26 – С. 51-69.
6. Гук Н.А. Идентификация включений в деформируемой пластине / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2014): Матеріали XII Міжнародної наук. конференції, листопад 2014., м. Дніпро. – 2014. – С. 68-70.
7. Гук Н.А. Обработка данных спостережень методом обернених задач при діагностуванні приповерхневих тріщин / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMS-2015): Матеріали XXI Всеукраїнської наук. конференції, 24-25 вересня 2015. – Львів. – С.134-136.
8. Гук Н.А. Идентификация локального силового воздействия в тонкостенной системе методом обратных задач / Н.А. Гук, Н.И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2015): Матеріали XIII

- Міжнародної наук. конференції, 18-20 листопада 2015., м. Дніпро. – 2015. – С. 60- 61.
9. Гук Н.А. Моделирование поведения тонкостенной системы с повреждением как обратная задача / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Математическое моделирование и информационные технологии: Материалы 5-й международной конференции, 22-25 марта 2016, Кишинэу. – 2016. – Том 2.– С.94-96.
 10. Гук Н.А. Ідентифікація тріщин у пластинах / Н. А. Гук, Н.И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2016): Матеріали XIV Міжнародної наук. конференції, 18-20 листопада 2016., м. Дніпро. – 2016. – С. 57-59.
 11. Гук Н.А. Ідентифікація зосереджених зовнішніх впливів методом обернених задач / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні: Матеріали Міжнародної наук.-технічної конференції, 27 – 29 березня 2018 року, м. Дніпро. – С. 62.
 12. Гук Н.А. Імітація розрізу у тонкостінних системах / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2018): Матеріали IV Міжнародної наук.-практичної конференції, 17-18 травня 2018 р., м. Черкаси. – 2018. – С. 47-49.
 13. Гук Н.А. Вибір точок спостереження в задачах ідентифікації дефектів в тонкостінній системі / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання (ІТКМ-2019): Матеріали Міжнародної наук.-практичної конференції, 20-25 травня 2019, м. Івано-Франківськ. – 2019. – С. 305-308.
 14. Степанова Н. І. Вплив початкового наближення на результат ідентифікації пружних характеристик жорстких включень у тонкій пластині / Н.И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2018): Матеріали XVI Міжнародної наук. конференції, листопада 2018., м. Дніпро. – 2018. – С. 198-200.

ЗМІСТ

ВСТУП	21
РОЗДІЛ I. Аналітичний огляд літератури, присвяченої ідентифікації дефектів та силових впливів у тонких пластинах методом обернених задач	27
1.1. Постановка оберненої задачі	28
1.2. Методи розв'язання обернених та прямих задач	30
1.3. Класифікація обернених задач теорії тонких пластин	34
1.4. Задача ідентифікації як обернена задача	37
1.4.1. Дефекти у вигляді включень та розрізів	41
1.4.2. Реконструкція локальних силових впливів	46
Висновки до розділу 1	47
РОЗДІЛ II. Математична модель прямої та оберненої задач	49
2.1. Постановка оберненої задачі теорії пластин	49
2.2. Математична модель оберненої задачі	54
2.2.1. Опис функцій, що характеризують пряму і обернену задачі	54
2.2.2. Математична модель прямої задачі нелінійної теорії пластин	56
2.2.2.1. Геометричні та фізичні співвідношення	57
2.2.2.2. Рівняння рівноваги	60
2.2.2.3. Розв'язуючі співвідношення	60
2.2.2.4. Умови закріплення пластини	63
2.3. Варіаційна постановка прямої задачі нелінійної теорії пластин	64
2.4. Варіаційна постановка оберненої задачі	68
Висновки до розділу 2	71
РОЗДІЛ III. Метод розв'язання обернених задач теорії пластин	72
3.1. Дискретизація невідомих функцій прямої та оберненої задач	72
3.2. Метод розв'язання оберненої задачі	73
3.3. Ітераційна процедура уточнення компонент вектора невідомих	

	18
оберненої задачі	77
3.4. Дискретна модель	79
3.4.1. Скінченно-елементна апроксимація прямої та оберненої задач	79
3.4.2. Дискретизація функціоналу	84
3.5. Алгоритм розв'язання оберненої задачі	85
3.6. Етапи визначення вектора невідомих оберненої задачі	86
3.7. Вибір точок спостереження	88
Висновки до розділу 3	94
РОЗДІЛ IV. Ідентифікація силових впливів та включень у тонкій	
пластині	95
4.1. Особливості числового моделювання прямої задачі	95
4.1.1. Моделі пластин в задачах ідентифікації силових впливів та включень у тонкій пластині	95
4.1.2. Вибір матеріалів пластини і включень	96
4.1.3. Граничні умови та навантаження	97
4.1.4. Вибір сіток скінченних елементів	98
4.1.5. Метод розв'язання прямої задачі	101
4.2. Ідентифікація включень у тонкій пластині	103
4.2.1. Моделі пластини в задачах ідентифікації включень	103
4.2.2. Розв'язуючі співвідношення та алгоритм	104
4.2.3. Опис процедури ідентифікації включень у тонкій пластині	106
4.2.4. Результати ідентифікації місця розташування та модуля Юнга двох включень у тонкій пластині	107
4.2.4.1. Визначення місця розташування включень (етап 1)	108
4.2.4.2. Ідентифікація модулів Юнга включень (етап 2)	113
4.2.5. Порівняння запропонованого підходу з існуючими методиками	115
4.2.6. Аналіз впливу взаємного розташування включень на	

результати їх ідентифікації	118
4.2.7. Аналіз впливу параметрів сітки вимірювань на результат ідентифікації включень	122
4.3. Ідентифікація локального зовнішнього впливу (задача 2)	125
4.3.1. Моделі пластини в задачах ідентифікації локальної сили	125
4.3.2. Розв'язуючі співвідношення та алгоритм	126
4.3.3. Опис процедури ідентифікації силових впливів	128
4.3.4. Результати ідентифікації зосереджених силових впливів	129
4.3.4.1. Визначення розташування точки прикладання сили	129
4.3.4.2. Результати процедури уточнення величини сили	131
4.3.5. Дослідження залежності точності відновлення локальної сили від області її прикладання та величини	133
4.3.6. Ідентифікація групи локальних силових впливів	137
4.3.7. Аналіз чутливості алгоритму ідентифікації локальних силових впливів до похибок вхідних даних	141
4.3.8. Порівняльний аналіз результатів роботи алгоритму з відомими аналітичними розв'язками	144
Висновки до розділу 4	145
РОЗДІЛ V. Ідентифікація дефектів у вигляді лінійних розрізів у тонкій пластині	147
5.1. Особливості моделювання розрізу у тонкій пластині	147
5.2. Моделювання розрізу у пластині лінією	147
5.2.1. Розв'язуючі співвідношення та алгоритм	148
5.2.2. Метод розв'язання прямої задачі	150
5.3. Уточнення картини напружено-деформованого стану тонкої пластини з розрізом	152
5.3.1. Вибір сіток скінченних елементів для розв'язання прямої задачі деформування пластини з розрізом	152
5.3.2. Аналіз результатів застосування алгоритму $A3$ до уточнення картини напружено-деформованого стану пластини	155

5.4. Ідентифікація дефектів у вигляді лінійних розрізів	157
5.4.1. Постановка оберненої задачі та метод розв'язання	157
5.4.2. Модель пластини з розрізом	160
5.4.3. Аналіз результатів ідентифікації лінійних розрізів	161
5.4.4. Дослідження ефективності запропонованого підходу ідентифікації для різних випадків розташування розрізу у пластині	163
5.4.5. Дослідження ефективності запропонованого підходу ідентифікації в залежності від довжини розрізу	168
5.4.6. Ідентифікація розрізу в тонкій пластині для різних моделей навантаження	169
5.4.6.1. Одновісне розтягання $q_1 = 0, q_2 \neq 0$	170
5.4.6.2. Одновісне розтягання $q_1 \neq 0, q_2 = 0$	172
5.4.6.3. Двовісне розтягання $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$	173
Висновки до розділу 5	176
ВИСНОВКИ	177
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	179
ДОДАТКИ	202
Додаток А	202
Додаток Б	209

ВСТУП

Актуальність теми. Потреби сучасної інженерної практики у машинобудуванні, будівництві, на транспорті ставлять досить жорсткі вимоги до експлуатаційних характеристик споруд та технічних засобів, насамперед це стосується надійності, економічності, безпеки експлуатації. Одним із факторів забезпечення надійної роботи тонких пластинчастих елементів є розробка методів прогнозування їх дійсного стану з урахуванням наявності дефектів матеріалу у вигляді включень, розрізів, можливого впливу зосереджених сил. За певних рівнів навантаження або умов експлуатації в місцях розташування вказаних дефектів та силових впливів можуть спостерігатися істотні концентрації напружень, які необхідно своєчасно ідентифікувати заради безпечного використання та запобігання передчасного руйнування конструкцій.

Тому необхідність мати надійні та зручні у використанні методи ідентифікації напружено-деформованого стану пластин з дефектами при зміні характеру діючих навантажень визначає актуальність обраної теми роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, результати яких викладено у дисертаційній роботі, виконувались у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара (2014-2019 рр.). Тема дисертації відповідає основним напрямкам наукових досліджень кафедри комп'ютерних технологій. Проведені у дисертаційній роботі дослідження виконані в рамках науково-дослідних тем Міністерства освіти і науки України «Розробка програмно-математичного забезпечення та моделювання інформаційних процесів», номер державної реєстрації №0113U004203 (2014-2016); «Дослідження математичних моделей фізичних процесів методами ідентифікації та рекурентного аналізу із застосуванням інформаційних технологій», номер державної реєстрації №0116U002229 (2016-2018).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є:

- розробка методу обернених задач стосовно до спостережуваних тонких пластин для визначення невідомих локальних силових впливів, ідентифікації включень та внутрішніх граничних контурів;
- розвиток числових методів розв’язання обернених задач теорії тонких пластин, дослідження особливостей процесу ідентифікації.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

- сформулювати розрахункові моделі для опису процесу нелінійного деформування тонких пластин при наявності у матеріалі пластини включень з невідомими геометричними та пружними властивостями, порушень суцільності пластини, в умовах дії зосереджених сил невідомої величини;
- сформулювати обернену задачу ідентифікації зазначених особливостей у варіаційній постановці, обрати множину коректності розв’язків задачі;
- побудувати дискретну модель деформування пластини з використанням характеристичних функцій, які дозволяють враховувати вплив зосереджених сил, наявність дефектів у вигляді включень, розрізів та визначати їх розташування у пластині та параметри;
- розвинути ітераційний підхід щодо розв’язання сформульованої варіаційної задачі та числові методи, що його реалізують, розробити алгоритм, дослідити алгоритм на точність, встановити межі застосування підходу;
- розвинути підхід щодо моделювання розрізу у пластині на основі моделі суцільної пластини;
- за допомогою розробленого підходу й алгоритмів числової реалізації сформулювати й розв’язати задачі про реконструкцію локальних силових впливів, задачі ідентифікації місця розташування та властивостей жорстких включень, задачі ідентифікації розрізів у пластині;
- провести порівняльний аналіз отриманих результатів із відомими з літератури результатами розв’язання аналогічних задач ідентифікації.

Об'єкт дослідження – пружно деформована тонка пластина при частково невідомих параметрах її моделі.

Предмет дослідження – ідентифікація параметрів реальної моделі тонкої пластини на основі результатів спостереження за процесом її деформування.

Об'єкт дослідження – пружно деформована тонка пластина при частково невідомих параметрах її моделі.

Предмет дослідження – ідентифікація параметрів реальної моделі тонкої пластини на основі результатів спостереження за процесом її деформування.

Методи дослідження. У роботі застосовано чисельно-аналітичне моделювання нелінійного процесу пружного деформування реальної тонкої пластини. Використано варіаційний метод дослідження нелінійних крайових задач з додатковими умовами у вигляді рівностей, метод скінченних елементів у поєднанні з методом продовження за параметром та методом Ньютона-Рафсона. Виконано комплексне тестування розробленого числового методу розв'язання оберненої задачі, проведено порівняльний аналіз з результатами, отриманими іншими авторами, а також проаналізовано точність і вірогідність отриманих розв'язків.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- вперше для розв'язання оберненої задачі теорії пластин застосовано варіаційний підхід, що базується на формуванні повного функціонала енергії пластини, до якого приєднується додаткова умова, що визначає близькість дійсного та спостережуваного станів, а невідомі параметри моделі пластини описано за допомогою характеристичних функцій;
- розроблено метод та числові алгоритми, які дозволяють ідентифікувати локальні силові впливи, жорсткі включення та розрізи у тонкій пластині за результатами спостережень за її напружено-деформованим станом;
- розвинуто підхід щодо моделювання розрізу у пластині на основі моделі суцільної пластини;

- вперше запропоновано підхід щодо уточнення розрахункової скінченно-елементної моделі пластини з математичним розрізом;
- отримано числові розв’язки задач ідентифікації місця розташування та фізико-механічних властивостей жорстких включень;
- отримано числові розв’язки задач реконструкції силових впливів;
- отримано числові розв’язки задач ідентифікації розрізів у пластині.

Обґрунтованість і достовірність наукових результатів, наведених у дисертації, забезпечується використанням загальноприйнятих моделей деформування тонкостінних систем, коректністю математичних постановок прямих та обернених задач, використанням надійних аналітичних і числових методів розв’язання задач, контрольованою точністю обчислень, відповідністю отриманих результатів фізичному змісту задач, доброю узгодженістю отриманих результатів з опублікованими результатами інших досліджень.

Практичне значення отриманих результатів полягає у:

- можливості використання розроблених математичних моделей та методів дослідження спостережуваних пластин з урахуванням різних, у тому числі й екстремальних, змін у системі для визначення параметрів моделей дійсності;
- створенні комплексу прикладних програм для реконструкції реальних навантажень, ідентифікації дефектів у вигляді включень та розрізів за результатами вимірювання характеристик напружено-деформованого стану, який може бути використаний у процесі моніторингу конструкцій;
- можливості безпосереднього використання результатів розв’язання обернених задач для оцінки дійсного стану тонких пластин у елементах конструкцій в умовах експлуатації.

Апробація результатів дисертації. Окремі результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на:

- XII - XIV, XVI Міжнародних науково-практичних конференціях «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS)»,

м. Дніпро, 19-21 листопада 2014, 18-20 листопада 2015, 16-18 листопада 2016, 21- 23 листопада 2018;

– XXI Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMS-2015)», м. Львів, 24-25 вересня 2015;

– V Міжнародній конференції «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии», м. Кишинєу, 22-25 березня 2016;

– Міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні (ІТММ-2018)», м. Дніпро, 27-29 березня 2018;

– IV Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2018)»: м. Черкаси, 17-18 травня 2018;

– Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання (ІТКМ-2019)», м. Івано-Франківськ, 20-25 травня 2019;

– розширеному науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки і кафедри комп'ютерних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, 20 червня 2019 р., керівник – д. ф.-м. н., проф. В. В.Лобода;

– об'єднаному (міжкафедральному) науковому семінарі «Сучасні питання оптимізації, дискретної математики, інформаційних технологій та математичного моделювання» на базі діючого наукового семінару «Сучасні питання оптимізації та дискретної математики» при Науковій раді НАН України з проблеми «Кібернетика» факультету прикладної математики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, 24 вересня 2019, керівник – чл.-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. О.М. Кісельова.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 14 наукових працях, серед яких 5 статей [1-5], з них одна стаття [1] надрукована у журналі, що входить до наукометричної бази даних Scopus, 4 статті [2-5] опубліковані у наукових журналах, затверджених МОН України як фахові видання, 9 тез доповідей і матеріалів всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій [6 - 14].

Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У роботах [1-13], які написано разом з науковим керівником, доктором фізико-математичних наук, професором Н. А. Гук, співавтору належить участь у постановці задачі, виборі методів розв'язування, обговоренні алгоритму та аналізі результатів обчислювальних експериментів. У роботах [1, 2, 6] здобувачем самостійно побудовано дискретні моделі тонкостінних систем, розроблені алгоритми розв'язування задач та виконано їх програмну реалізацію. У роботах [3, 10, 13] здобувачеві належить побудова математичної моделі системи що досліджується, проведення обчислювальних експериментів. У роботах [4, 5, 7, 9, 11] здобувачем було здійснено вибір методів розв'язання задачі, побудовано скінченно-елементну модель і проведено обчислювальні експерименти. У роботі [8] здобувачем виконано лінеаризацію задачі, проведено обчислювальний експеримент та проаналізовано числові результати. У роботі [12] здобувачеві належить проведення обчислювального експерименту та порівняльний аналіз способів відбору точок спостереження. Роботу [14] опубліковано без співавторів.

Структура і обсяг роботи. Дисертація загальним обсягом 211 сторінок складається із вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел із 189 найменувань, 2 додатків на 10 сторінках і містить 54 рисунка та 17 таблиць.

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук, професору Наталії Анатоліївні Гук за постійну підтримку, увагу до дослідження та цінні поради, що сприяли успішному виконанню дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ПРИСВЯЧЕНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДЕФЕКТІВ ТА СИЛОВИХ ВПЛИВІВ У ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ МЕТОДОМ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

Для тривалої безпечної експлуатації тонкостінних конструкцій вкрай важливим є отримання повної та вірогідної інформації про зовнішні сили, що діють на елементи конструкцій в процесі експлуатації, та наявні дефекти структури матеріалу елементів у вигляді сторонніх включень та розрізів. Як відомо, присутність зазначених особливостей у тонкостінній системі викликає локальні концентрації напружень, що може призвести до її руйнування. Тому необхідно мати ефективні, надійні, прості у використанні методи ідентифікації силових впливів та неоднорідностей структури матеріалу пластини.

Найбільш раціональний підхід до визначення зовнішніх впливів та дефектів у тонкій пластині передбачає їх безпосередній вимір з використанням методів неруйнівного контролю, що засновані на взаємодії різних полів з досліджуваною пластиною (магнітографічний метод, ультразвукова діагностика, рентгеноструктурний аналіз). Однак, у більшості ситуацій цей підхід є або суттєво утрудненим, або цілком неможливим.

Проблему може бути вирішено аналітично за допомогою технології непрямих вимірів, коли ідентифікація вказаних особливостей у тонкостінній системі здійснюється через реєстрацію доступних для вимірювання характеристик, значення яких обумовлені дією зосереджених сил або присутністю дефектів. На підставі отриманих вимірювань та обраної математичної моделі з використанням аналітичних методів можна зробити висновок про дійсний стан досліджуваної системи.

В такій постановці задачі реконструкції зовнішніх силових впливів, ідентифікації дефектів у вигляді включень та розрізів у тонкій пластині є

нелінійними оберненими задачами, до яких вже досить тривалий час спостерігається підвищений науковий інтерес у зв'язку з численністю їх прикладних застосувань.

1.1. Постановка оберненої задачі

Розв'язання оберненої задачі дозволяє отримати інформацію про реальні характеристики системи за результатами непрямих спостережень за її напружено-деформованим станом, тобто, встановити причини за їх непрямыми проявами на основі додаткової інформації про систему.

До невідомих характеристик оберненої задачі відносять функції, що описують наявні в системі навантаження, граничні й початкові умови, геометричні характеристики області визначення диференціального рівняння, а також коефіцієнти диференціальних рівнянь. У якості відомої інформації можуть виступати характеристики напружено-деформованого стану системи: переміщення, кути повороту, деформації, які фіксуються за допомогою системи датчиків, розміщених на поверхні пластини.

Розв'язання оберненої задачі передбачає побудову розв'язку прямої задачі в загальному вигляді з подальшим оберненням математичної моделі прямої задачі на підставі деякої додаткової умови. Саме спосіб обернення математичної моделі прямої задачі визначає обчислювальну постановку (модель) оберненої задачі.

Основні підходи до створення обчислювальних моделей обернених задач механіки розвинуто в роботах О. М. Аліфанова, О. О. Ватульяна, В. К. Іванова, М. М. Лаврентьєва, Ю. М. Мацевитого, А. М. Тихонова.

У випадках, коли поведінка досліджуваної системи є квазістатичною, використовується стаціонарна постановка оберненої задачі, яка полягає у постановці крайової задачі з додатковою інформацією про поточний стан системи. Для стаціонарної постановки задачі зазвичай використовується два типи обчислювальних моделей оберненої задачі: пряма та варіаційна.

При використанні прямих моделей невідомі функції оберненої задачі безпосередньо виражаються з рівнянь математичної моделі. Однак у більшості випадків при розв'язанні конкретних задач формулювання операційного рівняння є неможливим.

У випадку, коли диференційний оператор прямої задачі має змінні коефіцієнти, область, на якій відшукується розв'язок оберненої задачі, має неканонічну форму або є багатозв'язною, розв'язок прямої задачі може бути отримано тільки чисельно. У такому випадку використовується варіаційна постановка оберненої задачі, яка передбачає мінімізацію нев'язки між функціями, що визначені в експерименті та обчислені з математичної моделі прямої задачі [30, 31, 78, 104].

Обернені задачі в варіаційній постановці відрізняються способом отримання розв'язку прямої задачі (аналітичний [31, 32, 43, 81, 131, 133, 137, 138, 168, 178] або числовий [41, 58, 62, 102] розв'язок), виглядом цільового функціонала і методом пошуку мінімуму. У роботах [31, 39, 41, 83] функціонал є простим і виражається одним критерієм, в роботі [104] цільовий функціонал є згортокою кількох критеріїв, тобто є складовим.

Функціонал цілі може бути сформульованим у вигляді, що забезпечує не тільки мінімум квадрата нев'язки, а й дозволяє врахувати додаткові умови, які визначаються фізичними принципами й приєднуються до функціонала з використанням множників Лагранжа [7, 53-61, 63, 150].

Розв'язання задачі мінімізації функціоналу цілі може бути здійснено з використанням методів пошуку мінімуму, які засновано на переборі всіх допустимих значень шуканих параметрів (у разі, коли їх кількість є незначною і у наявності апріорна інформація відносно припустимих значень параметрів). Однак, більш ефективними є методи, в яких організовано спрямований пошук [22], такі як градієнтні і пошукові методи мінімізації, які мають більш високу швидкість збіжності у порівнянні з методами, що використовують тільки значення функціоналу.

1.2. Методи розв'язання обернених та прямих задач

Характерною особливістю постановок обернених задач є їх некоректність [74, 75, 117], що обумовлює основні проблеми побудови ефективних обчислювальних методів, які б дозволяли отримувати стійкі розв'язки. Довгий час некоректні задачі вважалися такими, що не піддаються розв'язанню. Тільки після введення академіком А. М. Тихоновим поняття умовної коректності, а також подальших публікацій його робіт і робіт В. К. Іванова, М. М. Лаврентьєва та їхніх учнів, з'явилася можливість розв'язання обернених задач. Подальший розвиток цей науковий напрям одержав у роботах О. Л. Бухгейма, О. О. Ватульяна, А. І. Гасанова, В. С. Дейнеки, О. М. Денисова, В. Б. Зваридчука, С. І. Кабаніхіна, Б. І. Кіндрацького, В. О. Костіна, В. І. Кузьменка, Р. М. Кушніра, С. Ф. Лушпенка, Ю. М. Мацевитого, Ю. В. Немировського, В. О. Постнова, О. А. Самарського, І. В. Сергієнка, В. В. Скопечького, В. А. Стояна, Г. Т. Сулима, І. Ю. Цвелодуба, Є. Г. Янютіна, А. В. Ясинського, В. Г. Яхна, Y. Chen, D. Colton, R. Durrigge, H.W. Engl, J. Gottlieb, M. Grasselli, G.Q. Xie, R. Kress, G. Kunetz, J.Q. Lin, A. Lorenzi, J. M. Mendel, R. D. Murch, A. Roger, M. Sondhi, M. Hanke, M. Yamamoto та інших вчених. Було запропоновано велику кількість методів розв'язання обернених задач: аналітичних та числових, детермінованих та стохастичних, а також методів регуляризації розв'язків (методи обернення математичної моделі й алгоритму розв'язання прямої задачі, методи підбору, квазірозв'язків та багато інших).

Відповідно до постановок обернених задач у вказаних дослідженнях методи розв'язання поділено на два класи: прямі та обернені методи. До прямих належать методи, що дозволяють отримати зображення невідомих функцій оберненої задачі у вигляді аналітичного виразу, а також методи обернення математичної моделі, які передбачають перетворення рівнянь таким чином, щоб невідомі функції оберненої задачі були функціями відомих розв'язків прямої задачі. У випадках, коли невідомі функції оберненої задачі неможливо виразити з рівнянь моделі прямої задачі в явному вигляді,

використовують їх скінченновимірний параметричний опис, а потім розв'язують обернену задачу як задачу найкращого наближення, використовуючи, наприклад, метод найменших квадратів [11, 74].

При використанні варіаційної постановки оберненої задачі для її розв'язання використовуються методи, що передбачають мінімізацію нев'язки між вимірними та обчисленими за математичною моделлю прямої задачі значеннями. Для розв'язання задачі мінімізації можуть бути використані методи пошуку мінімуму, які засновано на перегляді всіх припустимих значень шуканих параметрів, якщо їх кількість є незначною, а у наявності є апіорна інформація про припустимі значення параметрів. Більш ефективними є методи, в яких організовується спрямований пошук [22] – градієнтні, пошукові методи оптимізації, які мають більшу швидкість збіжності у порівнянні з методами, що використовують тільки значення функціоналу. У роботі [158] показано, що попереднє дослідження характеру поведінки функціоналу-нев'язки в залежності від параметрів задачі дозволяє обрати стратегію мінімізації для знаходження його глобального мінімуму. Однак для отримання кожної компоненти вектора градієнта нев'язки потрібно розв'язувати пряму задачу, що істотно збільшує час обчислень.

У більшості випадків аналіз некоректних задач супроводжується великими похибками розв'язків навіть за малими похибками вхідних даних (порушується умова стійкості розв'язку). З іншого боку, проведення експериментальних досліджень не дозволяє отримати дані, які б точно описували досліджуваний процес (похибка вимірювальних приладів, систем обробки даних тощо). Проблема стійкого розв'язку обернених задач передбачає використання таких методів, які б дозволяли отримати наближені розв'язки, близькі до шуканого, на підставі наявної наближено заданої інформації про праві частини та величину похибки.

На даний час розроблено велику кількість методів регуляризації, що дозволяють ефективно розв'язувати різноманітні обернені задачі, серед яких метод А. С. Апарцина, О. М. Денисова, Н. О. Магницького, А. М. Тихонова.

Серед існуючих методів регуляризації слід зазначити методи, які засновано на введенні задачі до класу коректності за А. М. Тихоновим [20, 86] та методи, що використовують універсальні регуляризуючі алгоритми, отримані за допомогою параметричного функціоналу А. М. Тихонова [18, 89, 103, 116-118, 176, 185].

В роботі [86] М. М. Лаврентьєвим запропоновано концепцію умовної коректності (коректності за Тихоновим), що полягає у звуженні класу можливих розв'язків до деякої множини (множини коректності), на якій розв'язок буде стійким. Використання цього підходу забезпечує стійкість розв'язку по відношенню до таких варіацій вхідних даних, які не виводять розв'язок за межі множини коректності.

Якщо апріорна інформація про належність розв'язку деякій множині коректності відсутня, для побудови наближених розв'язків використовується фундаментальне поняття регуляризуючого оператора, введене А. М. Тихоновим [117, 119]. Ідея полягає в апроксимації нестійкої точної задачі параметричним сімейством наближених стійких задач та у виборі параметра регуляризації в залежності від рівня збурення вхідних даних задачі. Не зважаючи на велику кількість існуючих підходів до вибору параметра регуляризації, вказана проблема й досі викликає інтерес дослідників [185, 187]. Так, авторами роботи [187] пропонуються правила вибору параметра регуляризації при розв'язанні некоректних задач із зашумленими даними. У роботі [185] вивчаються апостеріорні правила вибору параметра регуляризації при розв'язанні нелінійних некоректних задач (правило Шерцера, правило монотонної помилки Таутенхана та Хамарика), наведено числові експерименти, що підтверджують теоретичні результати дослідження.

Для розв'язання прямих задач теорії тонких пластин у випадках багатозв'язності області, неоднорідності властивостей матеріалу, складності граничних умов найчастіше використовується метод скінченних елементів,

особливостям його використання присвячено роботи В. І. Грішина, І. І. Діяка, О. С. Зенкевича, В. В. Кабанова, В. А. Постнова, В. Д. Чубаня.

Засновані на методі скінченних елементів сучасні програмні комплекси (ANSYS, Cosmos, Abaqus, ЛОГОС - П та інші) мають розвинені бібліотеки елементів, що дозволяє розв'язувати велику кількість прикладних задач. У численних дослідженнях, присвячених комп'ютерному моделюванню [7, 102, 140, 164, 174, 182] обговорюються основні проблеми формулювання ефективних моделей скінченних елементів для розв'язання задач вигину пластин на основі гіпотез Кірхгофа - Лява, зсувних моделей типу Тимошенко, розглядаються питання побудови схем дискретизації тонкостінних конструкцій, що забезпечують необхідну точність і обчислювальну ефективність розрахунків.

Одним з нових підходів до побудови сіток скінченних елементів є метод віртуальних елементів (VEM), запропонований у 2012 році Джардіні Ф., Вакка Д. Метод віртуальних елементів дозволяє створювати різноманітні багатокутні/багатогранні сітки, допускає використання «висячих вершин» та неопуклих форм. На відміну від класичного методу скінченних елементів у VEM не використовується концепція локального поліноміального наближення на елементі, натомість застосовуються апроксимуючі функції, які є розв'язками диференціальних рівнянь, що відповідають даній задачі. Такий підхід позбавляє від необхідності виконувати процедуру інтегрування шуканих функцій на елементах. Метод VEM успішно застосовується для широкого кола проблем лінійної та нелінійної теорій пружності. Так, в роботі Е. Artioli [140] даний метод було протестовано на двовимірній задачі малих деформацій тонкої пластини на 6 варіантах елементних сіток, що складаються з 3-6 вузлових елементів, доведено збіжність отриманих розв'язків до відомих аналітичних розв'язків. Використанню VEM для розв'язання задач теорії пружності присвячено також роботу [182].

З огляду на нелінійність прямої задачі та можливість існування особливої точки, в околі якої розв'язок може бути неоднозначним, необхідно використовувати метод розв'язання, що дозволяє визначати напружено-деформований стан досліджуваної системи у всьому діапазоні змінювання параметрів. Найбільш ефективним засобом розв'язання нелінійних задач є підхід з використанням методу продовження по параметру. Ідею продовження розв'язку по параметру вперше наведено у роботах У. Левер'є та А. Пуанкаре, дискретну форму методу сформульовано Д. Ф. Давиденко, розвинуто у роботах Е.І. Григолюка [49] та В. І. Шалашилїна [130].

Вирішення проблеми вибору оптимальних моделей і схем скінченно-елементної дискретизації, які б забезпечували отримання ефективного розв'язку всіх задач розрахунку конструкцій, що знаходяться в стані вигину, в загальному вигляді не є можливим. Однак цілком можливо отримати оцінки точності шуканих розв'язків в залежності від параметрів дискретизації для конкретних класів задач.

1.3. Класифікація обернених задач теорії тонких пластин

З огляду на умовну класифікацію обернених задач механіки деформівного твердого тіла [4, 43, 76, 96, 102, 131], задачі ідентифікації, що розглянуто у роботі, можна класифікувати таким чином:

– задачі визначення місця розташування порушень однорідності та цілісності матеріалу тонкої пластини у вигляді включень та розрізів є *геометричними оберненими задачами*. Дослідженню даних задач для рівнянь теорії пружності в обмеженій або напівобмеженій області за додатковою інформацією про граничні поля переміщень присвячено роботи [23, 25, 27, 34, 35, 38, 57, 59, 60, 67, 93, 96, 122, 128, 138, 139, 143, 147, 152, 153, 156, 162, 166-172, 176, 178-181], а як методи їх розв'язання найчастіше використовується апарат граничних інтегральних рівнянь [39, 101] та скінченно-елементні технології [7, 102, 140, 174, 182].

Для реконструкції дефектів у тонкій пластині існує кілька підходів: метод лінеаризації вхідної системи нелінійних рівнянь в околі деякого початкового положення дефекту (включення або розрізу) з подальшою побудовою ітераційної процедури, яка уточнює початкове наближення; метод регуляризації на компактних множинах; метод регуляризації на скінченновимірних множинах. Скінченновимірна постановка задачі реалізується за наявності апріорної інформації про те, що контур дефекту може бути однозначно описаним скінченною кількістю параметрів, якими можуть бути характерний розмір контуру, його площа, місце розташування. Обернена задача формулюється в варіаційній постановці, пошук параметрів дефекту здійснюється за умови мінімуму функціоналу-нев'язки;

– задачі реконструкції області прикладання локальних навантажень, що діють на тонку пластину, відносяться до *граничних обернених задач*. Найчастіше для розв'язання граничних обернених задач використовується метод побудови операторного зв'язку між граничними значеннями вектора переміщень і вектора напружень, заснований на ідеології граничних інтегральних рівнянь першого роду з гладкими ядрами експоненціального типу [24, 32, 36] і застосуванням найбільш поширеного способу їх розв'язання, що поєднує метод граничних елементів і метод регуляризації А.М. Тихонова [117].

Для статичних задач теорії пружності в роботі [80] запропоновано метод по визначенню статичних навантажень, заснований на аналізі задачі Коші для еліптичного оператора і розв'язанні послідовності коректних прямих задач в ітераційному процесі. Однією з переваг цього методу є збереження вхідного рівняння. В роботі доведено збіжність методу і його регулюючі властивості, що забезпечуються вибором граничних умов;

– задачі визначення пружних характеристик включень, величин локальних силових впливів є *коефіцієнтними оберненими задачами* [29, 30, 42, 62, 113, 114, 122, 123, 178]. Доволі часто при розв'язанні сучасних наукових проблем потрібно відмовитися від гіпотези однорідності

середовища. Це призводить до того, що для опису фізичних властивостей необхідно використовувати функціональні залежності, вид яких попередньо визначено з експериментів [39]. У цьому випадку математична модель задачі описується диференціальними операторами, змінність коефіцієнтів яких не дозволяє побудувати розв'язки для відповідних диференціальних операторів в явному вигляді. Тоді моделювання властивостей середовища може бути здійснено в рамках кусково-однорідної структури об'єкту дослідження.

Так в роботах В. Г. Романова [106, 107] для лінійної системи рівнянь пружності розглядається задача про визначення густини й пружних параметрів, які є кусково-сталими функціями просторової координати. Показано, що при певних припущеннях про параметри пружного середовища задання переміщень точок меж півпростору для деякого обмеженого часового інтервалу однозначно визначає нормовану густину (щодо до густини першого шару) та пружні параметри Ламе.

У роботах О.О. Ватульяна та його учнів [15, 23, 36, 40] до розв'язання обернених задач теорії пружності зі змінними коефіцієнтами застосовується підхід, при якому обернена задача зводиться до ітераційного процесу, на кожному кроці якого необхідно розв'язувати інтегральне рівняння Фредгольма 1 роду з гладким ядром, а інтегральне рівняння виводиться з узагальненого співвідношення взаємності.

До коефіцієнтних обернених задач призводять також задачі визначення форм порожнин або включень малих розмірів у стрижнях та пластинах [31, 57]. В цьому випадку область, що займається тонкостінною системою, розбивають на скінчене число підобластей, в кожній з яких функції просторових координат, що характеризують закони зміни модулів пружності та густини, є нескінченно диференційованими. При наявності включення ці функції є кусково-сталими, а при наявності порожнини – приймають значення нуль. Обернена задача формулюється в варіаційній постановці, причому одночасному варіюванню підлягають як поле переміщень, так і функції, що описують модуль пружності та густину середовища.

Використання варіаційного рівняння відразу дозволяє побудувати ітераційну процедуру, початковий розподіл невідомих функцій обирається в класі лінійних або кусково-лінійних функцій.

При одночасній ідентифікації кількох характеристик пошук мінімуму цільового функціонала стає особливо складним, тому що у цьому випадку форма цільового функціонала є особливо ярообразною, а, отже, виникає необхідність застосування процедури пошуку глобального мінімуму функціоналу. Останнім часом для розв'язання цієї задачі використовуються нейронні мережі та генетичні алгоритми. В роботі [10] розроблено генетичний алгоритм, що займає проміжне положення між детермінованими та глобальними випадковими методами пошуку екстремуму функції кількох змінних. Програмна реалізація алгоритму спрямована на розв'язання обернених задач ідентифікації механічних властивостей ізотропних і анізотропних матеріалів.

1.4. Ідентифікація дефектів та локальних силових впливів у тонких пластинах як обернена задача

Успіх у розв'язанні задач ідентифікації як обернених задач значною мірою залежить від використання адекватних математичних моделей та побудови ефективних способів розв'язання прямих задач для пластин, що знаходяться під впливом зосереджених сил або мають неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу. Також потрібно враховувати, що тонкостінна система в умовах експлуатації знаходиться під навантаженням, близьким до критичного, тому визначення її напружено-деформованого стану слід проводити в рамках нелінійного підходу.

Основи нелінійної теорії пластин було закладено С. П. Тимошенком. Подальший розвиток нелінійна теорія деформування пластин отримала в роботах В. А. Баженова, В. В. Болотіна, М. М. Вайнберга, А. С. Вольміра, І. І. Воровича, Г. Д. Гавриленка, Е. І. Гріголюка, О. Я. Григоренка, Я. М. Григоренка, В. З. Грищака, А. Н. Гузя, А. П. Зінківського,

В. В. Кабанова, Б. Я. Кантора, В. Т. Койтера, В. Л. Красовського, Л. В. Курпи, В. В. Матвєєва, В. В. Мелешка, Ю. В. Міхліна, О. К. Морачковського, Н. Ф. Морозова, Н. І. Ободан, О. В. Погорєлова, В. І. Пожуєва, В. А. Світлицького, Л. С. Срубщика, П. А. Стеблянка, В. Т. Троценка, В. І. Феодосьєва, В. П. Шевченка, M. Amabili, I. G. N. Croll, I. F. Doyle, G. W. Hunt, J. W. Hutchinson, J. M. T. Thompson, P. Wriggers.

У зазначених дослідженнях використано постановки крайових задач, що враховують геометричну та (або) фізичну нелінійність деформування тонкої пластини, розроблено та обґрунтовано методи розрахунку її напружено-деформованого стану, такі як варіаційні методи (метод Рітца, Бубнова-Гальоркіна, найменших квадратів та ін.), локальні методи (метод малого параметра, послідовних наближень, метод Ньютона - Канторовича), метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод граничних елементів, доведено теореми існування і єдиності розв'язків.

Огляд класичних і некласичних моделей пластин з точки зору їх застосовності до опису деформацій зсуву з використанням методів динамічної та статичної ідентифікації на основі аналізу прогинів і частотних характеристик наведено у роботі [154]. Проблеми вибору математичних моделей в задачах ідентифікації обговорюються також у роботах [2, 74, 97].

У зв'язку із застосуванням в сучасних технічних пристроях нових матеріалів з широким спектром властивостей, в останні роки розробляються моделі з можливістю налаштування необхідних характеристик за допомогою невеликого числа параметрів. Так, в роботі [2] наведено спосіб побудови визначальних співвідношень пружного матеріалу при великих деформаціях, названий авторами механіко-геометричним моделюванням. На відміну від відомих підходів до опису даного виду деформування, що базуються на поданні питомої потенційної енергії деформації через інваріанти тензора деформацій, авторами пропонується моделювати співвідношення зв'язку «напруження-деформація» за допомогою віртуальної механічної конструкції. Конструкція являє собою систему лінійно-пружних пружин, які зображують

властивості зв'язків між гранями елементарного об'єму тіла. Характеристики жорсткості зв'язків розглядаються як інтегральні оцінки силових взаємодій загальної структури матеріалу. Вибором різних значень геометричних і фізичних параметрів можна надати моделі складну анізотропію.

Для розв'язання задач ідентифікації методом обернених задач було запропоновано багато аналітичних та числових підходів, призначених для виявлення дефектів та силових впливів у пружних тілах різної розмірності.

Більшість методів ідентифікації, що описано в літературі, використовують таку схему розв'язання задачі: параметризація задачі; розв'язання прямої задачі для заданих значень параметрів, що характеризують дефект; побудова цільового функціонала, який описує нев'язку між величинами, виміряними у випробуваннях, і величинами, отриманими із розв'язання прямої задачі; мінімізація функціоналу одним з відомих способів.

Прикладами використання описаної схеми розв'язання задачі ідентифікації є роботи [42, 48, 53-67, 87, 92, 114, 131, 152, 155, 165]. Так, в роботі [152] запропоновано підхід щодо ідентифікації дефектів в тонких пластинах на основі мінімуму функціоналу потенційної енергії. Спостережувані значення переміщень, які отримано при статичних випробуваннях, вводяться за допомогою множників Лагранжа як додаткові обмеження. Значення множників Лагранжа, а також шукані значення переміщень, які є наслідком присутності дефектів в пластині, знаходяться з умови стаціонарності функціоналу. Авторами наголошується, що даний підхід можна застосувати до різних типів дефектів в тонких пластинах.

Суттєвою перевагою вказаних методів ідентифікації є можливість їх використання навіть в тих випадках, коли дані випробувань відомі не на всій поверхні тіла, що досліджується, а тільки в скінченній множині точок (в точках спостережень) [67, 104, 131, 137, 138, 150, 164-169, 176, 178]. Так, в роботах G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset, S. Vessella [137, 165, 167, 169] зроблено оцінку про площу включень у тонкій неоднорідній пластині на

підставі даних про одне вимірювання значення зусиль в деяких точках на границі пластини.

До недоліків вказаних методів слід віднести можливу наявність кількох мінімумів функціоналу, невизначеність у виборі початкового наближення і залежність від нього результатів локальної мінімізації функціоналу. Крім того, протягом пошуку розв'язку задачі ідентифікації доводиться багаторазово виконувати розв'язання прямої задачі.

У деяких випадках невизначеність, що пов'язана з вибором початкового наближення, може бути знята за допомогою регуляризації цільового функціонала, наприклад, як це зроблено у роботі H. S. Lee [161].

При розв'язанні задач ідентифікації також використовуються алгоритми пошуку глобального мінімуму, що не потребують вибору початкового наближення. Так, у дослідженнях [10, 28, 160], в монографії G. E. Stavroulakis [184] для знаходження глобального мінімуму цільового функціонала використовувалися генетичні алгоритми. В роботі M. Khodadad, M. Dashti-Ardakani [160] отриманий глобальний мінімум розглядався у якості початкового наближення при подальшій локальній мінімізації цільового функціонала.

Основну складність, що виникає під час реалізації алгоритмів глобальної мінімізації, пов'язано з необхідністю обчислення цільового функціонала для великої кількості точок у просторі параметрів, що характеризують дефект. При цьому кожне обчислення цільового функціонала потребує розв'язання нової прямої задачі.

Зазначених недоліків не мають методи, що дозволяють визначати параметри дефекту без використання процедури мінімізації цільової функції. Так, в роботі G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset [138] розроблено метод отримання верхньої та нижньої оцінок об'єму поодинокого дефекту довільної форми в ізотропному лінійно пружному тілі для випадку, коли дефект – ізотропне лінійно пружне включення. Представлені в дослідженні оцінки записано через різницю пружних енергій тіла при наявності та

відсутності дефекту. Значення цієї різниці може бути обчисленим за даними про переміщення і зусилля на зовнішній границі тіла, отриманими в одноразовому статичному випробуванні.

Аналогічні оцінки для випадків жорсткого включення отримали автори робіт [167, 171]. У статті [167] також доведено єдиність та стійкість отриманого розв'язку задачі ідентифікації жорсткого включення у пластині. У дослідженні [168] запропоновано підхід для оцінювання площі включень в анізотропній пластині. Чисельні приклади використання розробленого G. Alessandrini в [138] методу ідентифікації дефектів розглянуті також в роботах [137, 166, 169, 170, 172].

1.4.1. Дефекти у вигляді включень та розрізів

Дефекти структури матеріалу у вигляді включень та порушення його суцільності у вигляді розрізів під час експлуатації тонкостінної системи є концентраторами істотних внутрішніх напружень. Найбільш небезпечними з точки зору механіки руйнування є дефекти у вигляді тріщин та розрізів, оскільки поля напружень, що виникають біля країв цих дефектів під дією робочого навантаження, сприяють їх розростанню, що зрештою призводить до неминучого руйнування конструкції.

Проблеми виявлення дефектів у тонких пластинах викликають значний інтерес науковців. Останнім часом з'явилася значна кількість робіт, присвячених ідентифікації включень та розрізів у тонких пластинах.

Задачі ідентифікації неоднорідностей у вигляді включень розглянуто у дослідженнях І. Ю. Цвелодуба [122-128, 186], В. В. Щербакова [133], А. Morassi [147, 166-171], Є. І. Шифріна, П.С. Шушпаннікова [178, 181], виявленню порушень суцільності матеріалу пластини у вигляді тріщин та розрізів в обмеженій або напівобмеженій області за додатковою інформацією про граничні поля переміщень присвячено численні роботи Л. Т. Бережницького [12,13], О. О. Ватульяна [23, 25, 27, 34, 35, 38],

Є. І. Шифріна, П.С. Шушпаннікова [131, 132, 179], В. В. Щербакова [133], G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset [137, 138], J. F. Song [183].

Досить повний огляд методів розв'язання обернених задач теорії тріщин, що розвиваються, представлено в роботах О. О. Ватульяна, А. Н. Соловйова та інших авторів [23, 25, 27, 34, 37].

В роботі [164] пропонується для моделювання зародження і розвитку тріщини в пружному тілі використовувати метод матеріальної точки (*МРМ*), який являє собою розширений варіант методу скінченних елементів з додатковими вузловими ступенями свободи. Як відомо, застосування методу скінченних елементів для моделювання тріщин і розрізів в суцільному середовищі передбачає використання спеціальних методик: адаптивних сіток, моделі когезійної зони, методу розпаду розривів та інше. Проте, зазначені методики дозволяють моделювати статичну тріщину, з моделюванням поширення тріщини виникають суттєві труднощі. Звичайний метод скінченних елементів не може описати розриви суцільного середовища всередині елемента, тріщини повинні поширюватися тільки уздовж границь елементів. Крім того, при зміні геометрії розрізу потрібно оновлення сітки, що призводить до високих обчислювальних витрат. Запропоноване авторами [164] удосконалення дозволяє моделювати тріщину в суцільному середовищі за допомогою однієї сітки однотипних скінченних елементів.

Особливу увагу науковці почали приділяти вивченню напружено-деформованого стану тонкої пластини з неоднорідностями у зв'язку з розробками композиційних та функціонально градієнтних матеріалів, які сьогодні використовуються в різних галузях науки та техніки. Тому досить часто під «включеннями» у пластинах автори досліджень розуміють підкріпні волокна, смуги або навіть шари матеріалу, пружні властивості яких відмінні від властивостей основного матеріалу пластини. Вказані наукові проблеми розглядаються в роботах О. О. Ватульяна [39, 41, 42], Р. Д. Недіна [175], Н. П. Лазарева [87], Н. В. Неустроевої [92], Я. М. Пастернака та Г. Т. Суліма [101]. В роботі І. Ю. Цвелодуба [125] показано, що задача

визначення напружено-деформованого стану в багатозв'язній пружній області є коректною в сенсі єдиності розв'язку. У роботах І. Ю. Цвелодуба [122, 123, 125] розв'язано обернену задачу визначення фізично нелінійного включення в лінійно-пружному середовищі. Це відкриває можливості для розробки методів розв'язання подібних задач для неоднорідних середовищ, до яких відносяться композити, наноматеріали.

Практичний інтерес мають також дослідження взаємодії між включеннями та тріщинами у тонкій пластині. Відповідні аспекти розглянуто у монографіях Л. Т. Бережницького, М. В. Делявського, В. В. Панасюка, М. Г. Стащука, М. П. Саврука [12,13, 122]. Внаслідок того, що наявність сторонніх включень та розрізів у тонкій пластині призводить до виникнення схожих збурень у системі, деякі автори вказують на можливість застосування математичного апарату, розробленого для одного типу дефектів, для дослідження іншого. Так в монографії [13], яку присвячено згину тонких пластин з дефектами типу тріщин, проведено паралель між тонкою тріщиною та гострокінцевим стороннім включенням. У роботі [48], у якій досліджується згин затисненої з усіх боків пластини з тонким лінійним включенням, зазначено, що межу між включенням та пластиною можна розглядати також як тріщину.

У дослідженні [156] розвинено підхід до розв'язання задач ідентифікації дефектів у лінійно-пружних тілах, заснований на використанні топологічної похідної (*topological derivative*). Значення топологічної похідною цільової функції відповідає змінюванню даної функції, пов'язаного із внесенням в однорідне пружне тіло дефекту нескінченно малого розміру. Найбільш ймовірне розташування дефекту відповідає точці, де топологічна похідна цільової функції має екстремум. Дана властивість топологічної похідною дозволяє використовувати її для вибору початкового наближення при локальній мінімізації цільової функції. Інше застосування топологічної похідною пов'язане із прискоренням алгоритмів глобальної мінімізації [154].

У роботі M.Burger [145] розглянуто ще один підхід до локальної мінімізації цільової функції при розв'язанні задачі ідентифікації дефекту у пластині, заснований на використанні так званого методу набору рівнів (*level-set method*). Як шукана характеристика дефекту виступає функція, один з рівнів якої відповідає границі дефекту. Основною перевагою методу набору рівнів є можливість ідентифікації дефектів без їх попередньої параметризації. Недоліки є загальними для більшості оптимізаційних методів: можлива наявність кількох мінімумів цільової функції, невизначеність у виборі початкового наближення та залежність від нього результатів мінімізації, складність комп'ютерної реалізації даного методу.

Вільними від зазначених недоліків є методи, що дозволяють визначати параметри дефекту (або деякі з них) без використання процедури мінімізації цільової функції. Так, в роботі [138] запропоновано метод отримання верхньої та нижньої оцінок для об'єму поодинокого дефекту довільної форми в ізотропному лінійно пружному тілі у випадку, коли дефект – ізотропне лінійно пружне включення. Оцінки об'єму дефекту записано через зміну пружної енергії тіла, що обумовлено наявністю дефекту. В обчисленнях використано дані статичного випробування про переміщення та зусилля на зовнішній границі тіла. Числові приклади використання розробленого в [138] методу надано також в роботі [143]. Аналогічні оцінки для випадків порожнини та жорсткого включення отримано в роботах [166, 167].

Метод ідентифікації параметрів поодинокого еліптичного дефекту (порожнини, жорсткого або лінійно пружного включення) в ізотропному лінійно пружному тілі, заснований на використанні асимптотичного розвинення розв'язку прямої задачі, запропоновано в роботі [181]. Вказаний метод було застосовано до визначення місця розташування дефекту і отримання оцінки його об'єму, також було отримано формули для визначення співвідношення півосей еліпса і його орієнтації, розглянуто чисельні приклади ідентифікації плоских кругових і еліптичних дефектів.

Недоліками розробленого в [181] методу ідентифікації є необхідність проведення 6 незалежних випробувань, а також складність використаного для знаходження параметрів дефекту математичного апарату, що суттєво ускладнює практичну реалізацію зазначеного методу.

У роботі [180] для розв'язання задачі ідентифікації сферичного дефекту у пружному тілі використовується метод, заснований на застосуванні функціоналу взаємності (*reciprocity gap functional*), який було запропоновано в дослідженні [139] для ідентифікації плоских поодиноких тріщин. У [180] показано, що для розв'язання задачі ідентифікації досить задати невідомі параметри дефекту (координати центру та лінійний розмір дефекту) через відмінні від нуля значення функціоналу взаємності. У випадках, коли дефект має канонічну форму (еліпсоїд, куля), застосування такого підходу дозволяє отримати опис геометричних параметрів дефекту (координати центру, розміри та орієнтацію) у вигляді явних аналітичних виразів. Крім того, у випадку, коли дефект є ізотропним лінійно пружним включенням, є можливим отримання аналітичних формул для визначення пружних властивостей включення.

В роботі [77] розвинено метод ідентифікації, заснований на застосуванні інваріантних інтегралів, отримано точні аналітичні формули для знаходження місця розташування, розміру та орієнтації плоскої тріщини в ізотропному лінійно пружному тілі за даними трьох статичних випробувань. В роботі [132] було доведено, що метод, заснований на застосуванні інваріантних інтегралів, і метод, заснований на застосуванні функціоналу взаємності, є еквівалентними.

На відміну від результатів, представлених в роботі [77], метод ідентифікації, який запропоновано у [180], а також отримані з його використанням аналітичні розв'язки, можуть бути застосованими як для плоских тріщин, так і для порожнин та включень (в тому числі жорстких), що мають еліпсоїдальну або не дуже відмінну від неї форму, а також для анізотропних пружних тіл. У той час як метод, що пропонується у [139],

передбачає проведення як мінімум двох різних вимірювань, у [132] - трьох, для запропонованого у [180] підходу досить провести лише одне вимірювання. Між тим, у [180] передбачається, що пружне тіло, яке містить дефект, є безмежним.

1.7. Реконструкція локальних силових впливів

Концепція вразливості тонкостінних елементів конструкцій при аварійних зовнішніх впливах (порив вітру, удар стороннього предмета, точковий тиск, викликаний іншими елементами конструкції) передбачає вивчення реального стану системи, що підпала під вплив. Для цього необхідно мати сучасні методики ідентифікації, які дозволяють локалізувати область, що зазнала впливу, визначити величину впливу, передбачити можливі наслідки, викликані вказаним впливом.

В дослідженнях, присвячених розв'язанню задач реконструкції зосереджених силових впливів, розглядаються питання реконструкції як просторового розподілу зовнішнього впливу, так і його залежності від часу (нестационарні процеси). Методологія розв'язання таких задач найчастіше передбачає, що реакція системи, а отже, й покази пов'язаних з системою датчиків, лінійно залежать від зовнішніх впливів та орієнтована на мінімізацію розбіжності між показами датчиків та результатами моделювання процесів в системі під дією реконструйованих впливів.

Методи ідентифікації локальних сил у тонкій пластині можна розділити на дві групи: методи, що використовують дані динамічних випробувань та методи, засновані на статичних випробуваннях. Серед методів першої групи можна назвати методи, що описані у монографіях О. О. Ватульяна [37] та М. Bonnet [144], методи, що застосовано у дослідженнях В. А. Костіна [84], Ю. Г. Одіокова [98], Є. Г. Янютіна [135]. Методи, що засновано на даних статичних випробувань, розглянуто в роботах Р. А. Сафронова [110], А. Р. Сковороди [113], Є. І. Шифріна та П. С. Шушпаннікова [131, 178], G. Alessandrini, A. Morassi та інших [137, 138,

166-172], M. Guo, H. Zhong [152], G. E. Stavroulakis [184] та в багатьох інших дослідженнях.

Як зазначається у ряді робіт [124, 147], наявність неминучих помилок у вимірах призводить, скоріше, до оцінювання шуканих функцій, ніж до визначення їх дійсних значень, а встановлення наближеної картини просторового розподілу є можливим лише у разі наявності апіорної інформації щодо характеру розподілу.

Серед значної кількості наявних методів ідентифікації зовнішніх силових впливів у тонкостінних елементах канонічної форми найбільший розвиток отримали методи, засновані на технології частотної області (*frequency domain technique*). Для тонкостінних елементів складної форми розв'язання задачі ідентифікації можливе лише з використанням наближених, числових методів, серед яких найбільш поширених є метод скінченних елементів.

Висновки до розділу 1

1. В даний час спостерігається підвищений інтерес науковців до розробки методів ідентифікації силових впливів та дефектів матеріалу у тонкій пластині у вигляді включень та розрізів методом обернених задач, що пов'язано з численністю їх прикладних застосувань.

2. В розглянутих роботах щодо ідентифікації дефектів у тонкій пластині переважно використовується розрахункова модель прямої задачі для виявлення об'єктів простої геометрії у необмеженій тонкій пластині.

3. Обернені задачі сформульовано в крайовій та в варіаційній постановках, для їх розв'язання застосовано методи обернення розв'язку прямої задачі, екстремальні методи. Сформульовані постановки та методи призводять до проблеми нестійких розв'язків, для усунення якої

використовуються методи регуляризації (регуляризація на компактних множинах, побудова квазірозв'язків, ітераційна регуляризація тощо).

4. Практично відсутні методики, що дозволяють одночасно виконати ідентифікацію місця розташування дефекту або локального силового впливу у тонкій пластині та визначити їх параметри.

5. У літературі відсутні дослідження особливостей ідентифікації дефектів структури матеріалу пластини у вигляді включень та розрізів в залежності від їх місця розташування та розмірів.

6. Залишаються недостатньо розвинутими способи реконструкції місця прикладання зосереджених силових впливів на поверхні тонкої пластини, а також величини вказаних впливів.

7. Для забезпечення можливості розв'язання задач ідентифікації силових впливів, включень та розрізів у тонкій пластині методом обернених задач на підставі спостережень за її деформуванням необхідно побудувати адекватну математичну модель, яка враховує неоднорідність напружено-деформованого стану пластини з вказаними дефектами та впливами, розробити числові методи та алгоритми, що дозволять врахувати особливості розв'язків прямих задач теорії тонких пластин.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРЯМОЇ ТА ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧ

2.1. Постановка оберненої задачі теорії пластин

Проблема ідентифікації в реальних тонкостінних системах точкових збурень, що не є проєктними, а виникають в процесі експлуатації внаслідок присутності в матеріалі дефектів або під впливом випадкових зосереджених сил, вимагає створення спеціальних підходів для забезпечення адекватного опису реальних структурних моделей зазначених систем.

Метод обернених задач відносно до задачі ідентифікації дефектів та силових впливів, полягає у визначенні параметрів, які описують вказані збурення, за відомими значеннями функцій, що характеризують деформований стан системи. У якості таких функцій можуть виступати пружні переміщення або деформації, які фіксуються за допомогою системи датчиків, що розміщені на поверхні тіла.

На підставі інформації про деформований стан реальної тонкої пластини визначаються просторова локалізація дефектів в системі та їх геометричні параметри, фізико-механічні властивості матеріалу, оцінюються наявні в системі навантаження, прогнозується реальна несуча здатність системи. Розв'язання обернених задач в даній постановці становить інтерес в разі високих рівнів навантаження, близьких до реальної несучої здатності в умовах експлуатації. Напружено-деформований стан такої системи описується нелінійними співвідношеннями відповідної прямої задачі.

Процес моделювання дійсного стану системи може бути організованим як послідовність наступних етапів:

- 1) встановлення існування нестандартної ситуації шляхом порівняння значень, що були отримані в результаті вимірювань дійсних характеристик напружено-деформованого стану, з їх проєктними (номінальними) значеннями;

2) локалізація області, в якій відхилення реальних параметрів від проектних перевищують допустимі значення, шляхом визначення її меж всередині області існування даної пластини;

3) формування гіпотез про можливі відхилення в зовнішніх або внутрішніх властивостях системи на підставі інформації про поведінку системи (визначення функцій, що характеризують напружено-деформований стан, значення яких максимально ухиляються від номінальних значень, та відповідних відхилень значень параметрів, що описують геометричні та фізичні властивості системи, а також характеристики зовнішнього впливу і граничних умов);

4) дослідження поведінки системи з різними гіпотезами про характер відхилень, що виникають в системі, із використанням різних моделей;

5) виділення основної гіпотези про причини відхилень шляхом використання спеціальної метрики та оцінки в цій метриці відстаней між можливими моделями дійсності.

Під моделлю дійсності мається на увазі математична модель системи, що є адекватною її реальному стану з точки зору відповідності відгуків, в якості яких виступають результати вимірювань, результатам розрахунків з використанням зазначеної моделі.

Стосовно до задач теорії пластин обернену задачу можна сформулювати наступним чином: вектор-функція переміщень тонкостінного пластинчастого елемента $U(X, H)$ в обмеженій області $\Omega = \{X | X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3\}$ (область може бути й багатозв'язною) у випадку пружного деформування описується співвідношеннями:

$$G(H(X), U(X)) = V(X) \quad (2.1)$$

$$\text{при } G^{\Gamma}(H^{\Gamma}(X), U(X)) \Big|_{X=X^{\Gamma} \in \Gamma} = 0, \quad (2.2)$$

де $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор просторових координат;

Γ – контур області Ω ;

$G(\cdot), G^{\Gamma}(\cdot)$ – задані диференціальні оператори всередині області Ω і на контурі Γ ;

$V(X)$ – функція, що описує зовнішній вплив;

$H(X)$ – функції, які входять в диференціальні оператори та характеризують властивості моделі.

Розв'язання оберненої задачі передбачає за відомими результатами спостережень за деформацією пластини $\sigma(U(X), H(X))$, отриманими шляхом вимірювання значень функції, що характеризує напружено-деформований стан пластини в точках X_p

$$\sigma(U(X), H(X))|_{X=X_p} = \sigma_p^*, \quad p = \overline{1, N}, \quad (2.3)$$

визначення характеристик $H(X)$, $H(X)^{\Gamma}$ моделі спостережуваної системи, які описують:

- 1) місце розташування жорстких включень в матеріалі пластини;
- 2) точки прикладання зосереджених силових впливів;
- 3) місце розташування вершин розрізу.

Напружено-деформований стан є спостережуваним, якщо для будь-яких двох розв'язків $\sigma(U(X), H(X))|_{X=X_{p_1}}$ та $\sigma(U(X), H(X))|_{X=X_{p_2}}$ для різних систем з числа 1 - 3 (відповідно до введеної класифікації обернених задач теорії пластин) виміряні значення $\sigma_{p_1}^*$ і $\sigma_{p_2}^*$ відрізняються і рівність $\sigma_{p_1}^* = \sigma_{p_2}^*$ означає, що $\sigma(U(X), H(X))|_{X=X_{p_1}} \equiv \sigma(U(X), H(X))|_{X=X_{p_2}}$.

Основні проблеми, що виникають при дослідженні вказаних задач, полягають в необхідності:

- визначення операторного зв'язку між невідомими характеристиками системи та виміряними в експерименті фізичними величинами;
- вибору параметрів, що підлягають вимірюванню;
- вибору відповідної метрики.

Відповідно до визначення коректно поставленої задачі, введеного Ж. Адамаром [130], сформульовані задачі є некоректними з таких причин:

1) порушено умови існування розв'язку: $\forall \sigma^* \in \bar{U} \exists H(X) \in \bar{H}$ (розв'язок існує для будь-якої правої частини), де $\bar{U}$ – множина спостережуваних станів, що описують поведінку пластини, $\bar{H}$ – множина невідомих характеристик пластини. За визначенням множини $\bar{U}$, властивості її елементів визначаються властивостями даного об'єкту дослідження та використанням диференційним оператором $G(H(X), U(X))$. Враховуючи, що елемент $\sigma^* \in \bar{U}$ отримано шляхом вимірювань (які можуть мати похибку), цілком можливо, що елемент $\sigma^* \notin \bar{U}$;

2) є можливим порушення єдиності розв'язку рівняння (2.1) в зв'язку з нелінійністю оператора $G(H(X), U(X))$ математичної моделі прямої задачі;

3) порушується умова безперервності розв'язку від даних задачі (умова стійкості розв'язку), тобто малим збуренням величини $\sigma^* \in \bar{U}$ можуть відповідати великі збурення $H(X)$, характеристика об'єкта при цьому спотворюється.

Для подолання некоректності існують два підходи:

1) умовно-коректна постановка оберненої задачі, заснована на залученні додаткової інформації про шуканий розв'язок. У дослідженнях А. М. Тихонова [130] показано, що для стійкості розв'язку оберненої задачі досить, щоб множина, на якій визначається розв'язок, була компактною;

2) використання спеціальних регуляризуючих алгоритмів [9, 122, 130, 131] для розв'язання некоректно поставлених задач.

У дослідженні використовується варіаційне формулювання задачі у поєднанні з умовно-коректною постановкою. Здійснюється перехід до задачі мінімізації функціоналу потенційної енергії системи «пластина-зовнішні сили» з урахуванням додаткових обмежень на «відстань» ρ між деякими функціями $\sigma(U(X), H(X))$ та σ^* , що характеризують розрахунковий і вимірний в результаті експерименту напружено-деформований стан

пластини, в метриці простору W . Функціональний простір W , метрика $\rho_w(\sigma(U(X), H(X)), \sigma^*)$, а також функції $\sigma(U(X), H(X))$ та σ^* , що підлягають порівнянню, повинні бути обраними з урахуванням специфіки властивостей розв'язків даної прямої задачі.

Таким чином, розв'язок оберненої задачі, знайдений з умови мінімуму сформульованого функціонала, дозволяє визначити значення невідомих властивостей системи за вимірними характеристиками її напружено-деформованого стану. Однак використання такого підходу при числовій реалізації може викликати серйозні труднощі, пов'язані з тим, що із збіжності по функціоналу не випливає збіжність наближених розв'язків до справжнього розв'язку. Крім того, можлива похибка вимірювань величини σ^* може призвести до необхідності розв'язувати обернену задачу з неточними даними, а отриманий розв'язок може виявитися нестійким.

Відомо, що загальний принцип розв'язання задач, які призводять до нестійких розв'язків, полягає в побудові регуляризуючих операторів [130]. У деяких окремих випадках невідомі функції задачі можуть бути обмежені на області визначення за допомогою апіорно заданих величин, що визначаються конструктивними або технологічними особливостями процесу, тим самим штучно вводиться множина коректності, на якій розв'язок задачі буде стійким. Крім того, регуляризація може здійснюватися шляхом вдалого вибору функціональних просторів W і врахування обмежень на властивості розв'язків $H(X)$, так, щоб їх пошук здійснювався на компактній множині, а залежність розв'язку оберненої задачі $H(X)$ від розв'язку прямої задачі $\sigma(U(X), H(X))$ була монотонною.

Таким чином, для розв'язання задачі ідентифікації як оберненої задачі, необхідно:

- сформулювати розрахункові моделі для опису процесу нелінійного деформування тонких пластин в умовах дії невідомих локальних

навантажень при наявності в матеріалі пластини жорстких включень та розрізів;

- розробити метод обернених задач стосовно до спостережуваних деформованих пластин для визначення перерахованих вище невідомих функцій, сформулювати обернену задачу в варіаційній постановці шляхом вибору функцій стану $\sigma(U(X), H(X))$, що підлягають вимірюванню, спеціального метричного простору і норми в цьому просторі;

- розвинути чисельно-аналітичні й числові методи, а також розробити алгоритми для реалізації методу обернених задач, дослідити особливості процесу ідентифікації в залежності від властивостей розв'язків задачі про деформування пластини;

- сформулювати і розв'язати за допомогою розробленого підходу і алгоритмів числової реалізації задачі про реконструкцію зосереджених зовнішніх впливів, геометричних та фізико-механічних параметрів точкових включень, внутрішніх граничних контурів у тонкостінній системі;

- зіставити отримані результати розв'язання вказаних задач ідентифікації з відомими з літератури розв'язками аналогічних задач.

Слід зазначити, що успіх у розв'язанні обернених задач залежить від побудови ефективних способів розв'язання прямих задач, важливими аспектами при дослідженні яких є розробка математичної моделі і методу розв'язання, виявлення властивостей і особливостей розв'язків, аналіз питань їх існування, єдиності, коректності, а також від побудови ефективних алгоритмів відновлення невідомих характеристик тонкостінної системи.

2.2. Математична модель оберненої задачі

2.2.1. Опис функцій, що характеризують пряму і обернену задачі

Розглядається тонка пластина, яка перебуває під дією заданого експлуатаційного навантаження (рис. 2.1). В пластині можуть бути присутні точкові включення (зображено точками), пружні характеристики яких відрізняються від відповідних характеристик матеріалу пластини.

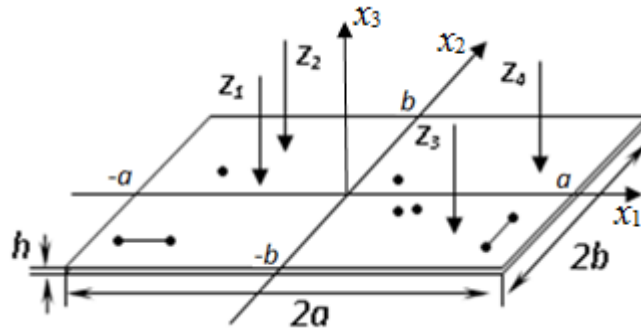


Рис. 2.1 – Модель пластини для задач ідентифікації локальних силових впливів та дефектів у тонкій пластині:

$2a$, $2b$ – лінійні розміри пластини; h – товщина пластини;

$X = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор координат точок пластини;

$-a \leq x_1 \leq a$, $-b \leq x_2 \leq b$, $-h/2 \leq x_3 \leq h/2$, $h \ll a, b$.

Система може перебувати під дією зосереджених сил (зображено стрілками), відмінних від номінального навантаження. В пластині можлива наявність поздовжніх або поперечних розрізів (зображено відрізками).

Математична модель оберненої задачі для досліджуваної пластини містить в собі математичну модель прямої задачі, яка встановлює зв'язок між наявністю зазначених збурень та деформацією пластини, а також спосіб обернення цього зв'язку з метою визначення причин за відомими наслідками, тобто структури моделі за спостережуваним деформованим станом.

Деформований стан тонкостінного елемента в просторовій області $\Omega = \{X \mid X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3\}$ описується вектор-функцією переміщень $U(X, H(X))$, яка залежить від невідомих функцій $H(X)$ оберненої задачі:

$$U(X, H(X)) \equiv (\bar{u}_i(X, H(X)), \bar{w}(X, H(X))), \quad (2.4)$$

де $\bar{u}_i(X, H(X))$, $i = 1, 2$ – переміщення в напрямках x_1 , x_2 точок серединної поверхні пластини;

$\bar{w}(X, H(X))$ – нормальні переміщення точок серединної поверхні пластини.

Для визначення вектор-функції деформованого стану пластини $U(X, H(X))$ сформульовано систему розв'язуючих співвідношень прямої задачі теорії пластин з використанням наступних позначень:

$\widehat{E}_0(X)$, ν –модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини;

$\widehat{V}(X)$ – функція зовнішнього впливу;

$\widehat{T}_{ij}$, $\widehat{M}_{ij}$ – тангенціальні зусилля, згинальні та крутні моменти;

$\widehat{Q}_{ij}$ – поперечні сили;

$\widehat{\varepsilon}_{ij}$, $\widehat{\chi}_{ij}$ – складові тангенціальної та згинальної деформацій серединної поверхні;

$i, j = 1, 2$.

Для формулювання задач ідентифікації вводяться функції $H^d(X)$, $d = \overline{1, 3}$, які описують невідомі оберненої задачі з відповідними областями визначення, що враховують додаткову інформацію про кількісні характеристики невідомих функцій.

Відповідно з постановкою задач вводяться вектор-функції:

- 1) $H^1(X)$ – характеризує множину точок $X = \{X_k^1\}$, в яких присутні включення з модулем пружності $E^* = \{E_k^*\}$, $\underline{E} \leq E_k^* \leq \overline{E}$, $k = \overline{1, K}$;
- 2) $H^2(X)$ – характеризує множину точок $X = \{X_k^2\}$, в яких прикладено силові впливи $Z^* = \{Z_k^*\}$, $\underline{Z} \leq Z_k^* \leq \overline{Z}$, $k = \overline{1, K}$;
- 3) $H^3(X)$ – визначає місце розташування вершин розрізу $X = \{X_k^3\}$; $k = \overline{1, K}$.

Тут $H^d(X) = \delta(X - X_k^d)$, $X_k^d \in \Omega$, $d = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, K}$, $\delta(\cdot)$ – δ - функція Дірака, X_k^d , $d = \overline{1, 3}$ – точка пластини, де є присутнім локальне збурення.

Врахування додаткової інформації про невідомі функції і поведінку системи дозволяє розв'язати обернену задачу на множині $\overline{H}$ з відповідними кількісними і якісними обмеженнями на розв'язок.

2.2.2. Математична модель прямої задачі нелінійної теорії пластин

До основних співвідношень теорії пружності, розв'язання яких дозволяє повністю описати напружено-деформований стан тонкостінного елемента пластини, відносяться такі групи співвідношень:

- геометричні співвідношення, що зв'язують деформації елемента пластини з функціями, які виражають переміщення його точок;
- фізичні співвідношення, що виражають залежність між напруженнями та деформаціями елемента пластини;
- статичні рівняння, що визначають умови рівноваги елемента пластини.

2.2.2.1. Геометричні та фізичні співвідношення

У якості геометричних співвідношень приймемо нелінійні співвідношення теорії В. В. Новожилова, що пов'язують деформації та переміщення точок серединної поверхні пластини, які побудовано у припущенні про малість деформацій і квадратів кутів повороту в порівнянні з одиницею. У такому разі складові компонент тензора тангенціальної $\hat{\varepsilon}_{ij}$ та згинальної $\hat{\chi}_{ij}$ деформацій визначатимуться таким чином:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{11} &= \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \right)^2, \\ \hat{\varepsilon}_{22} &= \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right)^2, \\ \hat{\varepsilon}_{12} &= \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2},\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\hat{\chi}_{11} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_1^2}, \quad \hat{\chi}_{22} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_2^2}, \quad \hat{\chi}_{12} = 2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_1 \partial x_2}.\tag{2.6}$$

Поперечні зсуви $\hat{\varepsilon}_{i3}$, $i=1,2$ і поперечна деформація малі в порівнянні з іншими компонентами тензора деформацій і приймаються такими, що дорівнюють нулю.

Припустимо також, що для тонкостінних конструкцій справедлива кінематична гіпотеза прямих нормалей, в такому разі розподіл переміщень і деформацій по товщині пластини підпорядковується лінійному закону.

Відповідно до гіпотези Кірхгофа-Лява переміщення і деформації для шару, віддаленого від серединної поверхні пластини на відстань x_3 , апроксимуються лінійними функціями:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_i(X) &= \hat{u}_i(x_1, x_2) + x_3 \frac{\partial \hat{w}(x_1, x_2)}{\partial x_i}, \\
\hat{w}(X) &= \hat{w}(x_1, x_2), \\
\hat{e}_{ij}(X) &= \hat{e}_{ij}(x_1, x_2) + x_3 \hat{\chi}_{ij}(x_1, x_2), \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Враховуючи неоднорідність матеріалу пластини будемо вважати, що пружні сталі матеріалу пластини залежать від x_1, x_2, x_3 . Припустимо, що функція $\hat{E}(x_1, x_2, x_3)$ є кусковогладкою функцією, і матеріал пластини є регулярним.

Для матеріалу пластини при наявності включень пружні характеристики будуть визначатися співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
\hat{D}^{1111}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\hat{E}(x_1, x_2, x_3)}{(1-\nu^2)} = \frac{\hat{E}_0(x_1, x_2, x_3) + \sum_k (\hat{E}_k^*(x_1, x_2, x_3) - \hat{E}_0(x_1, x_2, x_3)) H^1(X)}{(1-\nu^2)}, \\
\hat{D}^{1122}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\hat{E}(x_1, x_2, x_3)\nu}{(1-\nu^2)} = \frac{\left(\hat{E}_0(x_1, x_2, x_3) + \sum_k (\hat{E}_k^*(x_1, x_2, x_3) - \hat{E}_0(x_1, x_2, x_3)) H^1(X) \right) \nu}{(1-\nu^2)}, \\
\hat{D}^{1212}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\hat{E}(x_1, x_2, x_3)}{2(1+\nu)} = \frac{\hat{E}_0(x_1, x_2, x_3) + \sum_k (\hat{E}_k^*(x_1, x_2, x_3) - \hat{E}_0(x_1, x_2, x_3)) H^1(X)}{2(1+\nu)}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

де функція $\hat{E}_0(x_1, x_2, x_3)$ характеризує пружні властивості матеріалу пластини, а $\hat{E}_k^*(x_1, x_2, x_3)$ – пружні властивості включень, що розташовані у точках X_k .

З огляду на симетричну по товщині будову пластини, будемо вважати, що пружні постійні $\hat{E}(x_1, x_2, x_3)$ є парними функціями x_3 , тоді функції, які описують жорсткість пластини на розтягування-стиснення і жорсткість згину, можуть бути надані у вигляді:

$$\hat{C}_1^{ij tq}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{D}^{ij tq}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \tag{2.9}$$

$$\hat{C}_2^{ij tq}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{D}^{ij tq}(x_1, x_2, x_3) (x_3)^2 dx_3. \tag{2.10}$$

Тут та далі $i, j, t, q = 1, 2$; якщо $i \neq j$, тоді $t \neq q$, і позмінно $t = 1, q = 2$; $t = 2, q = 1$.

Виконуючи процедуру інтегрування співвідношень (2.9) і (2.10) з врахуванням (2.8), отримаємо

$$\begin{aligned}
 \widehat{C}_1^{1111}(H^1(X)) &= \frac{(\widehat{E}_0(x_1, x_2) + \sum_k (\widehat{E}_k^*(x_1, x_2) - \widehat{E}_0(x_1, x_2))H^1(X))\widehat{h}}{(1 - \nu^2)}, \\
 \widehat{C}_1^{1122}(H^1(X)) &= \frac{(\widehat{E}_0(x_1, x_2) + \sum_k (\widehat{E}_k^*(x_1, x_2) - \widehat{E}_0(x_1, x_2))H^1(X))\widehat{h}\nu}{(1 - \nu^2)}, \\
 \widehat{C}_1^{1212}(H^1(X)) &= \frac{(\widehat{E}_0(x_1, x_2) + \sum_k (\widehat{E}_k^*(x_1, x_2) - \widehat{E}_0(x_1, x_2))H^1(X))\widehat{h}}{2(1 + \nu)}, \\
 \widehat{C}_2^{1111}(H^1(X)) &= \frac{(\widehat{E}_0(x_1, x_2) + \sum_k (\widehat{E}_k^*(x_1, x_2) - \widehat{E}_0(x_1, x_2))H^1(X))\widehat{h}^3}{(1 - \nu^2)}, \\
 \widehat{C}_2^{1122}(H^1(X)) &= \frac{(\widehat{E}_0(x_1, x_2) + \sum_k (\widehat{E}_k^*(x_1, x_2) - \widehat{E}_0(x_1, x_2))H^1(X))\widehat{h}^3\nu}{(1 - \nu^2)}, \\
 \widehat{C}_2^{1212}(H^1(X)) &= \frac{(\widehat{E}_0(x_1, x_2) + \sum_k (\widehat{E}_k^*(x_1, x_2) - \widehat{E}_0(x_1, x_2))H^1(X))\widehat{h}^3}{2(1 + \nu)}. \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

Функції зусиль $\widehat{T}_{ij}$ та моментів $\widehat{M}_{ij}$ вводяться з використанням інтегральних характеристик аналогічно [50], тоді зв'язки між зусиллями і складовими тангенціальної деформації, моментами і складовими деформації згином, що відповідають закону Гука, задаються формулами

$$\begin{aligned}
 \widehat{T}_{11} &= \widehat{C}_1^{1111}(H^1(X))\widehat{\varepsilon}_{11} + \widehat{C}_1^{1122}(H^1(X))\widehat{\varepsilon}_{22}, \\
 \widehat{T}_{22} &= \widehat{C}_1^{1122}(H^1(X))\widehat{\varepsilon}_{11} + \widehat{C}_1^{1111}(H^1(X))\widehat{\varepsilon}_{22}, \\
 \widehat{T}_{12} &= 2\widehat{C}_1^{1212}(H^1(X))\widehat{\varepsilon}_{12}, \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{M}_{11} &= \widehat{C}_2^{1111}(H^1(X))\widehat{\chi}_{11} + \widehat{C}_2^{1122}(H^1(X))\widehat{\chi}_{22}, \\
 \widehat{M}_{22} &= \widehat{C}_2^{1122}(H^1(X))\widehat{\chi}_{11} + \widehat{C}_2^{1111}(H^1(X))\widehat{\chi}_{22}, \\
 \widehat{M}_{12} &= 2\widehat{C}_2^{1212}(H^1(X))\widehat{\chi}_{12}. \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Функції $\widehat{C}_1^{ijta}(H^1(X))$, $\widehat{C}_2^{ijta}(H^1(X))$ залежать від невідомих функцій оберненої задачі $H^1(X)$.

2.2.2.2. Рівняння рівноваги

Стан тонкостінного пластинчастого елемента за наявності зовнішніх силових впливів описується системою рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{T}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{T}_{12}}{\partial x_2} + \hat{V}_1(X, H^2(X)) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{T}_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{T}_{22}}{\partial x_2} + \hat{V}_2(X, H^2(X)) &= 0.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Проектуючи зусилля $\hat{T}_{ij}$ на нормаль до поверхні пластини і підставляючи рівняння моментів (2.13) відносно осей x_1, x_2 , отримаємо ще одне рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{M}_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{M}_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{M}_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\hat{T}_{11} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\hat{T}_{12} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\hat{T}_{12} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\hat{T}_{22} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} \right) + \hat{V}_3(X, H^2(X)) &= 0,\end{aligned}\quad (2.15)$$

де $\hat{V}_1(X, H^2(X)), \hat{V}_2(X, H^2(X)), \hat{V}_3(X, H^2(X))$ – проекції зовнішньої сили $\hat{V}(X, H^2(X))$, яка спричиняє деформування тонкостінного елемента, на осі x_1, x_2, x_3 відповідно; при наявності зосереджених силових впливів $\hat{Z}_k^*(X)$ в точках $X_k, k = \overline{1, K}$, компоненти зовнішньої сили визначаються як $\hat{V}_i(X, H^2(X)) = \hat{q}_i(X) + \sum_k \hat{Z}_{i_k}^*(X) \cdot H^2(X), i = \overline{1, 3}$, де $\hat{q}(X)$ – функція невідомого поверхневого навантаження; $X = (x_1, x_2)$ – вектор координат, пов'язаних з серединною поверхнею пластини.

2.2.2.3. Розв'язуючі співвідношення

Для формулювання розв'язуючих співвідношень прямої задачі введемо систему безрозмірних величин:

$$\begin{aligned}\xi_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{b}, \quad X = \{\xi_1, \xi_2\}; \quad u_1 = \frac{\hat{u}_1}{a}, \quad u_2 = \frac{\hat{u}_2}{b}, \quad w = \frac{\hat{w}}{h}; \\ \varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij}, \quad \chi_{ij} = a \hat{\chi}_{ij}, \quad i, j = \overline{1, 2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\widehat{E}(\xi_1, \xi_2)}{\widehat{E}_0(\xi_1, \xi_2)}; \\
T_{ij} &= \frac{\widehat{T}_{ij} a}{\widehat{E}_0 h^2 \varepsilon^2} (1 - \nu^2), \quad M_{ij} = \frac{\widehat{M}_{ij} a}{\widehat{E}_0 h^4 \varepsilon^2} (1 - \nu^2), \quad i, j = 1, 2; \\
C_1^{ij tq}(H^1(X)) &= \frac{\widehat{C}_1^{ij tq}(H^1(X))}{\widehat{E}_0 h}, \quad C_2^{ij tq}(H^1(X)) = \frac{\widehat{C}_2^{ij tq}(H^1(X))}{\widehat{E}_0 h^3}, \quad i, j, t, q = 1, 2; \\
q(X) &= \frac{\widehat{q}(X) \widehat{a}}{\widehat{E}_0 \widehat{h}^2} (1 - \nu^2), \quad Z(X) = \frac{\widehat{Z}(X) \widehat{a}}{\widehat{E}_0 \widehat{h}} (1 - \nu^2),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

де $(\cdot)$ – розмірні функції; $\varepsilon = \frac{h^2}{\sqrt{12}a^2}$ – параметр.

Безрозмірні функції, що використовуються в роботі, мають ті ж позначення, що і відповідні їм розмірні функції, при цьому дугу над позначенням безрозмірної функції опущено.

Функції невідомих оберненої задачі $H^d(X)$, $d = \overline{1,3}$, подаються в безрозмірній формі відповідно до введеної системи безрозмірних величин.

Для подання рівнянь рівноваги (2.14), (2.15) через компоненти вектор-функції переміщень задамо зусилля T_{ij} і моменти M_{ij} через переміщення серединної поверхні пластини, підставляючи (2.5), (2.6) в (2.12) та (2.13) відповідно:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= C_1^{1111}(H^1(X)) \left[\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right] + C_1^{1122}(H^1(X)) \left[\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right], \\
T_{22} &= C_1^{1122}(H^1(X)) \left[\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right] + C_1^{1111}(H^1(X)) \left[\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right], \\
T_{12} &= 2C_1^{1212}(H^1(X)) \left[\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right];
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= C_2^{1111}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + C_2^{1122}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}; \\
M_{22} &= C_2^{1122}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + C_2^{1111}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}, \\
M_{12} &= 2C_2^{1212}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Підставляючи в рівняння рівноваги (2.14), (2.15) вирази для зусиль і моментів (2.17), (2.18) і враховуючи симетричність функцій, що описують жорсткість системи на розтягнення - стискання та згинальну жорсткість, отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь з трьома невідомими функціями u_1 , u_2 , w , що описують деформований стан пластини:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[C_1^{1111}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right) + C_1^{1122}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[C_1^{1212}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \right] + V_1(X, H^2(X)) = 0; \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[C_1^{1212}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[C_1^{1122}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + C_1^{1111}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) \right] + V_2(X, H^2(X)) = 0; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \left(C_2^{1111}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + C_2^{1122}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left(C_2^{1212}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \left(C_2^{1122}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + C_2^{1111}(H^1(X)) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} \right) \right] + \\ & + \left[C_1^{1111}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right) + C_1^{1122}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + \\ & + 2 C_1^{1212}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \\ & + \left[C_1^{1122}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right) + C_1^{1111}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(C_1^{1111}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right) + C_1^{1122}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(C_1^{1212}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \right) \right] \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(C_1^{1122}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right) + C_1^{1111}(H^1(X)) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(C_1^{1212} (H^1(X)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \right) \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + V_3(X, H^2(X)) = 0. \quad (2.21)$$

2.2.2.4. Умови закріплення пластини

До розв'язуючих співвідношень (2.19) - (2.21) необхідно приєднати умови закріплення граничного контуру пластини і умови на внутрішніх контурах області Ω .

На опорних контурах Γ пластини потрібне виконання умов:

$$\begin{aligned} w|_{\Gamma} &= w^* & \text{або} & & Q_{ii}|_{\Gamma} &= Q_{ii}^*, \\ u_i|_{\Gamma} &= u_i^* & \text{або} & & T_{ij}|_{\Gamma} &= T_{ij}^*, \\ \frac{\partial w}{\partial \xi_i}|_{\Gamma} &= \frac{\partial w^*}{\partial \xi_i} & \text{або} & & M_{ij}|_{\Gamma} &= M_{ij}^*, \end{aligned} \quad (2.22)$$

де u_i^* , w^* , $\frac{\partial w^*}{\partial \xi_i}$, T_{ij}^* , M_{ij}^* , Q_{ij}^* , – задані значення відповідних функцій на зовнішньому контурі пластини Γ , $i, j = 1, 2$.

При наявності у системі дефектів у вигляді поздовжніх ($\xi_2 = \text{const}$) або поперечних ($\xi_1 = \text{const}$) розрізів, на їх берегах $\Gamma_p^{\pm}(H^3(X))$ повинні виконуватися умови:

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{\pm}(H^3(X))|_{\xi_2=\text{const}} : T_{22} &= 0; T_{12} = 0; & M_{22} &= 0; & Q_{22} &= 0; \\ \Gamma_p^{\pm}(H^3(X))|_{\xi_1=\text{const}} : T_{11} &= 0; T_{12} = 0; & M_{11} &= 0; & Q_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Позначимо через $U^{\pm}(X, H^3(X)) = \left\{ u_i^{\pm}, w^{\pm}, \frac{\partial w^{\pm}}{\partial \xi_i} \right\}$, $i = 1, 2$ вектор-функцію узагальнених переміщень на берегах розрізу. При виконанні умов (2.23) значення переміщень $u_i^{\pm}$, $w^{\pm}$ і поперечних зсувів $\frac{\partial w^{\pm}}{\partial \xi_i}$, $i = 1, 2$ вільні.

Система рівнянь (2.19) - (2.21) спільно з геометричними граничними умовами (2.22), (2.23) описує нелінійну поведінку тонких пластин.

При формулюванні різних крайових задач для системи (2.19) - (2.21) можна комбінувати будь-який варіант геометричних і будь-який варіант статичних граничних умов.

Таким чином, задача про визначення компонент напружено-деформованого стану тонкостінної системи зводиться до побудови та дослідження системи нелінійних диференціальних рівнянь (2.19) - (2.21) з граничними умовами (2.22), (2.23), обраними відповідно до постановки задачі.

2.3. Варіаційна постановка прямої задачі нелінійної теорії пластин

Сформулюємо варіаційну постановку прямої задачі, що є еквівалентною до нелінійної крайової задачі (2.19) - (2.23). За допомогою такого підходу розв'язок $U(X)$ зазначеної крайової задачі може бути отриманим в результаті визначення точки стаціонарності функціонала $J(U(X), H^d(X))$. Тоді для деякої фіксованої функції $H^d(X)$ розв'язок прямої задачі деформування пластини може бути записано як

$$U(X) = \arg \min_U J(U(X), H^d(X)), \quad U \in \bar{U}.$$

Функціонал повної енергії досліджуваної системи подається у вигляді суми потенційної енергії деформації пластини і потенціалу зовнішнього силового впливу і, з урахуванням виразів для зусиль і моментів (2.12) та (2.13), набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \Pi(U(X), H^d(X)) = & \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[C_1^{1111}(H^1(X)) \varepsilon_{11}^2(\xi_1, \xi_2) + 2\nu C_1^{1122}(H^1(X)) \varepsilon_{11}(\xi_1, \xi_2) \varepsilon_{22}(\xi_1, \xi_2) + \right. \\ & + 2(1-\nu) C_1^{1212}(H^1(X)) \varepsilon_{12}^2(\xi_1, \xi_2) + C_1^{2222}(H^1(X)) \varepsilon_{22}^2(\xi_1, \xi_2) + \varepsilon^2 (C_2^{1111}(H^1(X)) \chi_{11}^2(\xi_1, \xi_2) + \\ & + 2\nu C_2^{1122}(H^1(X)) \chi_{11}(\xi_1, \xi_2) \chi_{22}(\xi_1, \xi_2) + 2(1-\nu) C_2^{1212}(H^1(X)) \chi_{12}^2(\xi_1, \xi_2) + C_2^{2222}(H^1(X)) \chi_{22}^2(\xi_1, \xi_2)) - \\ & - (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 w) - \sum_k (Z_{1(k)} u_1 + Z_{2(k)} u_2 + Z_{(k)} w) H^2(X) \left. \right] d\xi_1 d\xi_2 - \\ & - \int_{\substack{\Gamma \\ \xi_1 = \text{const}}} \left(T_{11}^* u_1 + T_{12}^* u_2 + M_{11}^* \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \bar{Q}_{11}^* w \right) d\xi_2 - \int_{\substack{\Gamma \\ \xi_2 = \text{const}}} \left(T_{12}^* u_1 + T_{22}^* u_2 + M_{22}^* \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \bar{Q}_{22}^* w \right) d\xi_1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\text{де } \bar{Q}_{ii}^* = \frac{\partial M_{ii}^*}{\partial \xi_i} + \frac{\partial M_{ij}^*}{\partial \xi_j} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(T_{ii}^* \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(T_{ij}^* \frac{\partial w}{\partial \xi_j} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

Для виключення із числа попередніх умов нелінійних геометричних співвідношень (2.5), (2.6), граничних умов (2.22) на зовнішньому та (2.23) на внутрішньому контурах області відповідно, приєднаємо їх до функціонала (2.24) за допомогою множників Лагранжа. Записуючи умови стаціонарності отриманого функціонала, до яких входять невідомі множники Лагранжа, та визначаючи значення множників, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} J(U(X), H^d(X)) = & \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[C_1^{1111}(H^1(X)) \varepsilon_{11}^2(\xi_1, \xi_2) + \right. \\ & + 2\nu C_1^{1122}(H^1(X)) \varepsilon_{11}(\xi_1, \xi_2) \varepsilon_{22}(\xi_1, \xi_2) + \\ & + 2(1-\nu) C_1^{1212}(H^1(X)) \varepsilon_{12}^2(\xi_1, \xi_2) + C_1^{2222}(H^1(X)) \varepsilon_{22}^2(\xi_1, \xi_2) + \\ & + \varepsilon^2 \left(C_2^{1111}(H^1(X)) \chi_{11}^2(\xi_1, \xi_2) + 2\nu C_2^{1122}(H^1(X)) \chi_{11}(\xi_1, \xi_2) \chi_{22}(\xi_1, \xi_2) + \right. \\ & + 2(1-\nu) C_2^{1212}(H^1(X)) \chi_{12}^2(\xi_1, \xi_2) + C_2^{2222}(H^1(X)) \chi_{22}^2(\xi_1, \xi_2) \left. \right) - \\ & - (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 w) - \sum_k (Z_{1(k)} u_1 + Z_{2(k)} u_2 + Z_{(k)} w) H^2(X) + \\ & + T_{11}(\xi_1, \xi_2) \left[\varepsilon_{11}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right] + \\ & + T_{22}(\xi_1, \xi_2) \left[\varepsilon_{22}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] + \\ & + T_{12}(\xi_1, \xi_2) \left[\varepsilon_{12}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[M_{11}(\xi_1, \xi_2) \left(\chi_{11}(\xi_1, \xi_2) - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right) + M_{22}(\xi_1, \xi_2) \left(\chi_{22}(\xi_1, \xi_2) - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) + \right. \\ & + M_{12}(\xi_1, \xi_2) \left(\chi_{12}(\xi_1, \xi_2) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) \left. \right] d\xi_1 d\xi_2 - \\ & - \int_{\substack{\Gamma \\ \xi_1 = \text{const}}} \left(T_{11}^* u_1 + T_{12}^* u_2 + M_{11}^* \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \bar{Q}_{11}^* w \right) d\xi_2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\substack{\Gamma \\ \xi_1 = \text{const}}} \left((u_1^* - u_1)T_{11} - (u_2^* - u_2)T_{12} + (w^* - w)\bar{Q}_{11} + \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) M_{11} \right) d\xi_2 - \\
& - \int_{\substack{\Gamma \\ \xi_2 = \text{const}}} \left(T_{12}^* u_1 + T_{22}^* u_2 + M_{22}^* \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \bar{Q}_{22}^* w \right) d\xi_1 - \\
& - \int_{\substack{\Gamma \\ \xi_2 = \text{const}}} \left((u_1^* - u_1)T_{12} - (u_2^* - u_2)T_{22} + (w^* - w)\bar{Q}_{22} + \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi_2} - \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) M_{22} \right) d\xi_1 - \\
& - \int_{\substack{\Gamma_p^+(H^3) \\ \xi_1 = \text{const}}} \left((u_1^+ - u_1)T_{11} - (u_2^+ - u_2)T_{12} + (w^+ - w)\bar{Q}_{11} + \left(\frac{\partial w^+}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) M_{11} \right) d\xi_2 - \\
& - \int_{\substack{\Gamma_p^-(H^3) \\ \xi_1 = \text{const}}} \left((u_1^- - u_1)T_{11} - (u_2^- - u_2)T_{12} + (w^- - w)\bar{Q}_{11} + \left(\frac{\partial w^-}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) M_{11} \right) d\xi_2 - \\
& - \int_{\substack{\Gamma_p^+(H^3) \\ \xi_2 = \text{const}}} \left((u_1^+ - u_1)T_{12} - (u_2^+ - u_2)T_{22} + (w^+ - w)\bar{Q}_{22} + \left(\frac{\partial w^+}{\partial \xi_2} - \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) M_{22} \right) d\xi_1 - \\
& - \int_{\substack{\Gamma_p^-(H^3) \\ \xi_2 = \text{const}}} \left((u_1^- - u_1)T_{12} - (u_2^- - u_2)T_{22} + (w^- - w)\bar{Q}_{22} + \left(\frac{\partial w^-}{\partial \xi_2} - \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) M_{22} \right) d\xi_1, \quad (2.25)
\end{aligned}$$

де $\Gamma_{\xi_1 = \text{const}}$, $\Gamma_{\xi_2 = \text{const}}$ – частини зовнішнього контуру пластини при $\xi_1 = \text{const}$, $\xi_2 = \text{const}$ відповідно;

$\Gamma_p^\pm(H^3)_{\xi_2 = \text{const}}$ – границі поздовжнього розрізу при $\xi_2 = \text{const}$, $a_1 \leq \xi_1 \leq a_2$;

$\Gamma_p^\pm(H^3)_{\xi_1 = \text{const}}$ – границі поперечного розрізу при $\xi_1 = \text{const}$, $b_1 \leq \xi_2 \leq b_2$;

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{\partial M_{ii}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(T_{ii} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(T_{ij} \frac{\partial w}{\partial \xi_j} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

В отриманому функціоналі (2.25) незалежно варіюються всі невідомі функції задачі – зусилля, моменти, деформації та переміщення в області Ω на зовнішніх $\Gamma_{\xi_1 = \text{const}}$, $\Gamma_{\xi_2 = \text{const}}$ і на внутрішніх $\Gamma_p^\pm(H^3)_{\xi_2 = \text{const}}$, $\Gamma_p^\pm(H^3)_{\xi_1 = \text{const}}$ контурах пластини.

Таким чином, пряму задачу у варіаційній постановці може бути надано у такий спосіб: при заданих функціях $H^d(X)$ необхідно знайти вектор-функцію $U(X)$, $U \in \bar{U}$, таку що

$$U(X) = \arg \min_U J(U(X), H^d(X)). \quad (2.26)$$

В роботі І. І. Воровича [52] показано, що функціонал (2.25) при прийнятих гіпотезах про геометричні співвідношення є слабо безперервним в спеціальному функціональному просторі H_t зі скалярним добутком

$$(u_1, u_2) = \iint_{\Omega} \left(C_1^{ij tq} (H^1(X)) \underline{\varepsilon}_{ij}(u_1) \underline{\varepsilon}_{tq}(u_2) + \varepsilon^2 C_2^{ij tq} (H^1(X)) \underline{\chi}_{ij}(u_1) \underline{\chi}_{tq}(u_2) \right) d\Omega$$

та нормою

$$\|u\|_{H_t} = \iint_{\Omega} \left(C_1^{ij tq} (H^1(X)) \underline{\varepsilon}_{ij}(u_1) \underline{\varepsilon}_{tq}(u_2) + \varepsilon^2 C_2^{ij tq} (H^1(X)) \underline{\chi}_{ij}(u_1) \underline{\chi}_{tq}(u_2) \right)^{1/2} d\Omega,$$

$$i, j, t, q = 1, 2,$$

де $\underline{\varepsilon}_{lm}$, $\underline{\chi}_{st}$ – тангенціальні та згинальні складові геометричних співвідношень (2.5) за умови, що функціонал

$$V(U) = \iint_{\Omega} \left[(q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 w) + \sum_k \left((Z_{1(k)} u_1 + Z_{2(k)} u_2 + Z_{3(k)} w) H^2(X) \right) \right] d\Omega$$

є обмеженим в просторі H_t .

За теоремою Ріса, згідно якої кожен лінійний обмежений функціонал в гільбертовому просторі може бути представленим через скалярний добуток за допомогою деякого елемента, існує такий елемент u_{II} , що $V(U) = (u_{II} \cdot u)_{H_t}$.

Нехай F – комплекс навантажень. Для обмеження функціоналу $V(U)$ в просторі H_t ведемо скалярний добуток

$$(u_{II} \cdot u_{II})_{H_t} = [q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, Z_{1(k)}^{*(1)}, Z_{2(k)}^{*(1)}, Z_{3(k)}^{*(1)}] \cdot [q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}, Z_{1(k)}^{*(2)}, Z_{2(k)}^{*(2)}, Z_{3(k)}^{*(2)}],$$

$$\|u_{II}\|_{H_t} = \|q_1, q_2, q_3, Z_{1(k)}^*, Z_{2(k)}^*, Z_{3(k)}^*\|_F$$

та замінимо в функціоналі (2.25) відповідні члени на скалярний добуток.

Означення 1. Задача знаходження вектор-функції $U(X)$ з умови стаціонарності функціоналу повної енергії $J(U(X), H^d(X))$ при фіксованій вектор-функції невідомих оберненої задачі $H^d(X)$ будемо називати *прямою задачею* нелінійної теорії пластин.

2.4. Варіаційна постановка оберненої задачі

Шляхом розв'язання оберненої задачі визначаються параметри моделі дійсності спостережуваної тонкої пластини. Для визначення ступеня адекватності тієї чи іншої моделі дійсності необхідно ввести в розгляд метрику, що дозволяє оцінити близькість двох станів - дійсного (спостережуваного) та отриманого з використанням математичної моделі.

Модель дійсності введемо як $MD(U^*, H^d(X))$, де U^* – інформація про спостереження за системою, $H^d(X)$, $d = \overline{1,3}$ – вектор-функції, що характеризують можливі моделі. При цьому вектор-функція $H^d(X) = \{H^d(X)\}$ описує конкретну модель і визначає напружено-деформований стан тонкостінної системи. В такому випадку стан системи, визначений з використанням будь-якої конкретної моделі $H^d(X)$, збігається зі станом, що входить до моделі дійсності. Тобто, якщо $S(H^d(X))$ – стан реальної деформівної системи, який визначається заданими функціями $H^d(X)$ і спостереженнями U^* , тоді $S(H^d(X)) \in MD(U^*, H^d(X))$. При цьому вважаємо, що вектор-функція $H^d(X)$ можливих характеристик моделі є еквівалентною до вектор-функції $H^t(X)$, $d \neq t$ за моделлю дійсності, якщо $MD(U^*, H^d) \cong MD(U^*, H^t)$. Таке припущення обґрунтовує існування різних вектор-функцій $H^d(X)$ для деформівної системи, що відповідають однаковим за характером спостережуваним станам.

Нехай $\overline{U}$ – множина можливих спостережуваних напружено-деформованих станів системи, тоді модель $MD(U^*, H^d(X))$ є адекватною за метрикою ρ заданому стану $S(H^d(X))$, якщо

$$\begin{aligned} \forall S(H(X)) \in \overline{U}, \exists S_m(H(X)) \in MD(U^*, H^d(X)): \rho(S(H(X)), S_m(H(X))) = 0 \\ \neg S_m(H(X)) \in MD(U^*, H^d(X)): \forall S(H(X)) \in \overline{U}, \rho(S(H(X)), S_m(H(X))) \neq 0. \end{aligned}$$

Тоді метрика, що дозволяє порівнювати стан, визначений з використанням конкретної моделі (при заданих функціях $H^d(X)$), і спостережуваний стан U^* деформівної системи, може бути введена як

$$\rho = \inf_H \{ \rho(S(H(X)), S_m(H(X))), S_m(H(X)) \in MD(U^*, H^d(X)) \}. \quad (2.27)$$

Таким чином, для побудови моделі, яка описує реальну деформівну систему, необхідно ввести метрику ρ і вектор-функцію $H^d(X)$ можливих властивостей моделі, відповідних до моделі дійсності $MD(U^*, H^d(X))$, а також розробити метод визначення станів $S_m(H^d(X))$, що відповідають різним вектор-функціям $H^d(X)$.

Для оцінювання близькості двох можливих станів пластини у гільбертовому просторі $L_{2\Omega}$ при фіксованій вектор-функції $H^d(X)$ обрано метрику (аналогічно з [108]):

$$\begin{aligned} \rho_{L_{2\Omega}}^2 = \int_{\Omega} \left[C_1^{ijpq} (H^1(X)) (\varepsilon_{ij}(H^d(X)) - \varepsilon_{ij}^*) (\varepsilon_{pq}(H^d(X)) - \varepsilon_{pq}^*) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 C_2^{ijpq} (H^1(X)) (\chi_{ij}(H^d(X)) - \chi_{ij}^*) (\chi_{pq}(H^d(X)) - \chi_{pq}^*) \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Виходячи з вигляду обраної метрики (2.28) найбільш інформативною є вектор-функція узагальнених деформацій $\sigma(U, H^d(X)) = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}^T$, $i, j = 1, 2$, значення компонент якої отримуються з нелінійних геометричних співвідношень (2.4), (2.5) шляхом підстановки компонент вектор-функції переміщень $U(X, H^d(X))$. Спостережувані значення деформацій $\sigma_p^* = \{\varepsilon_{ij_p}^*, \chi_{ij_p}^*\}^T$, $p = \overline{1, P}$ отримуються з показників датчиків вимірювання деформацій, які встановлено на поверхні пластини.

З використанням введеної метрики можливо врахувати кількісну інформацію (2.3) про шуканий розв'язок.

Тоді обернена задача визначення властивостей моделі полягає в знаходженні пари $(U(X), H^d(X))$, що доставляє мінімум функціоналу (2.25) при виконанні умови

$$\sigma(U(X), H(X))|_{X=X_p} - \sigma_p^* = 0, \quad p = \overline{1, N}. \quad (2.29)$$

Припускаємо при цьому, що розв'язок оберненої задачі існує.

Сформульована обернена задача (2.25), (2.29) є задачею оптимізації з обмеженнями типу рівностей.

Означення 2. Задачу знаходження невідомої вектор-функції $(U(X), H^d(X))$ з умови мінімуму функціоналу (2.25) при додатково заданих обмеженнях (2.29) будемо називати *оберненою задачею* нелінійної теорії пластин.

Висновки до розділу 2

1. Задачу ідентифікації локальних силових впливів, включень та розрізів у тонкій пластині за результатами спостережень за напружено-деформованим станом пластини сформульовано як обернену задачу. Для опису обернених задач введено характеристичні вектор-функції, які визначають параметри досліджуваної системи, а саме: наявність у пластині локальних силових впливів, включень та розрізів. Опис введених вектор-функцій доповнено описом їх областей визначення.

2. Для побудови розв'язків прямої задачі напружено-деформований стан пластини описано за допомогою нелінійної крайової задачі теорії пластин з урахуванням гіпотез Кірхгофа-Лява та із застосуванням нелінійних співвідношень теорії В. В. Новожилова у припущенні про малість деформацій й квадратів кутів повороту в порівнянні з одиницею. До нелінійної системи рівнянь приєднано умови на внутрішніх та зовнішніх контурах пластини.

3. Для оцінки близькості спостережуваного стану системи і стану, обчисленого з використанням математичної моделі, введено метрику, що характеризує середньоквадратичне ухилення деформацій розтягування-стискання та згину від заданих (спостережуваних) значень відповідних функцій.

4. З використанням введених характеристичних функцій обернену задачу ідентифікації параметрів моделі сформульовано, як задачу мінімізації функціоналу повної енергії системи «пластина-зовнішні сили» при додатково заданих обмеженнях у формі рівностей, що визначають близькість спостережуваного стану системи і стану, отриманого з використанням математичної моделі.

5. Варіаційна постановка оберненої задачі потребує побудови функціоналу повної енергії системи, у якого функціями, що варіюються, є переміщення та деформації всередині області, на який сформульовано крайову задачу, та на її границі.

РОЗДІЛ 3

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Для визначення невідомих функцій оберненої задачі $H^d(X)$ виконаємо перехід до дискретної моделі пластини з використанням методу скінченних елементів. Дискретизація задачі передбачає скінченно-елементну апроксимацію невідомих функцій прямої та оберненої задач, дискретизацію множини можливих станів пластини, дискретизацію функціонала задачі.

3.1. Дискретизація невідомих функцій прямої та оберненої задач

Для побудови розв'язків прямої та оберненої задач виконується дискретизація області Ω , яку займає пластина. Для опису невідомих функцій прямої та оберненої задач вводяться сітки, невідомі функції подаються у вигляді векторів, компонентами яких є вузлові значення функцій задач.

На області Ω вводяться сітки:

– сітка з вузлами X_n , де $X_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$, $n = \overline{1, N}$, для опису невідомих функцій прямої та оберненої задач. Тоді функції $U(X, H^d(X))$, $\sigma(U, H^d(X))$, $H^d(X)$ подаються у вигляді векторів:

$$\{U_n\} = \{(u_{in}, w_n)^T\}, \quad \{\sigma_n\} = \{(\varepsilon_{ijn}, \chi_{ijn})^T\}, \quad \{H_n^d\}, \quad n = \overline{1, N}, \quad i, j = 1, 2; \quad (3.1)$$

– сітка з вузлами X_p , де $X_p = (\xi_{1p}, \xi_{2p})$, $p = \overline{1, P}$, для опису координат точок вимірювання компонент вектора деформацій

$$\sigma(U, H^d(X))|_{X=X_p} = \{\sigma_p^*\} = \{(\varepsilon_{ijp}^*, \chi_{ijp}^*)^T\}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.2)$$

Всі вузли X_p обираються з числа X_n і знаходяться всередині області Ω .

З використанням введеної дискретизації невідомі функції прямої та оберненої задач на елементі задаються для локальної системи координат за допомогою апроксимацій через вузлові значення.

3.2. Метод розв'язання оберненої задачі

Після дискретизації область Ω може бути описано як деяку сукупність прямокутних підобластей $\Omega_n (X_n, n = \overline{1, N})$, де точка $X_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$ відповідає лівому верхньому кутку елемента підобласті Ω_n . При цьому сукупність підмножин Ω_n представляє розбиття множини Ω за умови, що $mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \bigcup_n \Omega_n = \Omega, i \neq j$.

Характеристичні функції $H^d(X)$, введені у розділі 2, визначимо як характеристичні функції підмножин $\{\Omega_1^d, \Omega_2^d, \dots, \Omega_N^d\}$, аналогічно з [88], у вигляді $H^d(X) = \{H_1^d(X), \dots, H_N^d(X)\}$, де

$$H_n^d(X) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } X_n \in \Omega_n^d, \\ 0, & \text{якщо } X_n \in \Omega \setminus \Omega_n^d. \end{cases}, \quad d = \overline{1, 3}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (3.3)$$

Введені характеристичні функції (3.3) дозволяють сформулювати задачу знаходження невідомих оберненої задачі як задачу оптимального розбиття множин [88]. Далі індекс d , що відповідає номеру задачі ідентифікації, опущено.

Під задачею оптимального розбиття множини Ω на її підмножини $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ будемо розуміти таку задачу: необхідно знайти елемент $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*) \in P_N(\Omega)$ такий, що

$$J(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*) = \min_{(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N) \in P_N(\Omega)} J(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N),$$

де $J(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ – функціонал вигляду (2.25), $P_N(\Omega)$ – клас всіх можливих розбиттів множини Ω .

Сформулюємо обернену задачу у вигляді:

Задача А. Необхідно знайти вектор-функцію $(U_*(X), H_*(X)) \in \overline{U} \times \overline{H}$, таку, що доставляє мінімум функціоналу (2.25) з урахуванням обмежень (2.29):

$$J(U_*(X), H_*(X)) = \min_{\substack{H(X) \in \overline{H} \\ U(X) \in \overline{U}}} J(U(X), H(X)), \quad (3.4)$$

де $U_*(X) \in \overline{U}$ – розв'язок прямої задачі (2.25) при $H_*(X)$.

Множина $\overline{H}$, на якій визначається розв'язок оберненої задачі, складається зі скінченного числа R_1 можливих варіантів вигляду функцій $H(X)$:

$$\overline{H} = \left\{ H(X), H(X) = \left(\overset{1}{H}(X), \dots, \overset{R_1}{H}(X) \right); \overset{l}{H}(X) = \left\{ \overset{l}{H}_n(X) \right\}, \right. \\ \left. l = \overline{1, R_1}, n = \overline{1, N}, \right. \\ \text{для } \forall X \in \Omega \quad \overset{l}{H}_n(X) = 0 \vee 1, \quad \overset{l}{H}_i(X) \cdot \overset{l}{H}_j(X) = 0, \quad i \neq j, \\ \left. \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega = 0, \quad p = \overline{1, N}, \right. \quad (3.5)$$

$$\left. \sum_{n=1}^N \overset{l}{H}_n(X) = 1 \right\}. \quad (3.6)$$

Множина $\overline{U}$ визначається наступним чином:

$$\overline{U} = \left\{ U(X), U(X) = \left(\overset{1}{U}(X), \overset{2}{U}(X), \dots, \overset{R_2}{U}(X) \right); \overset{s}{U}(X) = (u_i, w), \quad s = \overline{1, R_2} \right. \\ \left. u_i, w \in L_{2\Omega}, \quad i = \overline{1, 2} \right\}. \quad (3.7)$$

Число R_2 вказує скінченну кількість можливих варіантів вигляду функцій $U(X)$.

Для врахування обмежень (3.5), (3.6) сформулюємо функціонал Лагранжа для відшукування розв'язку оберненої задачі у вигляді:

$$h(H, \psi) = J(U(X), H(X)) + \int_{\Omega} \varphi_0(X) \left(\sum_{n=1}^N \overset{l}{H}_n(X) - 1 \right) d\Omega + \\ + \sum_{p=1}^P \lambda_p \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega, \quad (3.8)$$

де $\psi(X) = (\varphi_0(X), \lambda)$, $\psi \in \overline{\Psi}$; $\varphi_0(X)$ – дійсна функція, визначена на області Ω зі значеннями в гільбертовому просторі $L_{2\Omega}$;

$\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$, $p = \overline{1, P}$ – P -вимірний вектор дійсних чисел, $\lambda \in \overline{\Lambda}$,

$$\overline{\Lambda} = \left\{ \lambda, \lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}, p = \overline{1, N}; \lambda_l \in E_N, l = \overline{1, p} \right\};$$

$$\bar{\psi} = \bar{\Lambda} \times L_{2\Omega}. \quad (3.9)$$

Розглянемо також задачу B .

Задача В. Необхідно знайти вектор-функцію $(H_*(X), \psi_*(X))$, таку, що

$$\check{h}(H_*(X), \psi_*(X)) = \arg \min_{H(X) \in \check{H}} \check{h}(H(X), \psi(X)), \quad (3.10)$$

де функціонал $\check{h}(H(X), \psi(X))$ отримано з $h(H(X), \psi(X))$ шляхом заміни функцій $H_n(X)$ вигляду (3.3) на безперервні функції;

$$\check{H} = \left\{ H(X), H(X) = \left(\overset{1}{H}(X), \dots, \overset{R}{H}(X) \right) : \overset{l}{H}(X) = \left\{ \overset{l}{H}_n(X) \right\}, \right. \\ \left. \forall X \in \Omega \quad 0 \leq \overset{l}{H}_n(X) \leq 1, \quad l = \overline{1, R}, \quad n = \overline{1, N} \right\}. \quad (3.11)$$

Означення 3. Пару $(H_*(X), \psi_*(X))$ будемо називати сідловою точкою функціонала $\check{h}(H(X), \psi(X))$ в області

$\check{H} \times \bar{\psi} = \{ (H(X), \psi(X)) : H(X) \in \check{H}, \varphi_0 \in L_{\Omega}^2, \lambda \in \bar{\Lambda} \}$, якщо виконується нерівність:

$$\check{h}(H_*(X), \psi(X)) \leq \check{h}(H_*(X), \psi_*(X)) \leq \check{h}(H(X), \psi_*(X)) \quad (3.12)$$

для всіх вектор-функцій $H(X) \in \check{H}, \psi(X) \in \bar{\psi}$.

На підставі результатів роботи [88] з урахуванням слабкої безперервності функціоналу $\check{h}(H(X), \psi(X))$ задачі (3.10), в силу теореми Вейерштрасса [27], в роботі доведено: якщо пара $(H_*(X), \psi_*(X))$ є сідловою точкою функціоналу $\check{h}(H(X), \psi(X))$, тоді вектор-функція $(H_*(X), \psi_*(X))$ є розв'язком задачі (3.4).

Доведення відповідних теорем наводиться у додатку А.

Показано, що сідлова точка функціоналу $\check{h}(H(X), \psi(X))$ збігається з розв'язком сформульованої крайової задачі, а компоненти вектора невідомих оберненої задачі отримано у вигляді:

$$H_{*n}(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Y_n(U) + \varphi_{0*}(X) + \lambda_{n*} \sigma_n > 0 \\ 1, & \text{якщо } Y_n(U) + \varphi_{0*}(X) + \lambda_{n*} \sigma_n < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$i \text{ mes}(X \in \Omega : Y_n(U) + \varphi_{0*}(X) + \lambda_{n*}\sigma_n = 0) = 0, \quad (3.15)$$

де $Y_n(U)$ буде формуватися для кожної оберненої задачі 1-3 окремо з доданків функціоналу (2.25), що залежать від відповідних $H^d(X)$, $d = \overline{1,3}$.

Умову (3.15) будемо називати умовою сильної регулярності функціоналу $\tilde{h}(H(X), \psi(X))$.

У більш компактній формі з використанням функції $\text{sign}(\cdot)$ умову визначення компонент вектору невідомих оберненої задачі (3.14) майже всюди для $X \in \Omega$ може бути записано у вигляді:

$$H_{*n}(X) = \frac{1}{2} \{1 - \text{sign}(Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n)\}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (3.16)$$

Для визначення $\varphi_0(X)$ і λ_n , $n = \overline{1, N}$ побудовано систему рівнянь шляхом підстановки виразу (3.16) для $H_{*n}(X)$ у систему обмежень (3.5), (3.6):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \text{sign}(Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n) = N - 2 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sigma_{ij_n} \cdot \text{sign}(Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n) d\Omega = \sum_{n=1}^N \sigma_n^* - 2\sigma_n^* \end{cases} \quad (3.18)$$

Враховуючи вигляд рівняння (3.17) і умову сильної регулярності (3.15) функціоналу $\tilde{h}(H(X), \psi(X))$, $\varphi_0^*(X)$ для $X \in \Omega_i^*$ можна обрати у вигляді:

$$\varphi_{0*}(X) = -\frac{1}{2} \left[(Y_i(U) + \lambda_{i*}) + \min_{j \neq i} (Y_j(U) + \lambda_{j*}) \right], \quad (3.19)$$

де $Y_i(U) + \lambda_{i*} = \min_{k=1, N} (Y_k(U) + \lambda_{k*})$.

Майже всюди для $X \in \Omega$ та $H_{*n}(X)$ з (3.14) $\varphi_{0*}(X) = -\min_{i=1, N} (Y_i(U) + \lambda_{i*})$.

Доведено, що задача A зводиться до знаходження сідлової точки $(H_*(X), \psi_*(X))$ функціонала Лагранжа (3.8). При цьому $U_*(X)$ визначається з умови мінімуму функціонала (3.8) при заданому значенні вектора невідомих оберненої задачі $H_*(X)$, далі компоненти вектору $H_*(X)$ визначаються за формулами (3.14), $\varphi_0^*(X)$ – за формулою (3.19), константи $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ – з

розв'язання системи (3.17 - (3.18) після підстановки в систему попередньо знайдених значень $H_*(X)$ і $\varphi_0^*(X)$.

Сідлова точка функціоналу (3.8) визначає значення характеристичних функцій невідомих оберненої задачі, а задача (3.10) є коректною.

З використанням значень характеристичних функцій $H^d(X)$, обчислених за формулами (3.14), формується вектор, складений з бінарних значень 0 і 1. При цьому компоненти, які отримують значення 1, позначають місце розташування областей $\Omega_i \subset \Omega$, в яких діють локальні сили, присутні жорсткі включення або вершини розрізів.

3.3. Ітераційна процедура уточнення компонент вектора невідомих оберненої задачі

Вектор невідомих оберненої задачі, отриманий на попередньому етапі, визначає місце розташування областей, у яких діють зосереджені сили, знаходяться дефекти у вигляді включень або розрізів.

Для визначення параметрів дефектів та локальних силових впливів – значень пружних констант матеріалу включень, величин локальних сил – організовано ітераційний процес числової мінімізації функціоналу (2.28) з використанням методу локальної оптимізації (методу Ньютона-Рафсона).

У якості вектора невідомих на даному етапі ідентифікації виступає вектор $\tilde{H}^d(X)$, початкове наближення якого формується таким чином: компоненти вектора $H^d(X)$, які відповідно до формули (3.14) отримали значення 1, замінюються фізичними значеннями модуля пружності, величин силових впливів. Далі для уточнення компонент вектора невідомих оберненої задачі $\tilde{H}^d(X)$ в ітераційному процесі визначаються прирощення до компонент вектора початкового наближення.

Вектор $\tilde{H}^d(X)$ на S -тому кроці внутрішнього ітераційного процесу представляється у вигляді:

$$\tilde{H}^{d(s)} = \tilde{H}^{d(s-1)} - a_s (\rho_H''(\tilde{H}^{d(s-1)}))^{-1} \rho_H'(\tilde{H}^{d(s-1)}) \quad (3.20)$$

де $\rho'_H(\tilde{H}^{d(s-1)})$, $\rho''_H(\tilde{H}^{d(s-1)})$ – градієнт и гесіан функціонала (2.28).

Лінеаризація функції нев'язки $\Delta(X_p, \tilde{H}^d) = (\varepsilon_{ij}(X_p, \{\tilde{H}_n^d\}) - \varepsilon_{ij}^*(X_p))$ в околі поточного значення вектора параметрів $\tilde{H}^{d(s-1)}$

$$\Delta(X_p, \tilde{H}^d) = \Delta(X_p, \tilde{H}^{d(s-1)}) + \sum_{n=1}^N \left. \frac{\partial \Delta(X_p, \tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_n^d} \right|_{\tilde{H}^d = \tilde{H}^{d(s-1)}} \Delta \tilde{H}_n^d$$

дозволяє отримати компоненти градієнта і гесіана функціоналу в точці

$\tilde{H}^{d(s-1)} \in E^M$ у вигляді:

$$\rho'_H(\tilde{H}^d) \Big|_{\tilde{H}^d = \tilde{H}^{d(s-1)}} = \frac{\partial \rho(\tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_n^d} \Big|_{\tilde{H}^d = \tilde{H}^{d(s-1)}} \approx 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial \Delta(X_p, \tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_n^d} \right\}^T \Big|_{\tilde{H}^d = \tilde{H}^{d(s-1)}} \Delta(X_p, \tilde{H}^{d(s-1)}),$$

$$\rho''_H(\tilde{H}^d) \Big|_{\tilde{H}^d = \tilde{H}^{d(s-1)}} = \frac{\partial^2 \rho(\tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_n^d \partial \tilde{H}_q^d} \Big|_{\tilde{H}^d = \tilde{H}^{d(s-1)}} \approx 2 \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{\partial \Delta(X_p, \tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_n^d} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Delta(X_p, \tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_q^d} \right\} \Big|_{\tilde{H}^d = \tilde{H}^{d(s-1)}},$$

$$n = \overline{1, N}, \quad q = \overline{1, N}.$$

Вводячи позначення для матриці градієнта

$$G = G(X_p, \tilde{H}^d) = \left[\frac{\partial \Delta(X_p, \tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_n^d} \right],$$

отримаємо рівняння для визначення прирощень компонент вектора параметрів $\tilde{H}^d(X)$ в матричній формі

$$G^T G(\tilde{H}^{d(s)} - \tilde{H}^{d(s-1)}) = -G^T \Delta(\tilde{H}^{d(s-1)})$$

або

$$\Delta \tilde{H}^{d(s)} = -Q \Big|_{\tilde{H}^{d(s-1)}} \Delta(\tilde{H}^{d(s-1)}), \quad (3.21)$$

де $Q = (G^T G)^{-1} G^T$.

Компоненти матриці градієнта визначаються чисельно з використанням різницевого аналога:

$$G = \left\| \frac{\partial \Delta(X_p, \tilde{H}^d)}{\partial \tilde{H}_n^d} \right\| = \frac{\sigma(X_p, \tilde{H}_n^d + \Delta \tilde{H}_n^d) - \sigma(X_p, \tilde{H}_n^d)}{\Delta \tilde{H}_n^d}, \quad (3.22)$$

де $\Delta \sigma(X_p, \tilde{H}_n^d + \Delta \tilde{H}_n^d) = \{\sigma(X_p, \tilde{H}_1^d + \Delta \tilde{H}_1^d \cdot e_1), \dots, \sigma(X_p, \tilde{H}_N^d + \Delta \tilde{H}_N^d \cdot e_N)\};$

$\Delta \tilde{H}_n^d$ – приріст до n -ої компоненти вектора параметрів, $n = \overline{1, N}$;

e_p – базисні вектори: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$; $\dots$; $e_N = (0, 0, \dots, 1)$, $p = \overline{1, N}$.

У разі малих величин прирощень $\Delta \tilde{H}_n^d$ використання різницевого аналога мало впливає на швидкість збіжності ітераційного процесу і може лише незначним чином її знизити.

Збіжність методу Ньютона-Рафсона забезпечується використанням близького до дійсного розв'язку початкового наближення, визначеного на попередньому етапі ідентифікації місця розташування областей, де можлива наявність силових впливів або дефектів.

3.4. Дискретна модель

3.4.1. Скінченно-елементна апроксимація прямої та оберненої задач

Для побудови розв'язку оберненої задачі виконаємо перехід до дискретної моделі з використанням скінченно-елементної апроксимації.

Для дискретизації функціоналу (3.8) будемо використовувати метод скінченних елементів з розбиттям області Ω на прямокутні скінченні елементи, $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$, Ω_i – елемент області Ω . Взаємодія елементів відбувається в скінченній кількості вузлових точок, розташованих на межах суміжних елементів.

У якості невідомих розглядаються переміщення і деформації вузлових точок. Далі обираються інтерполяційні функції, які єдиним чином описують переміщення всередині скінченного елемента і на його межах через невідомі вузлові переміщення.

На наступному кроці методу скінченних елементів визначаються матриці, які характеризують напружено-деформований стан скінченного елемента. Для кожного зі скінченних елементів формуються матриці жорсткості, які однозначно встановлюють зв'язок між вузловими зусиллями і вузловими переміщеннями елемента. Після цього виконується приведення

поверхневих сил, що діють на дану систему, до еквівалентних вузових впливів.

В результаті підстановки в функціонал скінченно-елементної апроксимації і виконання процедури інтегрування отримуємо алгебраїчну апроксимацію нелінійного функціонала (3.8), що є еквівалентною до умови рівності нулю похідних отриманого після апроксимації функціоналу за значеннями вузових переміщень і деформацій.

Позначимо через R_l підпростір функцій з $W_{2\Omega}^l$, які є поліномами ступеня не вище, ніж l , за сукупністю змінних на кожному з елементів.

Невідомі функції прямої задачі відшукуються як функції

$$U(X, H(X)) = (u_1, u_2, w)^T \in P_k = R_{l-1} \times R_{l-1} \times R_l,$$

$$\sigma(U(X), H(X)) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{22})^T \in P_k = R_l \times R_l \times R_l \times R_l \times R_l \times R_l, \quad l \geq 2$$

в просторі вузових параметрів P_k .

Невідома функція оберненої задачі $H(X)$ відповідно до введеної сітки з вузлами X_n формує вектор $H(X) = \{H_n\}$, $H_n = 0 \vee 1$, $n = \overline{1, N}$. Вузлам, в яких присутні включення, прикладено силові впливи або розташовано вершини розрізу, відповідають компоненти H_n зі значенням, що дорівнюють 1.

Невідомі функції на елементі записуються в ортогональній системі координат α_1, α_2 . Кожна з координатних систем α_1, α_2 породжує свій ансамбль скінченних елементів. Об'єднання скінченних елементів всіх ансамблів здійснюється з використанням глобальної декартової системи координат ξ_1, ξ_2 . Для запису локальної апроксимації приростів переміщень і геометрії пластини всередині кожного скінченного елемента використовується локальна система координат L_1, L_2 .

Для вектора компонент невідомих вузових переміщень $U = (u_1, u_2, w)^T$ всередині кожного скінченного елемента апроксимація виконується наступним чином:

$$U^{(e)} = (N_1 I, N_2 I, \dots, N_\eta I) d^{(e)} = [N] d^{(e)}, \quad (3.23)$$

де N_m , $m = \overline{1, \eta}$ – функції форми, що задані в локальних координатах; I – одинична матриця; $d^{(e)} = (d_1^{(e)}, d_2^{(e)}, \dots, d_\eta^{(e)})^T$ – вектор вузових переміщень; $d_s^{(e)} = (u_1^s, u_2^s, w^s)^T$ – переміщення s -ого вузла; η – число вузлів у елементі.

Для завдання схеми апроксимації всередині скінченного елемента будемо використовувати функції форми, які виражаються через L -координати:

для елемента другого порядку

$$N_1^2 = (2L_1 - 1)L_1; \quad N_2^2 = (2L_2 - 1)L_2; \quad N_3^2 = (2L_3 - 1)L_3;$$

$$N_4^2 = 2L_1L_2; \quad N_5^2 = 4L_2L_3; \quad N_6^2 = 4L_1L_3.$$

для елемента третього порядку

$$N_1^3 = \frac{1}{2}L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2); \quad N_2^3 = \frac{1}{2}L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2);$$

$$N_3^3 = \frac{1}{2}L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2); \quad N_4^3 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1);$$

$$N_5^3 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1); \quad N_6^3 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1); \quad N_7^3 = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1);$$

$$N_8^3 = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_3 - 1); \quad N_9^3 = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_1 - 1); \quad N_{10}^3 = 27L_1L_2L_3.$$

Апроксимація невідомих компонент функції переміщень і функції невідомих оберненої задачі виконується з використанням двовимірних базисних функцій, тоді компоненти вектор-функції $U(X, H(X))$ на скінченному елементі записуються через вузові значення наступним чином:

$$u_i^{(e)} = \sum_{s=1}^6 N_s^2(L_1, L_2) u_i^s, \quad i = 1, 2;$$

$$w^{(e)} = \sum_{s=1}^{10} N_s^3(L_1, L_2) w^s. \quad (3.24)$$

Аналогічно виконується апроксимація функції $\varphi_0(X)$:

$$\varphi_0^{(e)} = \sum_{s=1}^6 N_s^2(L_1, L_2) \varphi_0^s. \quad (3.25)$$

Апроксимація геометрії пластини виконується з використанням тих самих функцій форми, що і для функцій переміщень. Зв'язок між координатами α_1, α_2 і локальними L -координатами прямокутника визначає залежність, аналогічну до сформульованої залежності (3.23) для переміщень.

Для опису деформованого стану використовується вектор узагальнених деформацій у вигляді:

$$\sigma = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T;$$

внутрішні зусилля, моменти та перерізуючі сили описано вектором узагальнених зусиль, що має вигляд:

$$T = (T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_{11}, Q_{22})^T.$$

Введення вузлових переміщень $d^{(e)} = (d_1^{(e)}, d_2^{(e)}, \dots, d_n^{(e)})^T$ на елементі (e) , завдання схеми апроксимації (3.24), (3.25) всередині скінченного елемента через локальні L -координати та урахування геометричних співвідношень (2.5), (2.6) дозволяє отримати співвідношення, що описує зв'язок вектора деформацій та переміщень для скінченного елемента у вигляді:

$$\sigma^{(e)} = (B_1, B_2, \dots, B_n) d^{(e)} = B(U^{(e)}) d^{(e)}, \quad (3.26)$$

де $B(U^{(e)}) = [B_0]d^{(e)} + [B_L(U^{(e)})]$ – матриця зв'язку, компоненти якої залежать від локальних L -координат; $[B_0]$ – матриця, що відповідає лінійній частині залежності деформацій від переміщень, тобто матриця, яка визначає нескінченно малі деформації; $[B_L(U^{(e)})]$ – матриця, що залежить від переміщень.

Елементи підматриць в (3.26) містять частинні похідні першого порядку функцій форми за координатами α_1, α_2 .

Функції форми виражені через локальні координати, тому потрібно виразити похідні функцій форми по глобальним координатам через похідні по локальним координатам:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_s}{\partial L_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_1} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial N_s}{\partial \alpha_2} \end{Bmatrix} = Y \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial N_s}{\partial \alpha_2} \end{Bmatrix}, \quad (3.27)$$

де Y – якобіан перетворення координат. Виконуючи обернення співвідношення (3.27), отримуємо шукані залежності:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial N_s}{\partial \alpha_2} \end{Bmatrix} = Y^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_s}{\partial L_2} \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

Апроксимація функцій зусиль T всередині скінченного елемента може бути представлена співвідношенням

$$T^{(e)} = [D]\sigma^{(e)}, \quad (3.29)$$

де $[D]$ – матриця пружних констант. З урахуванням безрозмірної форми запису співвідношень прямої задачі, ця матриця матиме вигляд:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вузлові зовнішні навантаження не залежать від невідомих переміщень і вважаються заданими при постановці задачі. Введемо для векторів вузлових узагальнених сил наступні позначення:

$$V = \{v_i\}^T, \quad v_i = \{v_{is}\}^T, \quad i = \overline{1,3}, \quad s = \overline{1,N}.$$

Підставляючи скінченно-елементні апроксимації невідомих функцій в функціонал (2.25) та виконуючи інтегрування, отримаємо систему нелінійних рівнянь N -го порядку

$$M(U) - V = 0, \quad (3.30)$$

що є еквівалентною до умови

$$\frac{\partial J^*(U(X), H^d(X))}{\partial U} = 0,$$

де $J^*(U(X), H^d(X))$ – значення функціоналу (3.8) після підстановки скінченно-елементної апроксимації та виконання процедури інтегрування;
 $M(U) = [M_0]U + M_L(U)$, $[M_0] = [B_0]^T [D] [B_0]$ – матриця жорсткості для лінійного аналізу, що відповідає малим деформаціям;

$M_L(U) = [B_0]^T [D] [B_L] + [B_L]^T [D] [B_L] + [B_L]^T [D] [B_0]$ – матриця жорсткості, що відповідає великим переміщенням.

3.4.2. Дискретизація функціоналу

Після підстановки у функціонал (3.8) апроксимацій вектор - функцій переміщень $U(X)$, тангенціальних $\varepsilon_{ij}(X, H(X))$ і згинальних $\chi_{ij}(X, H(X))$ деформацій, вектора силового впливу $V(X)$, вектора невідомих оберненої задачі $H^d(X)$ та виконання процедури інтегрування, отримаємо функціонал в дискретному вигляді:

$$\begin{aligned}
 J(U, H^d) = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \left[C_1^{ij tq} \varepsilon_{ij_m} \varepsilon_{tq_n} + C_2^{ij tq} \chi_{ij_m} \chi_{tq_n} + \varepsilon^2 (C_1^{*ij tq} \varepsilon_{ij_m} \varepsilon_{tq_n} + C_2^{*ij tq} \chi_{ij_m} \chi_{tq_n}) \right] H_k^1 + \\
 & - (q_{1n} u_{1n} + q_{2n} u_{2n} + q_{3n} w_n) - (Z_{1k} u_{1k} + Z_{2k} u_{2k} + Z_{3k} w_k) H_k^2 + \\
 & + \sum_{j=K_1}^{K_M} \sum_{m=1}^N \left[T_j^m (u_{m_j} - u_{m_j}^*) + T_j^\tau (u_{\tau_j} - u_{\tau_j}^*) + M_j^m \left(\frac{\partial w_j}{\partial m} - \frac{\partial w_j^*}{\partial m} \right) + Q_j (w_j - w_j^*) H_{K_1 \dots K_M}^3 \right] + \\
 & + \sum_{p=1}^P \sum_{m_p}^{M_p} \sum_{n_p}^{N_p} \lambda_p \left(\varepsilon_{ij_{m_p}} - \varepsilon_{ij_{m_p}}^* \right)^T \left(\varepsilon_{ij_{n_p}} - \varepsilon_{ij_{n_p}}^* \right) + \sum_{k=1}^K \varphi_{0_k} (H_k^d - 1). \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

З умов стаціонарності функціоналу (3.31) за компонентами вектора U_n , $n = \overline{1, N}$, за значеннями λ_p , $p = \overline{1, P}$, і за функціями φ_{0_n} , $n = \overline{1, N}$, впливають рівняння рівноваги (2.14), (2.15), крайові умови (2.22) на межах зовнішнього та (2.23) на межах внутрішнього контурів, умови (3.5) і (3.6).

3.5. Алгоритм розв'язання оберненої задачі

Розв'язання оберненої задачі будемо виконувати ітераційним методом. Навантаження системи моделюється шляхом послідовного збільшення навантаження із заданим приростом з використанням методу продовження по параметру

$$t^{(r)} = t^{(r-1)} + \Delta t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad V^{(r)} = t^{(r)} \cdot \bar{V},$$

Δt – крок методу продовження; r – номер кроку метода продовження.

З використанням прийому послідовної лінеаризації систему рівнянь (3.30) може бути надано у вигляді:

$$A^{(r)}(U^{(r-1)})\Delta U^{(r)} = \Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t), \quad (3.32)$$

де $A^{(r)}(U^{(r-1)}) = \left\{ \frac{\partial M}{\partial U} \right\} \bigg|_{U^{(r-1)}}$ – лінеаризована матриця;

$$U^{(r)} = U^{(r-1)} + \Delta U^{(r)};$$

$\Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t)$ – приріст правої частини системи при зміні номера кроку r ;

Δt – приріст параметра продовження.

Тоді m -і рівняння загального вигляду лінеаризованих співвідношень (3.32) матимуть вигляд:

якщо $\forall m, m \neq m_\Gamma$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_{mn}^{(r)} \Delta U_n^{(r)} + \sum_{k=1}^N a_{mk}^{*(r)} \Delta U_k^{(r)} \bar{H}_k^1 + \sum_{k=1}^N q_k^{(r)} w_k + \sum_{k=1}^N Z_k^{*(r)} w_k \bar{H}_k^2 + \\ & + \sum_{n_{\Gamma_p}} d_{mn} U_{\Gamma_p} \cdot \left(\bar{H}_{k_1 \dots k_\gamma}^3 \right) = \Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t); \end{aligned}$$

якщо $\forall m, m = m_\Gamma$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_{mn}^{(r)} \Delta U_n^{(r)} + \sum_{k=1}^N a_{mk}^{*(r)} \Delta U_k^{(r)} \bar{H}_k^1 + \sum_{k=1}^N q_k^{(r)} w_k + \\ & + \sum_{k=1}^N Z_k^{*(r)} w_k \bar{H}_k^2 = \Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.6. Етапи визначення вектора невідомих оберненої задачі

Сформулюємо процедуру розв'язання оберненої задачі на кроці методу продовження по параметру як послідовність дій, що складається з двох етапів:

1. Визначення областей, у яких ймовірна присутність зосереджених силових впливів, дефектів матеріалу пластини у вигляді включень або розрізів, з розв'язання задачі оптимізації (3.8), сформульованої як задача оптимального розбиття множин.

На сітці з вузлами X_n задаємо початкові наближення $\{\lambda_n^{(0)}\}$, $\{H_n^{(0)}\}$, $n=1, N$, для чого використовуємо відому інформацію про систему і діапазони змінювання параметрів досліджуваної системи.

Із розв'язання системи (3.32) визначаємо значення $Y_n^{(0)}(U)$. За формулою (3.19) обчислюємо значення $\varphi_0^{(0)}(X)$ в вузлах сітки при фіксованих значеннях $\{\lambda_n^{(0)}\}$, $n=1, N$. Для визначення значень $\{\lambda_n^{(1)}\}$ розв'язуємо систему рівнянь (3.18) при $\{H_n^{(0)}\}$ і $\varphi_0^{(0)}(X)$.

Тобто, на k -му кроці обчислень за вказаною схемою будемо мати значення $\{\lambda_n^{(k)}\}$, $\{\lambda_n^{(k-1)}\}$ в вузлах сітки. Виконуємо перевірку нерівності $\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – задана точність. Якщо нерівність не виконується, переходимо до $(k+1)$ -го кроку із запам'ятовуванням значень $\{\lambda_n^{(k)}\}$ і $\varphi_0^{(k)}(X)$. Якщо нерівність виконується, то, вважаючи $\varphi_0^*(X) = \varphi_0^{(k)}(X)$, $\{\lambda_n^*\} = \{\lambda_n^{(k)}\}$, обчислюємо значення компонент $\{H_{*n}\}$ за формулою (3.14).

Отриманий таким чином вектор розв'язку оберненої задачі $H_*(X) = \{H_{*n}\}$ складається з бінарних значень 0, 1 і визначає місце розташування областей, в яких прикладені зосереджені сили або присутні дефекти у вигляді включень або розрізів. Даний вектор використовується при формуванні початкового наближення для другого етапу процедури ідентифікації.

2. Процедура уточнення значень параметрів системи – модуля пружності включення, амплітуди зосередженого силового впливу, стрибків переміщень на берегах розрізу. Для виконання цієї задачі формується початкове наближення вектора невідомих другого етапу ідентифікації $\{\tilde{H}_n^{(0)}\}$ таким чином: компоненти бінарного вектора $H_*(X)$, які отримали на попередньому етапі обчислень значення 1, замінюються фізичними значеннями невідомих характеристик даної системи відповідно до постановки задачі. Далі організовується ітераційний процес уточнення значень параметрів системи з використанням методу Ньютона-Рафсона.

Зазначена послідовність дій для r -го кроку методу продовження по параметру може бути описана наступним алгоритмом.

Алгоритм ідентифікації АІ

1. Задати початкові значення $H^{(0)} = \{H_n^{(0)}\}$, $\{\lambda_n^{(0)}\}$, $n = \overline{1, N}$; $k = 0$, де k – номер кроку внутрішнього ітераційного процесу; відповідно до задачі, яка розв'язується задати: $E^{(0)}$ – початкове значення модулю Юнга включення, $Z^{(0)}$ – початкове значення локальної сили.
2. Обчислити значення $U_n^{(k)}$, $Y_n^{(k)}(U)$ при заданих $H^{(k)}$, $\{\lambda_n^{(k)}\}$ із розв'язання системи (3.32).
3. Визначити значення $\varphi_0^{(k)}(X)$ з системи (3.19).
4. Із розв'язання системи (3.17) - (3.18) визначити значення $\{\lambda_n^{(k+1)}\}$.
5. Перевірити умову: $\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Якщо умова виконується, то покласти $\varphi_0^*(X) = \varphi_0^{(k)}(X)$, $\{\lambda_n^*\} = \{\lambda_n^{(k+1)}\}$ та перейти до кроку 6; інакше – $k = k + 1$, перейти до кроку 2.
5. Обчислити значення компонент $H_n^*(X)$ за формулою (3.14) та побудувати вектор $\{H_n^*(X)\}$, який визначає місце розташування областей, в яких прикладені зосереджені сили або присутні дефекти у вигляді включень чи розрізів.
6. Кінець.

Далі здійснюється перехід до другого етапу процедури ідентифікації: формується початкове наближення $\{\tilde{H}_n^{(0)}\}$ заміною компонент вектора $\{H_n^*(X)\}$, що дорівнюють 1, на фізичні значення невідомих оберненої задачі, та виконується уточнення значень компонент вектора $\{\tilde{H}_n^{(s)}\}$ в ітераційній процедурі методу Ньютона-Рафсона (3.20).

3.7. Вибір точок спостереження

Оскільки напружено-деформований стан, що виникає в пластині при наявності силових впливів або дефектів структури матеріалу, є істотно неоднорідним і характеризується швидким зменшення рівня деформацій при видаленні від місця прикладання зосередженої сили (місця розташування дефекту), при розв'язанні кожної конкретної задачі необхідно здійснювати вибір місця розташування точок спостереження.

В результаті численних експериментів було встановлено, що місце розташування і кількість точок спостереження (параметри сітки спостереження) істотно впливають на обумовленість оберненої задачі, а також точність і регулярність її розв'язку. Це пов'язано з тим, що кількість вузлів сітки спостереження визначає розмірність матриці оберненої задачі, значні розміри якої призводять до накопичення обчислювальної похибки. Аналіз матриць (3.22), що характеризують реакцію деформівної системи на зміну параметрів, показав, що при істотному згущуванні сітки сформована матриця містить близькі за значеннями елементи, а, отже, можливо її виродження. Тому при визначенні параметрів сітки спостереження необхідно забезпечити лінійну незалежність стовпців матриці.

Пропонується здійснювати вибір точок спостереження γ_p в припущенні про існування найбільш інформативних даних.

Для визначення відповідних точкам γ_p вузлів скінченно-елементної сітки X_p , $p = \overline{1, P}$, формулюється умова, аналогічна [102]:

$$J = \sum_r (H - H(\gamma_p))^T (H - H(\gamma_p)) \rightarrow \min, \quad (3.34)$$

де $H(\gamma_p)$ – вектор невідомих оберненої задачі, обчислений з використанням при побудові функціоналу-нев'язки інформативного вектора спостережень; H – вектор невідомих оберненої задачі, який обчислюється з використанням повного вектора спостережень (всі вузли сітки спостережень X_p , $p = \overline{1, P}$).

При цьому сітка можливих вимірів $X_p \in$ заданою, її вузли збігаються з вузлами сітки для опису невідомих функцій прямої та оберненої задач $X_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$, $n = \overline{1, N}$; $\{X_p\} \subset \{X_n\}$.

У якості вектора спостережень $\{\sigma_p^*\}$ будемо використовувати вектор, складений з вимірних значень деформацій σ_p^* . Для визначення інформативних компонент вектора спостережень $\{\sigma_p^*\}$ пропонується представити вектор $\Delta(H) = \{\Delta_p\} = \{\sigma(X_p, H) - \sigma_p^*\}$, який визначає функціонал-нев'язку оберненої задачі, у вигляді двох незалежних векторів Δ^1 , Δ^2 розмірності $N_1 \times 1$, $N_2 \times 1$ відповідно, $N_1 + N_2 = N$ (для визначеності будемо вважати, що компоненти вектора Δ^1 обчислені в інформативних точках спостереження γ_p).

Для формування векторів Δ^1 , Δ^2 вводяться функції належності u_p^r , $p = \overline{1, N}$, $r = 1, 2$ компонент вектора Δ векторам Δ^1 та Δ^2 у вигляді:

$$u_{p_1}^1(X) = \delta(X - X_{p_1}); \quad p_1 \in I^1, \quad I^1 = \{p_1, \dots, p_{1_{N_1}}\};$$

$$u_{p_2}^2(X) = \delta(X - X_{p_2}); \quad p_2 \in I^2, \quad I^2 = \{p_{2_{N_1+1}}, \dots, p_{2_N}\}; \quad I^1 \cap I^2 = \emptyset,$$

де $\delta(X - X_{p_r})$ – функція Дірака; N_1 – задане число ненульових компонент вектора Δ^1 .

Для опису векторів Δ^1 та Δ^2 використовується подання:

$$\Delta^1 = \int_{\Omega} D_1 \Delta d\Omega; \quad \Delta^2 = \int_{\Omega} D_2 \Delta d\Omega,$$

де D_r , $r=1,2$ – матриці, що враховують належність компонент вектора Δ векторам Δ^1 та Δ^2 , і сформовані у вигляді:

$$[D]_{N \times N} = \text{diag}\{\delta(X - X_p)\}, \quad p = \overline{1, N};$$

$$[D_1]_{M \times M} = \text{diag}\{u_{p_1}^1\}; \quad [D_2]_{M \times M} = [D] - [D_1].$$

З урахуванням введених подань функціонал (3.33) в матричній формі матиме вигляд:

$$J_1(Q_1, Q_2) = \int_{\Omega} \left([Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{bmatrix} - [Q_1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \left([Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{bmatrix} - [Q_1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) d\Omega \rightarrow \min, \quad (3.35)$$

де $Q_r = [Q_{r_{mn}} \cdot \delta(X)]$, $m = \overline{1, M}$, $n = \overline{1, N_r}$, $r = 1, 2$ – невідомі матриці, аналогічні до матриці Q в ітераційній формулі методу Ньютона (3.21). Зазначені матриці дозволяють визначити розбиття вектора Δ на складові Δ^1 та Δ^2 .

Потрібно знайти вигляд матриць Q_1 , Q_2 , що забезпечують мінімізацію функціоналу (3.35), при цьому за аналогією з [21], необхідно виконати умови незсуненості:

$$R_r Q_r - [I]_{N_r \times N_r} = [0]_{N_r \times N_r} \quad (3.36)$$

та інваріантності оцінювання:

$$R_k Q_r = [0]_{N_k \times N_r}; \quad k \neq r; \quad k, r = 1, 2, \quad (3.37)$$

де $[I]$ та $[0]$ – одинична та нульова матриці відповідної розмірності;

$R_r = [R_r]_{M \times N_r}$ – матриці, сформовані з ненульових елементів матриць $[G]_{M \times N}^T \cdot [D_r]_{N \times N}$; G – матриця вигляду (3.22).

Ці умови приєднуються до функціоналу (3.35) з використанням множників Лагранжа:

$$J_2(Q_1, Q_2, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = J_1(Q_1, Q_2) + \int_{\Omega} \sum_r \bar{\psi}_r g_r d\Omega + \int_{\Omega} \sum_r \bar{\eta}_r f_r d\Omega, \quad (3.38)$$

де $\bar{\psi}^T = \{\bar{\psi}_r\}$, $\bar{\eta}^T = \{\bar{\eta}_r\}$ – вектори множників Лагранжа;

$$g_r = Q_r R_k; \quad f_r = I_r - Q_r R_r; \quad r \neq k; \quad r \leftrightarrow k; \quad r, k = 1, 2.$$

Враховуючи матричне подання функціоналу (3.35) і обмежень (3.36), (3.37), запишемо (3.38) у вигляді:

$$J_2(Q_r, \psi_r, \eta_r) = \int_{\Omega} \left([Q_1 \ Q_2] \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{bmatrix} - [Q_1 \ 0] \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \left([Q_1 \ Q_2] \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{bmatrix} - [Q_1 \ 0] \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) d\Omega + \\ + \psi_{1p}^T R_2^T Q_{1p} + \psi_{2p}^T R_1^T Q_{2p} + [I_{1p}^T - Q_{1p}^T R_1] \eta_{1p} + [I_{2p}^T - Q_{2p}^T R_2] \eta_{2p} d\Omega \rightarrow \min \quad (3.39)$$

де $\psi_{rp} = [\psi_{r_{mp}}, m = \overline{1, M}]^T$; $\eta_{rp} = [\eta_{r_{mp}}, m = \overline{1, M}]^T$ – відповідні векторні множники Лагранжа; I_{rp} – вектор-стовпець розмірності $N_r \times 1$, у якого на p -ої позиції стоїть 1, а на решті – 0; $Q_{rp} = [Q_{r_{mp}}, m = \overline{1, M}, p = \overline{1, N_r}]$ – вектор-стовпець шуканих елементів матриці Q_r .

Оскільки функції належності компонент вектора Δ векторам Δ^r , $r = 1, 2$ u_p^r обмежені $u_p^r \in \{0, 1\}$, $p = \overline{1, N_r}$, і множина U подається у вигляді $U = \{u_p^r\} = \{(u_1^r, u_2^r, \dots, u_p^r) \mid u_p^r \in \{0, 1\}, p = \overline{1, N_r}\}$, то функція $L(u) = \sum_{p=1}^{N_r} J'_{2u_p} u_p^r$ досягає своєї нижньої межі на U в точці $\bar{u}^r = \{\bar{u}_1^r, \dots, \bar{u}_{N_r}^r\}$, де

$$\bar{u}_p^r = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\psi_{kp}^T R_r^T Q_{kp} - Q_{kp}^T R_k \eta_{kp}) < 0 \\ 0, & \text{якщо } (\psi_{kp}^T R_r^T Q_{kp} - Q_{kp}^T R_k \eta_{kp}) > 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

$$k, r = 1, 2; r \neq k; r \leftrightarrow k; p = \overline{1, N_r}.$$

Умову (3.40) може бути подано в компактній формі:

$$\bar{u}_p^r = \frac{1}{2} [1 - \text{sign}(\psi_{kp}^T R_r^T Q_{kp} - Q_{kp}^T R_k \eta_{kp})]. \quad (3.41)$$

Таким чином, в результаті перевірки умов, сформульованих в (3.40) (або (3.41)), можна визначити належність p -ої компоненти вектора Δ вектору Δ^1 або Δ^2 .

Для формування виразів в (3.40), перевірка яких необхідна для обчислення функцій належності, потрібно визначити відповідні матриці Q_1 , Q_2 і множники Лагранжа ψ_{rp} , η_{rp} .

Для визначення матриць Q_1 , Q_2 і множників Лагранжа ψ_{rp} , η_{rp} сформулюємо необхідні умови оптимальності, диференціюючи (3.39) по аргументам Q_{rp} , ψ_{rp} , η_{rp} , у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{2p}}{\partial Q_{rp}} &= 2PQ_{rp} + R_k \psi_{rp} - R_r \eta_{rp} = [0]; \\ \frac{\partial J_{2p}}{\partial \eta_{rp}} &= I_{rp} - R_r^T Q_{rp} = [0]; \end{aligned} \quad \frac{\partial J_{2p}}{\partial \psi_{rp}} = R_k^T Q_{rp} = [0], \quad (3.42)$$

де матриця P формується таким чином:

$$P = \begin{bmatrix} \Delta^2 \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \begin{bmatrix} \Delta^2 \end{bmatrix}_{1 \times M}, \quad r \neq k; \quad r \leftrightarrow k; \quad p = \overline{1, N_r}.$$

Для скорочення запису подальших перетворень введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} Z_r &= P^{-1} R_r; & Z_k &= P^{-1} R_k; & \Phi_{rr} &= R_r^T P^{-1} R_r; \\ \Phi_{kk} &= R_k^T P^{-1} R_k; & \Phi_{rk} &= R_r^T P^{-1} R_k; & \Phi_{kr} &= R_k^T P^{-1} R_r, \end{aligned}$$

тоді з першого рівняння системи (3.42) знаходимо:

$$Q_{rp} = 2^{-1} (Z_r \eta_{rp} - Z_k \psi_{rp}). \quad (3.43)$$

Після помноження лівої та правої частини (3.43) зліва на матрицю R_k^T з урахуванням умови інваріантності оцінювання маємо:

$$\psi_{rp} = \Phi_{kk}^{-1} \Phi_{kr} \eta_{rp}. \quad (3.44)$$

Аналогічно, помножуючи (3.43) зліва на матрицю R_r^T і враховуючи умову незсуненості оцінювання, отримаємо:

$$\eta_{rp} = 2\Phi_{rr}^{-1} (I_{rp} + 2^{-1} \Phi_{rk} \psi_{rp}). \quad (3.45)$$

Розв'язуючи рівняння (3.44) і (3.45) відносно ψ_{rp}, η_{rp} отримаємо вирази для визначення множників Лагранжа в явному вигляді.

Далі з (3.43), (3.44), (3.45) отримаємо вираз для Q_{im} у вигляді:

$$Q_{rp} = (Z_r - Z_k \Phi_{kk}^{-1} \Phi_{kr}) (I - \Phi_{rr}^{-1} \Phi_{rk} \Phi_{kk}^{-1} \Phi_{kr})^{-1} \Phi_{rr}^{-1} I_{rp} \quad (3.46)$$

або, перетворюючи формулу (3.46), з використанням позначень

$$\begin{aligned} Z_r - Z_k \Phi_{kk}^{-1} \Phi_{kr} &= F_{kk} Z_r; & F_{kk} &= (I - Z_k \Phi_{kk}^{-1} R_k^T); \\ (I - \Phi_{rr}^{-1} \Phi_{rk} \Phi_{kk}^{-1} \Phi_{kr})^{-1} \Phi_{rr}^{-1} &= (R_r^T F_{kk} Z_r)^{-1}, \end{aligned}$$

отримаємо:

$$Q_{rp} = F_{kk} Z_r (R_r^T F_{kk} Z_r)^{-1} I_{rp}. \quad (3.47)$$

Для шуканих оптимальних матриць Q_r , враховуючи (3.47), маємо:

$$Q_r = [F_{kk} Z_r (R_r^T F_{kk} Z_r)^{-1}]_{M \times N_r}, \quad r \neq k; r \leftrightarrow k; p = \overline{1, N_r}. \quad (3.48)$$

Після проведених перетворень отримано вирази для визначення матриць Q_r та множників Лагранжа ψ_{rp}, η_{rp} , що дає можливість сформулювати вирази і провести перевірку виконання умов (3.40). У відповідності з цими умовами визначаються значення функцій належності u_p^r і виконується виділення інформативного вектора Δ^1 з повного вектора спостережень Δ .

Описаний підхід до визначення інформативних точок вимірювань може бути представлений алгоритмом A2.

Алгоритм вибору точок вимірювань A2

1. Задати $u^{1(0)}$ – довільний вектор функцій належності, що визначає вектор Δ^1 , сформований з N_1 компонент повного вектора спостережень Δ .
2. Сформулювати матриці D_1 та D_2 .
3. Побудувати матриці R_1 та R_2 , де $[R_r] = [R]_{M \times N} \cdot [D_r]_{N \times N}$, $r = 1, 2$.
4. Сформулювати матрицю P .
5. Обчислити значення компонент векторів ψ_{rp}, η_{rp} і матриць Q_1, Q_2 .
6. У відповідності до умови (3.39) сформулювати вектори функцій належності $\bar{u}^r = \{u_1^r, \dots, u_{N_i}^r\}$, $r = 1, 2$.
7. Виконати декомпозицію вектора Δ відповідно до значень функцій належності; побудувати вектори Δ^1, Δ^2 .
8. Кінець.

Висновки до розділу 3

1. Дискретизацію задачі виконано з використанням методу скінченних елементів. Для опису невідомих функцій прямої та оберненої задач введено сітки прямої та оберненої задач і сітка для вибору точок спостереження. Невідомі функції подаються у вигляді векторів, компонентами яких є вузлові

значення функцій задач. На елементі невідомі функції задаються через локальні системи координат за допомогою апроксимації через вузлові значення.

2. Обернену задачу визначення параметрів моделі сформульовано як задачу оптимального розбиття множин. Невідомі функції оберненої задачі визначені як характеристичні функції підмножин, що приймають бінарні значення $0, 1$ та визначають місце розташування областей пластини, у яких діють силові впливи або розташовано дефекти.

3. Процедура розв'язання оберненої задачі зведено до виконання двох етапів: визначення вектора невідомих оберненої задачі, що характеризує місце розташування областей, в яких наявні силові впливи або дефекти матеріалу пластини; уточнення значень компонент вектора оберненої задачі, отриманого на першому етапі, з використанням ітераційної процедури методу локальної оптимізації (метод Ньютона-Рафсона).

4. Вибір інформативних точок спостереження здійснено шляхом декомпозиції повного вектора спостережень. Використання такого підходу істотно знижує кількість обчислень і підвищує точність отриманих розв'язків.

РОЗДІЛ 4

ІДЕНТИФІКАЦІЯ СИЛОВИХ ВПЛИВІВ ТА ВКЛЮЧЕНЬ У ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ

4.1. Особливості числового моделювання прямої задачі теорії пластин

Чисельне моделювання напружено-деформованого стану пластин з дефектами структури матеріалу або при наявності зосереджених силових впливів, а саме, створення розрахункової моделі та розв'язання прямої задачі, виконувалося з використанням модулів програмного комплексу, що реалізує метод скінченних елементів. З використанням пакета прикладних програм компоненти вектора узагальнених деформацій $\sigma^* = \{\varepsilon_{ij_p}^*, \chi_{ij_p}^*\}^T$, $p = \overline{1, P}$ визначалися із розв'язання прямої задачі при фіксованому векторі параметрів $\{H_n^d\}$, $d = \overline{1, 3}$, $n = \overline{1, N}$, що характеризує особливості задачі ідентифікації.

Створення розрахункової моделі включає визначення координатної системи, побудову геометричної моделі пластини, опис фізико-механічних властивостей матеріалу пластини, завдання умов закріплення та навантаження пластини.

4.1.1. Моделі пластин в задачах ідентифікації силових впливів та включень у тонкій пластині

У даному розділі запропонований алгоритм застосовано для дослідження розв'язків оберненої задачі ідентифікації:

- 1) місця розташування і модуля Юнга включень (рис. 4.1a);
- 2) зосереджених сил невідомих величин, прикладених в довільних точках поверхні пластини (рис. 4.1b).

Для всіх задач ідентифікації чисельний аналіз виконано для пластин лінійними розмірами $2a = 100\text{мм}$, $2b = 100\text{мм}$ товщиною $h = 1\text{мм}$.

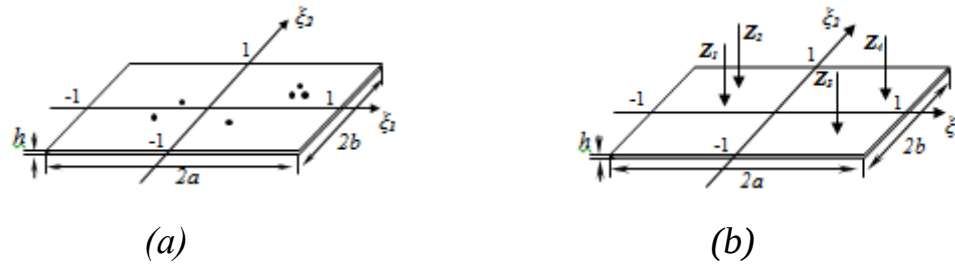


Рис. 4.1 – Моделі пластин для задач ідентифікації включень та локальних силових впливів у тонкій пластині

Результати числових експериментів представлені на рисунках та графіках, де прийняті такі позначення:

$X_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n})$ – безрозмірні координати вузлів сітки, $n = \overline{1, N}$;

$w = \hat{w}/\hat{h}$ – безрозмірні нормальні до поверхні переміщення;

$l_1 = \hat{l}_1/\hat{a}$, $l_2 = \hat{l}_2/\hat{b}$ – відносні розміри включень;

$Z = \hat{Z}(1-\nu^2)/\hat{E}_0\hat{h}$ – безрозмірне значення зосередженої сили;

$q = \hat{q}(1-\nu^2)/\hat{E}_0\hat{h}$ – безрозмірне значення поверхневого навантаження;

ν_0 , ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини та включення;

де $(\hat{\cdot})$ – розмірні величини.

4.1.2. Вибір матеріалів пластини і включень

В якості моделі матеріалу пластини при розв'язанні задач пружного деформування приймалася модель ізотропного лінійно пружного матеріалу, для опису властивостей матеріалу задавалися константи матеріалу – модуль Юнга $\hat{E}_0$ та коефіцієнт Пуассона ν_0 . Матеріалом пластини обрана вуглецева сталь, модуль пружності якої при температурі $T = 20^\circ\text{C}$ становить $\hat{E}_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu_0 = 0.3$.

При розв'язанні прямої задачі в якості матеріалів відомих включень розглядалися матеріали, можливість присутності яких в сталі у вигляді домішок узгоджується з довідковою літературою [18, 57]. Пружні характеристики матеріалу включень також описувалися з використанням модуля Юнга $\hat{E}^*$ та коефіцієнта Пуассона ν .

Відносні значення модуля Юнга $\hat{E}^* / \hat{E}_0$ дійсних включень в пластині можуть бути як більші, так і менші за одиницю, де $\hat{E}_0$ та $\hat{E}^*$ – модулі Юнга матеріалу пластини і дійсного включення відповідно.

В даному дослідженні обчислювальні експерименти проводилися для жорстких включень ($\hat{E}^* / \hat{E}_0 > 1$), в якості можливих значень модуля пружності $\hat{E}^*$ невідомих включень розглядався діапазон $4 \cdot 10^5 \text{ МПа} \div 2 \cdot 10^6 \text{ МПа}$ ($2 \leq \hat{E}^* / \hat{E}_0 \leq 10$). В цей діапазон входять значення модуля Юнга більшості домішок у сталі (залишки шлаку, графіт, оксиди заліза, алюмінати, силікати, карбонати, карбіди). В описах обчислювальних експериментів вказуються відносні значення $E^* = \hat{E}^* / \hat{E}_0$ модуля Юнга дійсних включень, а також відновлені на ітераціях процесу ідентифікації відносні $E = \hat{E}^{(r)} / \hat{E}_0$ значення модуля Юнга включень, r – номер ітерації.

4.1.3. Граничні умови та навантаження

З метою дослідження можливостей методики ідентифікації дефектів у тонкій пластині при проведенні числових експериментів задавалися різні умови на граничних контурах (жорстке закріплення пластини по кутах, кромки пластини вільні, кромки жорстко затиснено) та різні типи навантаження (бокове стискання, розподілений поверхневий тиск).

Граничні умови та навантаження задавалися безпосередньо у вузлах скінченно-елементної сітки (умови на зовнішніх контурах пластини) та на елементах (розподілений тиск). Величини зовнішніх навантажень q та локальних сил Z_k^* , $k = \overline{1, K}$ виражено в безрозмірних одиницях: $q = \hat{q} / \hat{q}_{кр}$, $\hat{q} < \hat{q}_{кр}$, $Z^* = \hat{Z}^* / \hat{Z}_{кр}^*$, $\hat{Z}^* < \hat{Z}_{кр}^*$, де знаком $\hat{\cdot}$ позначено розмірні величини; $\hat{q}_{кр}$, $\hat{Z}_{кр}^*$ – максимально припустимі навантаження, при яких деформування досліджуваної тонкостінної системи є пружним і система залишається стійкою. Значення критичної сили $\hat{q}_{кр}$, що діяла на кромки $\xi_1 = \pm 1$ (однорізне стискання) було розраховано за формулою [5]:

$$\hat{q}_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{4a^2},$$

де K – коефіцієнт, що залежить від співвідношення a/b та від умов закріплення пластини, D – циліндрична жорсткість.

З урахуванням значень коефіцієнту K для різних граничних умов, наведених в [5], критичні значення $\hat{q}_{кр}$ для одновісного стиснення становлять:

- кромки $\xi_2 = \pm 1$ жорстко затиснено, $K = 10.07$, $\hat{q}_{кр} = 182.03 \text{ кПа}$;
- кромки $\xi_2 = \pm 1$ вільні, $K = 1.0$, $\hat{q}_{кр} = 18.08 \text{ кПа}$;
- кромки $\xi_2 = \pm 1$ шарнірно оперто $K = 4.0$, $\hat{q}_{кр} = 72.3 \text{ кПа}$.

Відносні значення параметрів навантаження деформівної системи в безрозмірному вигляді та умови закріплення пластини для кожної з задач наведено в їх описах.

4.1.4. Вибір сіток скінченних елементів

Для побудови скінченно-елементної моделі пластини з дійсної геометричної моделі використовувалася регулярна сітка елементів, що створювалася модулями пакета прикладних програм.

Характеристики сіток, з використанням яких проводилися розрахунки основних характеристик напружено-деформованого стану пластини з включенням та під дією комбінованого навантаження, наведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Типи сіток для розв'язання задач ідентифікації

Задача	Кількість вузлів сітки	Відносний лінійний розмір елемента	Число рівнянь
Ідентифікація включень (задача 1)	$N_1=441$	0.05	2646
	$N_2=1681$	0.025	10086
	$N_3=3721$	0.0167	22326
	$N_4=6561$	0.0125	39366
Ідентифікація силових впливів (задача 2)	$N_1=961$	0.033	5766
	$N_2=3721$	0.017	22326
	$N_3=5676$	0.013	34056
	$N_4=8281$	0.011	49686

Розмір елемента сітки визначався наперед заданою точністю розв'язання прямої задачі та обирався шляхом послідовного згущення сітки до отримання стабільних результатів за основними показниками напружено-деформованого стану пластини (нормальним переміщенням w , напруженнями s_{11} та s_{22}). Вважалося, що розмір елемента є достатнім, якщо різниця в значеннях зазначених характеристик не перевищувала 3%.

Далі наведено розподіли основних характеристик напружено-деформованого стану деформівної пластини, що було отримано при розв'язанні задач ідентифікації включень (рис. 4.2) та зосереджених силових впливів (рис. 4.3) на зазначених сітках в перерізах, де досягалися найбільші значення вказаних характеристик.

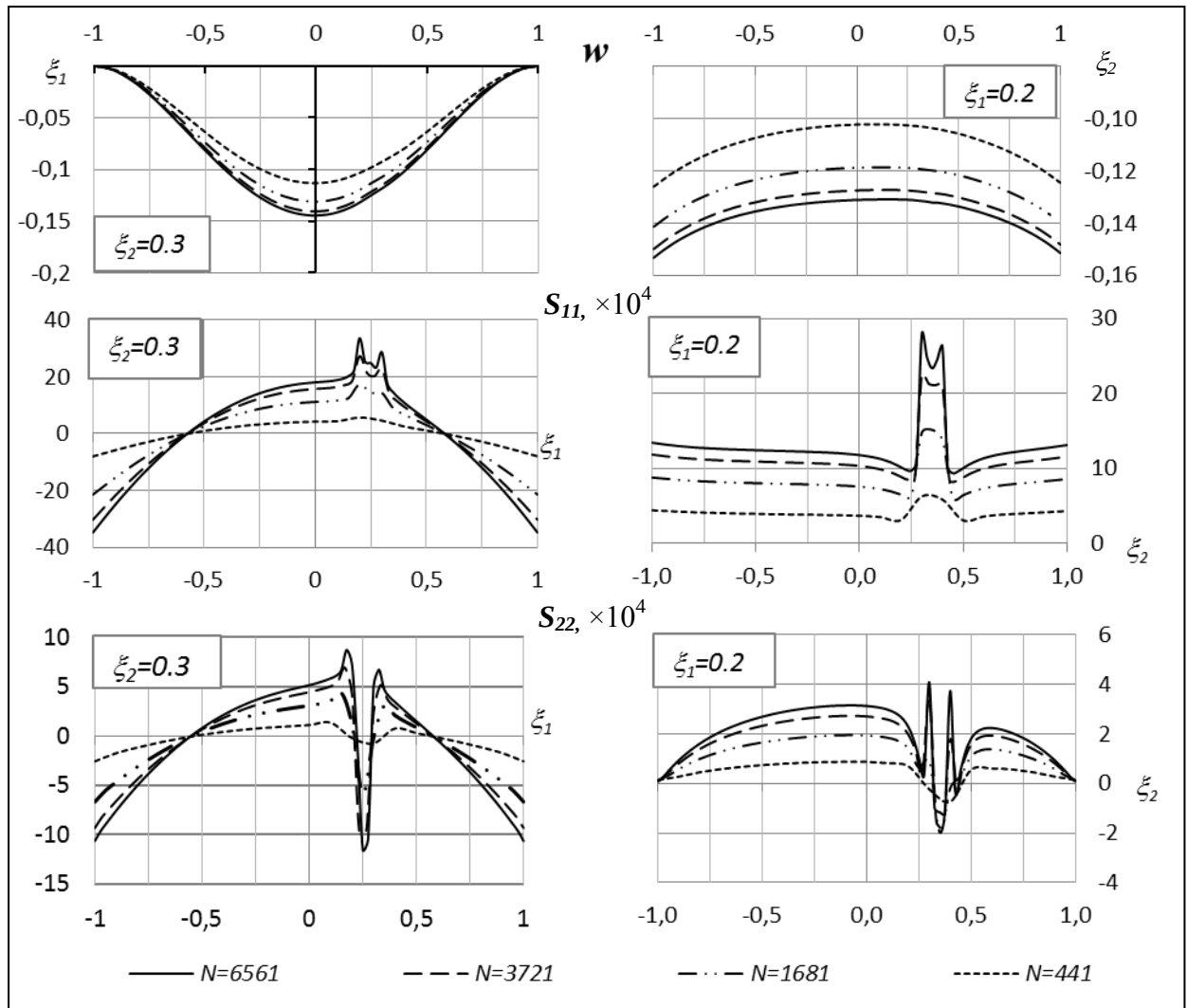


Рис. 4.2 – Розподіли характеристик напружено-деформованого стану пластини (задача 1), отримані на сітках різної щільності

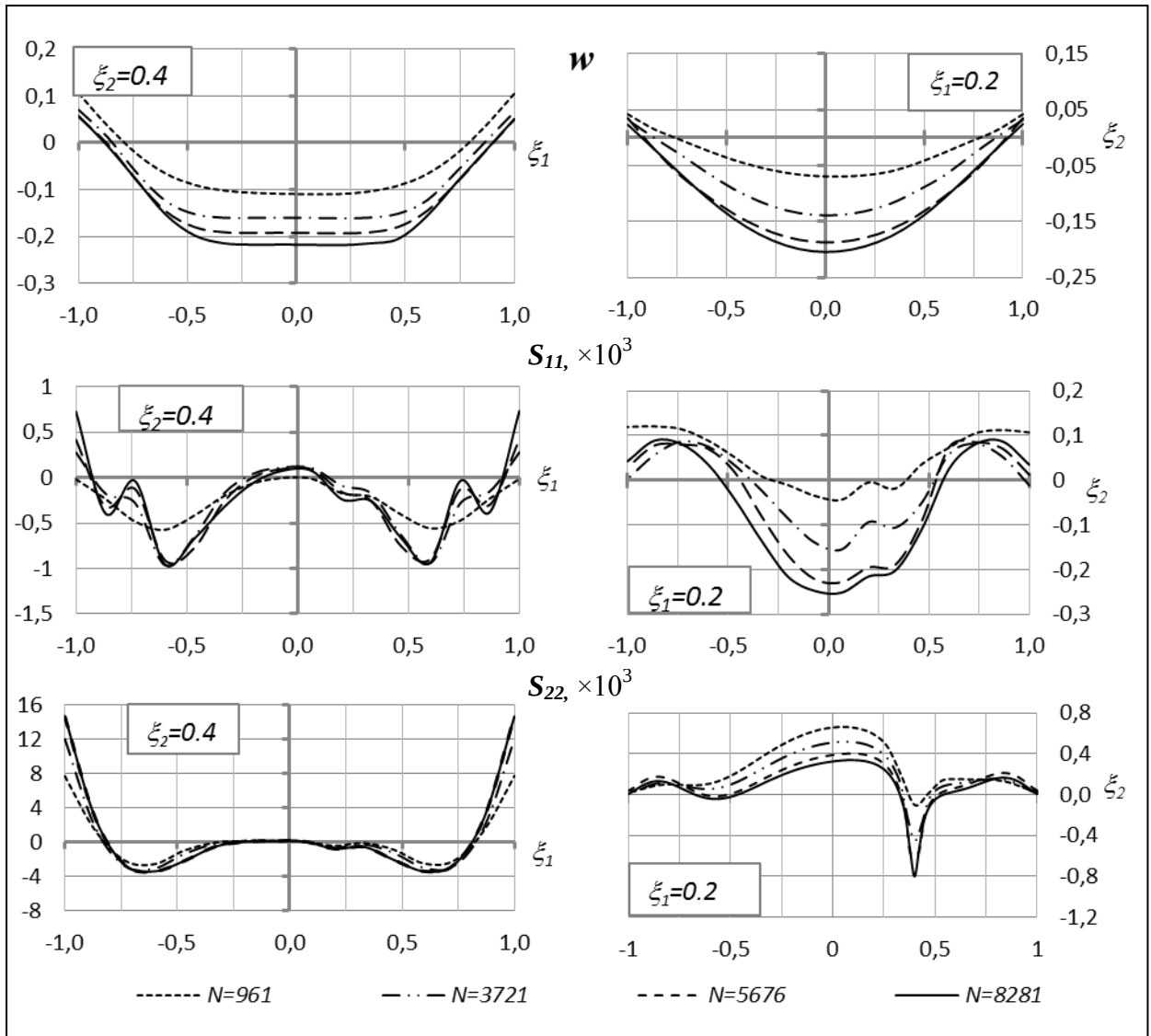


Рис. 4.3 – Розподіли характеристик напружено-деформованого стану пластини (задача 2), отримані на сітках різної щільності

В таблиці 4.2 наведено значення відносних похибок розрахунків значень нормальних переміщень w , напружень s_{11} та s_{22} , які було отримано за формулами:

$$\Delta w^{(l)} = \left| \frac{w(N_l) - w(N_{l-1})}{w(N_{l-1})} \right|; \quad \Delta s_{ii}^{(l)} = \left| \frac{s_{ii}(N_l) - s_{ii}(N_{l-1})}{s_{ii}(N_{l-1})} \right|;$$

l – номер скінченно-елементної сітки; $l = \overline{2,4}$, $i = \overline{1,2}$.

Аналіз даних таблиці дозволяє зробити висновок, що зі згущенням сітки скінчених елементів спостерігалася стабілізація результатів визначення характеристик напружено-деформованого стану пластини.

Таблиця 4.2

Відносні похибки розрахунків характеристик напружено-деформованого стану пластини, отримані на сітках різної щільності

Задача	Варіанти сіток	Відносні похибки, %		
		$\Delta w^{(I)}$	$\Delta s_{11}^{(I)}$	$\Delta s_{22}^{(I)}$
Ідентифікація включень (задача 1)	$N_1=441 - N_2=1681$	21.17	24.44	22.71
	$N_2=1681 - N_3=3721$	4.76	6.38	5.41
	$N_3=3721 - N_4=6561$	2.18	1.84	2.26
Ідентифікація силових впливів (задача 2)	$N_1=961 - N_2=3721$	24.35	29.01	31.67
	$N_2=3721 - N_3=5676$	11.69	12.54	14.13
	$N_3=5676 - N_4=8281$	2.68	2.12	2.74

За результатами обчислювальних експериментів для розв'язання задач ідентифікації було обрано сітки: задача 1 – $N_4=6561$, задача 2 – $N_4=8281$.

4.1.5. Метод розв'язання прямої задачі

Тонкі пластинчасті елементи конструкцій в експлуатаційному стані зазвичай знаходяться в умовах навантажень, близьких до критичних. При цьому переважають осьові стискаючі і нормальні поверхневі навантаження, поєднання яких призводить до необхідності враховувати геометричну нелінійність.

При реалізації методу продовження по параметру в пакеті прикладних програм використовувалися 2 варіанти вибору кроку: кількість кроків і величина кожного кроку методу продовження по параметру навантаження задавалися фіксованими; кількість кроків і величина кожного кроку автоматично підбиралися алгоритмом. Зазначені алгоритми використовують просту модифікацію методу послідовного навантаження, де розрахунок виконується до моменту виродження матриці жорсткості системи. На кожному кроці ітераційного процесу навантаження розв'язується лінеаризована задача. У припущенні, що отриманий розв'язок є досить точним, здійснюється перехід до наступного кроку нелінійного розрахунку.

Як приклад на рис. 4.4 надано діаграму «навантаження-прогин», яку отримано при деформуванні тонкої пластини з включенням лінійними розмірами $l_1/a=0.05$, $l_2/b=0.05$. Місце розташування включення задавалося координатами його кутів: $A(0.2;0.3)$, $B(0.3;0.4)$. Значення модуля пружності включення при розв'язанні прямої задачі $E^*=4$, коефіцієнт Пуассона – $\nu=0.3$. Система перебувала під дією розподіленого поверхневого навантаження q , величина якого збільшувалася з заданим кроком від 0 до 1. Розрахунки проведено з використанням сітки $N=6561$.

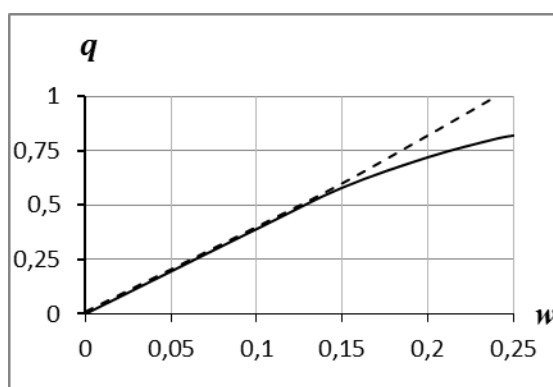


Рис. 4.4 – Залежність «навантаження-прогин» для задачі деформування пластини з точковим включенням

Залежність між прогином та навантаженням, яку було отримано з урахуванням геометричної нелінійності, зображено суцільною лінією, без урахування – пунктирною лінією. Залежності побудовано для вузла, в якому спостерігалися найбільші значення нормальних переміщень w .

Аналіз рисунку свідчить, що починаючи з поверхневого навантаження $q > 0.4$ та по мірі його зростання, результати лінійного та нелінійного розрахунків все більш відрізняються. Тому для розв'язання прямих задач деформування пластин з особливостями проводився нелінійний розрахунок статичного напружено-деформованого стану, а в якості скінченного елемента використано тип елемента, що враховує нелінійну залежність «навантаження-прогин» та допускає великі переміщення точок пластини.

4.2. Ідентифікація включень у тонкій пластині

Представлений в роботі алгоритм було застосовано для визначення по вимірним значенням узагальнених деформацій $\sigma^* = \{\varepsilon_{ij}^*, \chi_{ij}^*\}^T$ місця розташування та модуля Юнга включень у тонкій пластині.

4.2.1. Моделі пластини в задачах ідентифікації включень

Моделі пластин (лінійні розміри $2a \times 2b$, $a/b=1$, товщина h , $a/h=50$, $E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_0 = 0.3$), що використано в обчислювальному експерименті, зображено на рис. 4.5.

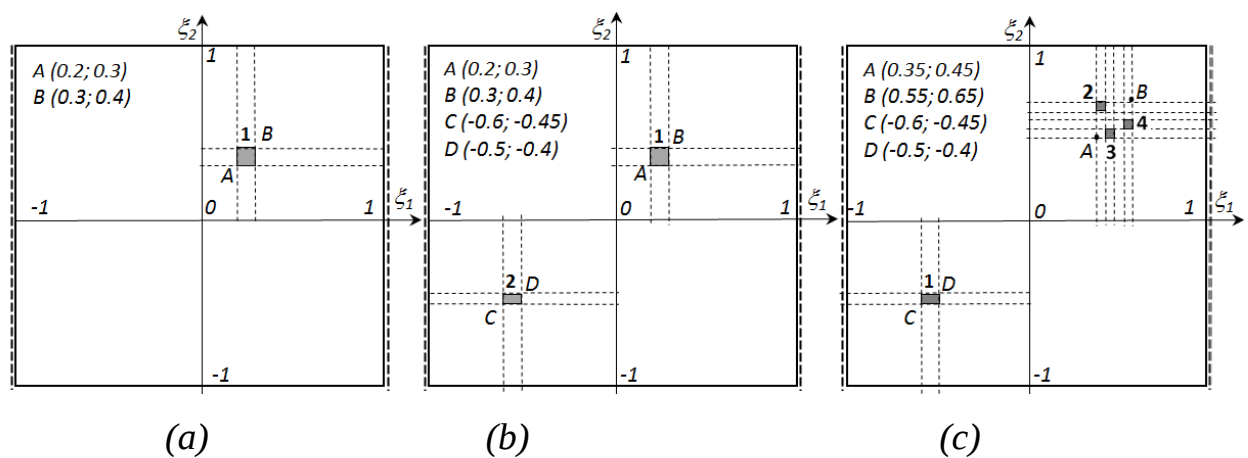


Рис. 4.5 – Моделі пластин с включеннями:

- (a) – пластина с одним включением;
- (b) – пластина с двумя включениями разного размера;
- (c) – пластина с группой дрібних включень

Пластину, що знаходиться під дією відомого нормального розподіленого поверхневого тиску q , жорстко затиснено по кромках $\xi_1 = \pm 1$, кромки $\xi_2 = \pm 1$ вільні. У довільних місцях в пластині наявні включення розміром $l_1 \times l_2$ (на рис. 4.5 включення позначено сірим кольором), пружні властивості яких відмінні від аналогічних характеристик матеріалу пластини.

Місця розташування включень у пластині визначаються координатами лівих нижніх та правих верхніх кутів (координати вказано на рисунках).

Відносні лінійні розміри включень наведено в табл.4.3.

Таблиця 4.3

Відносні лінійні розміри включень в тонкій пластині

Рисунок	Номер включення	Відносні лінійні розміри включень	
		l_1 / a	l_2 / b
4.9 a	1	0.05	0.05
4.9 b	1	0.05	0.05
	2	0.05	0.025
4.9 c	1	0.05	0.025
	2, 3, 4	0.0125	0.0125

4.2.2. Розв'язуючі співвідношення та алгоритм

З урахуванням введеної дискретизації та подання жорсткості пластини з включенням функціонал (3.31) для цієї задачі ідентифікації матиме вигляд:

$$J(U, H^1) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \left[C_1^{ij tq} \varepsilon_{ij_m} \varepsilon_{tq_n} + C_2^{ij tq} \chi_{ij_m} \chi_{tq_n} + \varepsilon^2 (C_1^{*ij tq} \varepsilon_{ij_m} \varepsilon_{tq_n} + C_2^{*ij tq} \chi_{ij_m} \chi_{tq_n}) H_k^1 \right] - \\ - \sum_{n=1}^N (q_{1n} u_{1n} + q_{2n} u_{2n} + q_{3n} w_n) + \sum_{p=1}^P \sum_{m_p}^{M_p} \sum_{n_p}^{N_p} \lambda_p (\sigma_{ij_{m_p}} - \sigma_{ij_{m_p}}^*)^T (\sigma_{ij_{n_p}} - \sigma_{ij_{n_p}}^*) + \sum_{k=1}^K \varphi_{0_k} (H_k^1 - 1). \quad (4.1)$$

Лінеаризовану систему рівнянь для r -го кроку обчислювального процесу на основі методу продовження по параметру може бути записано:

$$\forall m, \quad m = \overline{1, N} \\ \sum_{n=1}^N a_{mn}^{(r)} \Delta U_n^{(r)} + \sum_{k=1}^N a_{mk}^{*(r)} \Delta U_k^{(r)} H_k^1 + \sum_{p=1}^P \sum_{m_p}^{M_p} \sum_{n_p}^{N_p} \lambda_p (\sigma_{ij_{m_p}} - \sigma_{ij_{m_p}}^*)^T (\sigma_{ij_{n_p}} - \sigma_{ij_{n_p}}^*) + \\ + \sum_{k=1}^K \varphi_{0_k} (H_k^1 - 1) = \Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t), \quad (4.2)$$

де $\Delta U_i^{(r)}$ – вектор приростів переміщень на r -му кроці методу продовження;

$\Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t)$ – вектор приростів навантаження на r -му кроці;

$a_{mn}^{(r)}$, $a_{mk}^{*(r)}$ – коефіцієнти матриці жорсткості, що апроксимуються за допомогою методу скінченних елементів на r -му кроці методу продовження, де $a_{mn}^{(r)}$ характеризують жорсткість матеріалу пластини, $a_{mk}^{*(r)}$ – описують жорсткість включень у відповідних вузлах пластини.

У відповідності до (3.14) на r -му кроці методу продовження розв'язок оберненої задачі ідентифікації місця розташування включень може бути надано у вигляді:

$$H_n^{1(r)}(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (C_1^{*ijtq} \varepsilon_{ij_n}(X) \varepsilon_{tq_n}(X) + C_2^{*ijtq} \chi_{ij_n}(X) \chi_{tq_n}(X)) + \lambda_p^{(r)} \sigma_{ij_n} + \varphi_0(X) > 0 \\ 1, & \text{якщо} \quad (C_1^{*ijtq} \varepsilon_{ij_n}(X) \varepsilon_{tq_n}(X) + C_2^{*ijtq} \chi_{ij_n}(X) \chi_{tq_n}(X)) + \lambda_p^{(r)} \sigma_{ij_n} + \varphi_0(X) < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Для визначення невідомих компонент вектора $H^1(X)$, що характеризують місце розташування жорстких включень і подальшого уточнення пружних властивостей включень алгоритм AI було модифіковано у такий спосіб.

Алгоритм ідентифікації місця розташування і модуля Юнга включень

1. Задати змінні: r – номер кроку методу продовження; Δt – крок параметра методу продовження; l – номер кроку внутрішнього ітераційного процесу; s – номер кроку ітераційного процесу метода Ньютона; E_k^* , $k = \overline{1, K}$ – модулі Юнга включень; $H^1 = \{H_n^1\}$, $n = \overline{1, N}$ – вектор невідомих оберненої задачі, $\lambda_n = \{\lambda_n\}$, $n = \overline{1, N}$ – вектор дійсних чисел; ε – задана точність.
2. Задати: $r = 0$, $l = 0$, $s = 0$; початкове наближення модуля Юнга включень $E_k^{(0)}$, $k = \overline{1, K}$; початкове наближення вектора невідомих $H^{1(0,0)} = \{H_n^{1(0,0)}\}$, $H_n^{1(0,0)} = 0 \vee 1$, $n = \overline{1, N}$; початкові значення вектора $\{\lambda_n^{(0,0)}\}$, $n = \overline{1, N}$; фіксовані значення Δt , ε .
3. Обчислити значення $U_n^{(r,l)}$, $Y_n^{(r,l)}(U)$ при заданих значеннях векторів $H^{1(r,l)}$, $\{\lambda_n^{(r,l)}\}$ із розв'язання системи (4.2).
4. Обчислити $\varphi_0^{(r,l)} = \{\varphi_{0_n}^{(r,l)}\}$ шляхом упорядкування компонент $Y_n^{(r,l)} = C_1^{*ijtq} \varepsilon_{ij_n}(X) \varepsilon_{tq_n}(X) + C_2^{*ijtq} \chi_{ij_n}(X) \chi_{tq_n}(X) + \lambda_p^{(r,l)} \sigma_{ij_n}$, $n = \overline{1, N}$.
5. Надати значення компонентам вектора невідомих оберненої задачі $H^{1(r,l)}$ на підставі правила:

$$H_n^{1(r,l)} = \begin{cases} 0, & \text{sign}(Y_n^{(r,l)} + \varphi_{0_n}^{(r,l)}) = 1 \\ 1, & \text{sign}(Y_n^{(r,l)} + \varphi_{0_n}^{(r,l)}) = -1 \end{cases}.$$

6. Якщо значення компонент вектора $H^{1(r,l)}$ співпадають зі значеннями компонент вектора $H^{1(r,l-1)}$, перейти до кроку 8; інакше – далі.
7. $r = r + 1$; $l = 0$; $t^{(r)} = t^{(r-1)} + \Delta t$; перейти до кроку 3.
8. Сформувати вектор $\tilde{H}^{1(s)} = \{\tilde{H}_n^{1(s)}\}$: змінити компоненти вектора $H^{1(r)} = \{H_n^{1(r)}\}$ зі значенням 1 на значення $E_k^{(0)}$; решті компонент вектора $\tilde{H}^{1(s)}$ надати значення E_0 .
9. Визначити компоненти вектора $\tilde{H}^{1(s)}$ з використанням метода Ньютона-Рафсона за формулою (3.19) із заданою точністю ε . Перейти до кроку 10.
10. Кінець.

4.2.3. Опис процедури ідентифікації включень у тонкій пластині

Задачу ідентифікації включень у тонкій пластині розв'язано з використанням виміряних (спостережуваних) в точках X_p , $p = \overline{1, P}$ значень показників напружено-деформованого стану системи – тангенціальних та згинальних деформацій $\sigma^* = \{\varepsilon_{ij_{Xp}}^*, \chi_{ij_{Xp}}^*\}$ у двоетапній процедурі: 1 етап – визначення місця розташування включень; 2 етап – уточнення значення модуля Юнга включень. Спостережувані значення σ^* отримуються із розв'язання прямої задачі при заданому розташуванні та відомих пружних параметрах включень з використанням методу скінченних елементів.

На початку формується вектор невідомих оберненої задачі $H^1(X) = \{H_n^1\}$, $n = \overline{1, N}$ першого етапу процедури ідентифікації. Нумери компонент вектора $H^1(X)$ відповідають номерам вузлів пластини, а їх значення визначають належність даного вузла включенню або пластині: якщо n -ий вузол належить включенню, тоді n -а компонента вектора $H^1(X)$ приймає значення 1, в іншому випадку – значення 0.

Початкове наближення вектору невідомих $H^{1(0)}(X) = \{H_n^{1(0)}\}$, $n = \overline{1, N}$ формується таким чином: компонентам $H_n^{1(0)}$ надається значення 1 у вузлах, в яких спостерігаються найбільші відхилення значень узагальнених деформацій пластини з включеннями від значень відповідних характеристик у вузлах однорідної пластини. Далі значення компонент вектора $H^1(X)$ визначаються у відповідності до алгоритму *A1* при початковому значенні модуля пружності включень $E^{(0)}$.

На r -тому кроці метода продовження по параметру для заданих значень $\lambda_p^{(r)}$ та вектору $H^{1(r)}(X)$ обчислюються значення $U_n^{(r)}$ та $Y_n^{(r)}(U)$, $n = \overline{1, N}$. Шляхом упорядкування компонент $Y_n^{(r)}(U)$ визначаються $\varphi_0^{(r)} = \{\varphi_{0_n}^{(r)}\}$ та, з урахуванням правила (4.3), значення компонент вектора $H^{1(r+1)}(X)$. Така послідовність дій триває доти, поки значення компонент вектору невідомих на ітераціях перестають змінюватися. Наприкінці першого етапу процедури ідентифікації компоненти вектора $H^1(X)$, що отримали значення 1, вказують місце розташування включень у тонкій пластині.

На другому етапі процедури ідентифікації – уточнення значень модуля Юнга включень – початкове наближення $\tilde{H}^{1(0)}(X) = \{\tilde{H}_n^{1(0)}\}$, $n = \overline{1, N}$ формується таким чином: компонентам вектора $H^1(X)$ зі значенням 1 присвоюється початкове значення модуля пружності $E^{(0)}$, компонентам зі значенням 0 – значення модуля пружності матеріалу пластини E_0 .

Далі виконується уточнення значень компонент вектора $\tilde{H}^1(X) = \{\tilde{H}_n^1\}$ із заданою точністю в ітераційній процедурі методу Ньютона-Рафсона (3.19).

4.2.4. Результати ідентифікації місця розташування та модуля Юнга двох включень у тонкій пластині

Розглядається пластина з двома включеннями (рис. 4.5 *b*), що знаходиться під дією нормального розподіленого тиску $q = 0.9$. По кромках

пластини $\xi_1 = \pm 1$ реалізовано умови жорсткого защемлення, кромки $\xi_2 = \pm 1$ вільні. Розташування включень задано координатами точок: включення 1 $A(0.2;0.3)$, $B(0.3;0.4)$; включення 2 – $C(-0.6;-0.45)$, $D(-0.5;-0.4)$. Дійсні значення модуля Юнга включення 1 – $E_1^* = 7$, включення 2 – $E_2^* = 5$, коефіцієнт Пуассона обох включень – $\nu = 0.3$.

З використанням методу скінченних елементів із розв'язання прямої задачі деформування пластини при заданому розташуванні та зазначених пружних характеристиках включень було отримано значення узагальнених деформацій σ^* , які в подальшому використовувалися для виконання ідентифікації в якості спостережуваних значень.

4.2.4.1. Визначення місця розташування включень (етап 1)

На рис. 4.6 *a* надано картину напружено-деформованого стану пластини з дійсними включеннями (для візуалізації використано розподіл напружень по Мізесу). Області, що відповідають початковим наближенням вектора $H^{(0)}(X) = \{H_n^{(0)}\}$, $n = \overline{1, N}$ для включень 1 та 2, на рис. 4.6 *b* позначено прямокутниками та номерами. На початку процедури ідентифікації область початкового наближення включення 1 складається з 25 вузлів, включення 2 – з 20 вузлів. Процедура ідентифікації місця розташування включень проводилася з початковим наближенням модуля пружності обох включень $E^{(0)} = 9$.

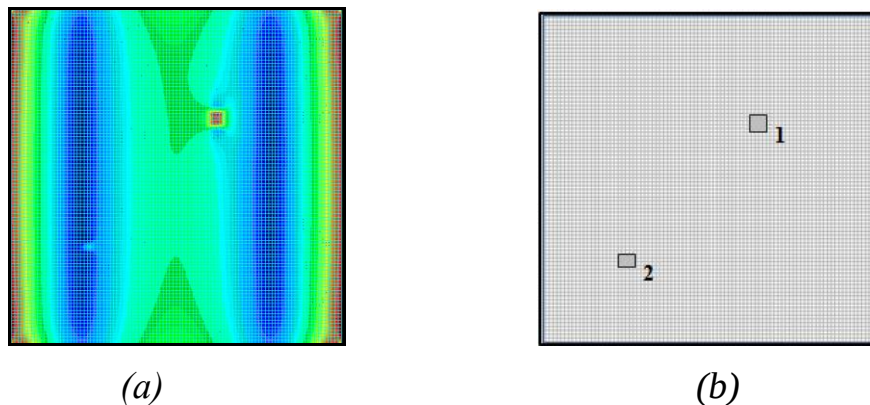


Рис. 4.6 – Напружено-деформований стан пластини з двома включеннями (a) та області початкового наближення вектора невідомих оберненої задачі (b)

У таблиці 4.4 наведено результати виконання першої, другої та четвертої ітерацій (результат ідентифікації) процедури визначення місця розташування включень.

Таблиця 4.4

Ідентифікація місця розташування двох включень у тонкій пластині

	1 ітерація	2 ітерація	4 ітерація
Включення 1			
Включення 2			

Номерами позначено вузли сітки скінченних елементів, яким на початку процедури ідентифікації відповідали компоненти $H_n^{1(0)}$ зі значенням 1, хрестиками – ті з зазначених вузлів, в яких компоненти вектора $H^{1(0)}(X)$ після вказаної кількості ітерацій дорівнювали 0, чорними точками – 1.

У таблиці 4.5 для кожного кроку процесу ідентифікації місця розташування включень наведено результати обчислення значень $Y_n^{(r)}$ у вузлах скінченно-елементної сітки та результати визначення компонент $H_n^{1(r)}$. З аналізу результатів, наведених у таблиці 4.5, видно, що вектор $H^{1(4)}(X)$ (результат ідентифікації місця розташування включень) складається з 18 компонент зі значенням 1, причому 11 компонент характеризують місце розташування включення 1, а 7 компонент – включення 2.

Таблиця 4.5

Процес ідентифікації місця розташування
двох включень у тонкій пластині

№ вузла, n	1 ітерація		2 ітерація		3 ітерація		4 ітерація	
	$Y_n^{(1)} + \varphi_0^{(1)}$	$H_n^{1(1)}$	$Y_n^{(2)} + \varphi_0^{(2)}$	$H_n^{1(2)}$	$Y_n^{(3)} + \varphi_0^{(3)}$	$H_n^{1(3)}$	$Y_n^{(4)} + \varphi_0^{(4)}$	$H_n^{1(4)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
включення 1								
264	-0.1544	1	0.1121	0	0.0656	0	0.0304	0
265	-0.1522	1	-0.1200	1	0.0522	0	0.0296	0
266	-0.1602	1	-0.1190	1	-0.0510	1	0.0305	0
267	-0.1931	1	-0.1203	1	-0.0730	1	0.0279	0
268	0.1733	0	0.1157	0	0.0650	0	0.0192	0
285	-0.1552	1	-0.1300	1	-0.0505	1	-0.0198	1
286	-0.1721	1	-0.1304	1	-0.0677	1	-0.0145	1
287	-0.2306	1	-0.1390	1	-0.0644	1	-0.0187	1
288	-0.2412	1	-0.1320	1	-0.0622	1	-0.0193	1
289	0.1201	0	0.1281	0	0.0601	0	0.0207	0
306	-0.1613	1	-0.1235	1	-0.0542	1	-0.0189	1
307	-0.1925	1	-0.1242	1	-0.0590	1	-0.0210	1
308	-0.1961	1	-0.1301	1	-0.0624	1	-0.0191	1
309	-0.2218	1	-0.1304	1	-0.0608	1	-0.0176	1
310	0.1146	0	0.1240	0	0.0711	0	0.0252	0
327	-0.1237	1	-0.1211	1	0.0703	0	0.0215	0
328	-0.1439	1	-0.1252	1	-0.0541	1	-0.0270	1
329	-0.1524	1	-0.1313	1	-0.0577	1	-0.0310	1
330	-0.1538	1	-0.1302	1	-0.0490	1	-0.0290	1
331	0.0893	0	0.1197	0	0.0524	0	0.0173	0
348	-0.1108	1	0.1155	0	0.0541	0	0.0221	0
349	-0.1351	1	-0.1117	1	-0.0597	1	0.0155	0
350	-0.1421	1	-0.1220	1	-0.0614	1	0.0190	0
351	-0.1397	1	0.1124	0	0.0553	0	0.0219	0
352	0.1511	0	0.1138	0	0.0494	0	0.0211	0
включення 2								
20	0.1279	0	0.0929	0	0.0437	0	0.0140	0
25	-0.1413	1	0.0969	0	0.0361	0	0.0094	0
30	-0.1361	1	-0.1180	1	-0.0436	1	0.0089	0
35	-0.1503	1	-0.0907	1	-0.0437	1	0.0150	0

40	-0.1612	1	0.1010	0	0.0399	0	0.0099	0
109	0.1073	0	0.1126	0	0.0373	0	0.0104	0
110	-0.2107	1	-0.1070	1	-0.0526	1	-0.0107	1
111	-0.1774	1	-0.1110	1	-0.0581	1	-0.0115	1
112	-0.2215	1	-0.1237	1	-0.0505	1	-0.0260	1

Продовження табл.4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
113	-0.1590	1	-0.1230	1	0.0483	0	0.0110	0
130	0.1173	0	0.1150	0	0.0404	0	0.0098	0
131	-0.2086	1	-0.1025	1	-0.0460	1	-0.0123	1
132	-0.2216	1	-0.1020	1	-0.0493	1	-0.0124	1
133	-0.2108	1	-0.1080	1	-0.0427	1	-0.0130	1
134	-0.1127	1	-0.0970	1	0.0420	0	0.0118	0
151	0.1311	0	0.1021	0	0.0396	0	0.0105	0
152	0.1092	0	0.0983	0	0.0323	0	0.0100	0
153	-0.1264	1	0.1070	0	0.0349	0	0.0099	0
154	-0.1417	1	-0.0920	1	-0.0417	1	-0.0097	1
155	-0.1561	1	0.0937	0	0.0409	0	0.0097	0

На рис. 4.7 показано як змінювалась картина напружено-деформованого стану пластини з двома включеннями на ітераціях процедури ідентифікації їх місця розташування.

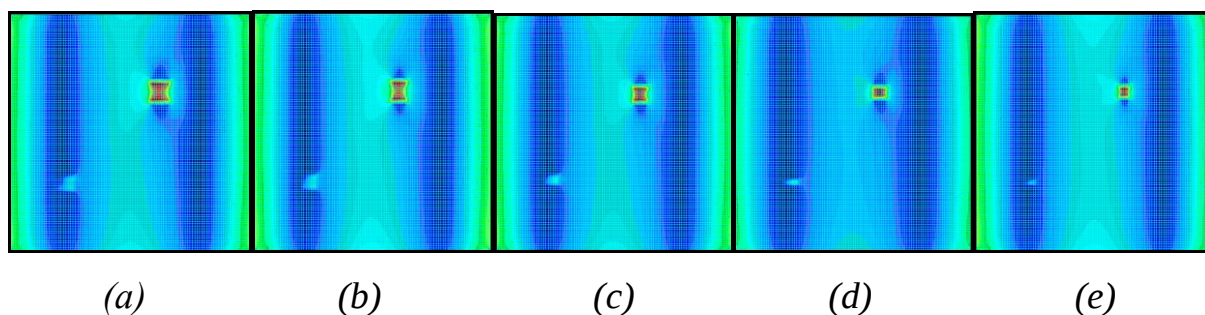
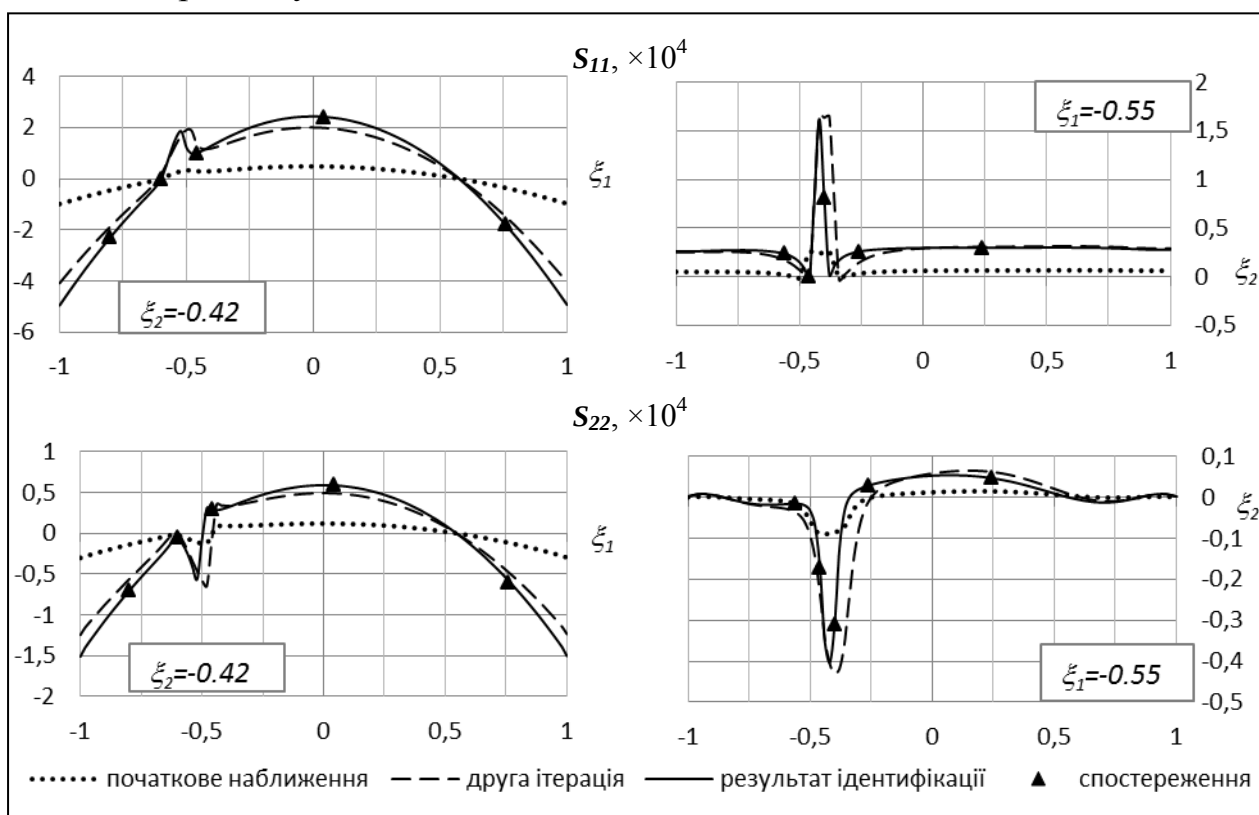
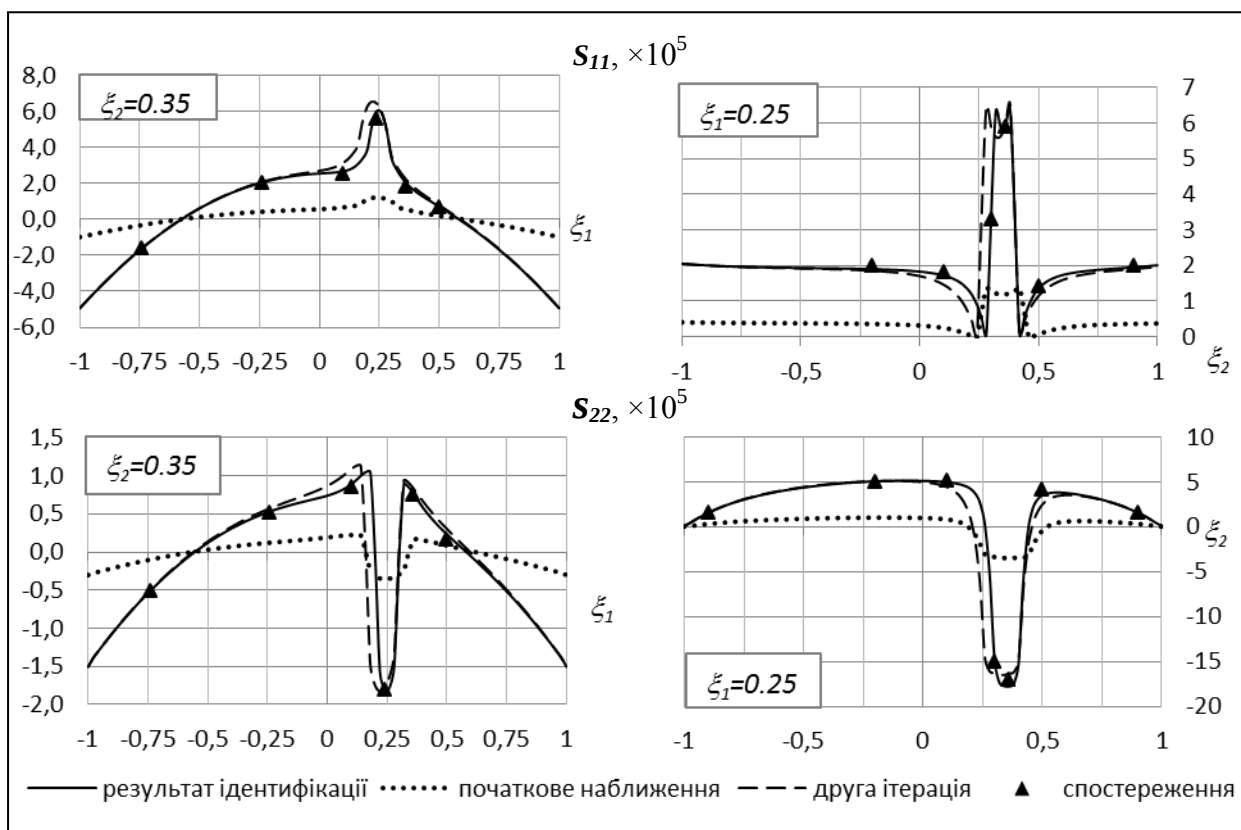


Рис. 4.7 – Напружено-деформовані стани пластини при ідентифікації місця розташування двох включень:

- (a) – початкове наближення; (d) – результат третьої ітерації;
 (b) – результат першої ітерації; (e) – результат (4 ітерація)
 (c) – результат другої ітерації;

На рис. 4.8 та 4.9 показано розподіли напружень на етапах процесу ідентифікації місця розташування двох включень в перерізах пластини, у яких ці характеристики мали найбільші значення. Для порівняння маркерами позначено значення напружень для пластини з дійсними включеннями.



З наведених залежностей витікає, що напруження, які було отримано для вектора $H^{1(4)}(X)$ (результат визначення місця розташування включень), практично збігаються з напруженнями, отриманими для дійсних включень. Наявні відмінності обумовлено різницею між початковим наближенням $E^{(0)}$, при якому виконувалася ідентифікація розташування включень, та дійсними значеннями їх пружних модулів E_1^* , E_2^* .

4.2.4.2. Ідентифікація модулів Юнга включень (етап 2)

Далі було виконано процедуру ідентифікації пружних властивостей включень з використанням методу Ньютона-Рафсона. Вектор початкового наближення $\tilde{H}^{1(0)}(X)$ було складено з компонент вектора $H^{1(4)}(X)$ шляхом заміни значень 1 на початкове наближення модуля Юнга $E^{(0)}$, а значень 0 - на значення модуля Юнга матеріалу пластини E_0 .

У таблиці 4.6 наводяться результати відновлення значень компонент вектора $\tilde{H}^1(X)$ (у розмірному вигляді) для вузлів, для яких на першому етапі процедури ідентифікації було встановлено належність включенню.

Таблиця 4.6

Відновлення модуля Юнга двох включень у тонкій пластині

Номер вузла, n	Відновлені значення $\hat{E}_n^{(6)}, \times 10^6 \text{ МПа}$	Дійсні значення $E_n^*, \times 10^6 \text{ МПа}$	Похибка відновлення, %
1	2	3	4
Включення 1			
285	0.2050	0.2000	2.50
286	1.4326	1.4000	2.33
287	1.4228	1.4000	1.63
288	1.4272	1.4000	1.94
306	0.2048	0.2000	2.40
307	1.4316	1.4000	2.26
308	1.4281	1.4000	2.01
309	1.4239	1.4000	1.71
328	1.4206	1.4000	1.47
329	1.4323	1.4000	2.31
330	1.4162	1.4000	1.16

Продовження табл. 4.6

1	2	3	4
Включення 2			
110	1.0141	1.0000	1.41
111	1.0124	1.0000	1.24
112	1.0199	1.0000	1.99
131	1.0222	1.0000	2.22
132	1.0193	1.0000	1.93
133	1.0218	1.0000	2.18
154	0.2049	0.2000	2.45

Як випливає з таблиці, для визначення значень компонент вектора $\tilde{H}^1(X)$ із заданою точністю $\varepsilon = 0.001$ знадобилось 6 ітерацій методу Ньютона-Рафсона. Похибка відновлення модуля Юнга обох включень не перевищує 2.4 %. Значення компонент вектора $\tilde{H}^1$, що відповідають вузлам, в яких включення були відсутні (вузли 154, 285 та 306), на другому етапі ідентифікації відновлені з похибкою, що не перевищує 2.5 %.

На рис 4.10 наведено значення 3 компонент вектора $\tilde{H}^1$ на ітераціях процедури ідентифікації пружних характеристик: $\tilde{H}_{308}^1$ (вузол 308 належить включенню 1), $\tilde{H}_{132}^1$ (вузол 132 належить включенню 2) і $\tilde{H}_{154}^1$ (вузол 154 належить області пластини без включень).

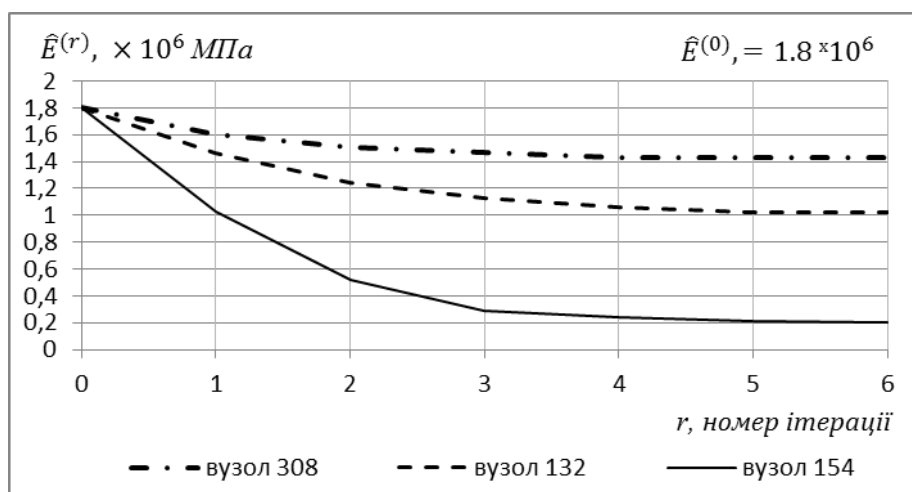


Рис. 4.10 – Ідентифікація модуля Юнга двох включень з початковим значенням $\hat{E}^{(0)} = 1.8 \cdot 10^6$ МПа

Як свідчать наведені залежності, на ітераціях методу Ньютона спостерігалось стабільне наближення значення модуля пружності у кожному з вказаних вузлів до дійсного значення.

Ідентифікацію місця розташування та модуля Юнга двох включень було виконано також з використанням початкового наближення модуля Юнга включень $E^{(0)} = 2$. За результатами виконання 6 ітерацій першого етапу обчислювальної процедури ідентифікації визначено місце розташування включень, при цьому вектор невідомих $H^{(6)}(X)$ складався з 21 компоненти із значенням 1, з яких 12 компонент визначали місце розташування включення 1, 9 – включення 2. Для ідентифікації пружних характеристик включень при зазначеному початковому значенні модуля пружності знадобилося виконати 8 ітерацій методу Ньютона-Рафсона. Похибка відновлення модуля Юнга обох включень не перевищувала 1.6 %. Похибка відновлення значень модуля Юнга в вузлах, що належать області пластини, не перевищувала 2.4 %.

За результатами розв'язання задачі ідентифікації включень у тонкій пластині з різними початковими наближеннями їх модулів Юнга можна зробити висновок, що ідентифікація місця розташування включень забезпечує пошук локального мінімуму функціоналу оберненої задачі на компактній множині, тому вибір початкового наближення модуля пружності не відіграє суттєвої ролі.

4.2.5. Порівняння запропонованого підходу з існуючими методиками

Для дослідження переваг запропонованого підходу було проведено порівняння результатів двоетапної процедури ідентифікації місця розташування та модуля пружності включень в тонкій пластині з результатами, отриманими при використанні класичного підходу для розв'язання оберненої задачі в варіаційній постановці.

Зазвичай при розв'язанні обернених задач ідентифікації за відомими результатами вимірювань використовується варіаційне формулювання оберненої задачі і невідомі функції задачі відшукуються з умови мінімуму

функціонала $J(H) = \rho_N(\sigma(X, H), \sigma^*)$, $H \in \overline{H}$, що характеризує відстань між вимірними та обчисленими значеннями узагальнених деформацій. Для мінімізації зазначеного функціоналу можна використовувати метод Ньютона-Рафсона.

Для оцінки переваг запропонованого підходу проведено порівняння з результатами, отриманими при ідентифікації місця розташування і пружних властивостей включень з використанням процедури методу Ньютона-Рафсона без спеціального вибору початкового наближення.

Розглянуто пластину з двома включеннями (рис. 4.5 *b*), що знаходиться під дією нормальної розподіленого навантаження $q = 0.8$. На кромках $\xi_1 = \pm 1$ пластини реалізовані умови жорсткого защемлення, кромки $\xi_2 = \pm 1$ – вільні.

Спостережувані значення деформацій σ^* визначено з розв'язання прямої задачі про деформацію пластини з такими характеристиками включень: модуль Юнга включення 1 – $E_1^* = 7$ ($\hat{E}_1^* = 1.4 \cdot 10^6 \text{ МПа}$), включення 2 – $E_2^* = 5$ ($\hat{E}_2^* = 1 \cdot 10^6 \text{ МПа}$), коефіцієнт Пуассона обох включень – $\nu = 0.3$. Місцезнаходження включень задано координатами точок: включення 1 – $A(0.2; 0.3)$, $B(0.3; 0.4)$; включення 2 – $C(-0.6; -0.45)$, $D(-0.5; -0.4)$.

Компоненти вектора початкового наближення $H^{1(0)}(X)$ задавалися значеннями $E^{(0)} = 9$ ($\hat{E}^{(0)} = 1.8 \cdot 10^6 \text{ МПа}$) на елементах пластини, де спостерігалися найбільші відхилення нормальних переміщень від вказаних характеристик для однорідної пластини, що знаходиться при аналогічних умовах навантаження. Решті компонент вектора $H^{1(0)}(X)$ було надано значення жорсткості матеріалу пластини $E^{(0)} = 1$ ($\hat{E}^{(0)} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$). Далі значення компонент вектора $H^1(X)$ визначалися в ітераційній процедурі методу Ньютона-Рафсона.

Результат ідентифікації модуля Юнга досліджуваної тонкої пластини, отриманий після виконання 8 ітерацій, показано на рис. 4.11 (область включення 1) та 4.12 (область включення 2). Области, які належать до

дійсних включень, окреслено чорними прямокутниками. Вузли скінченно-елементної сітки, що відносяться до області початкового наближення, позначено номерами.

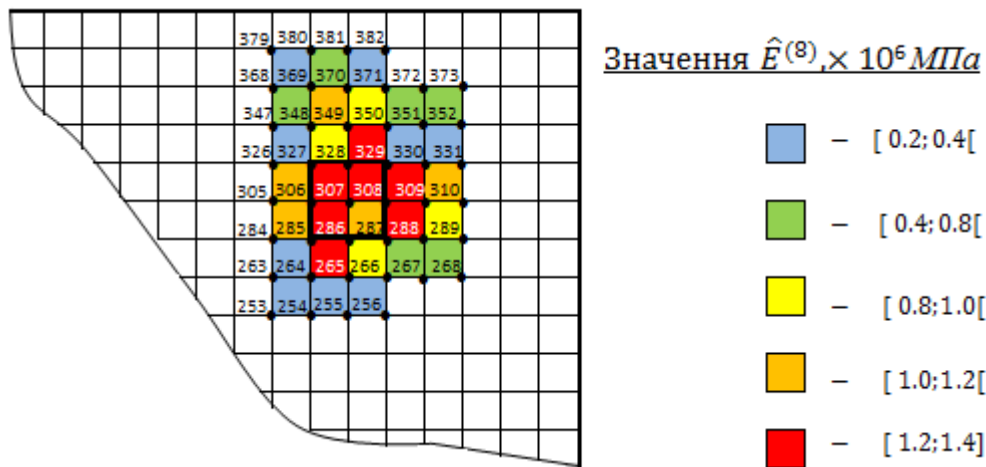


Рис. 4.11 – Ідентифікація модуля Юнга включення 1

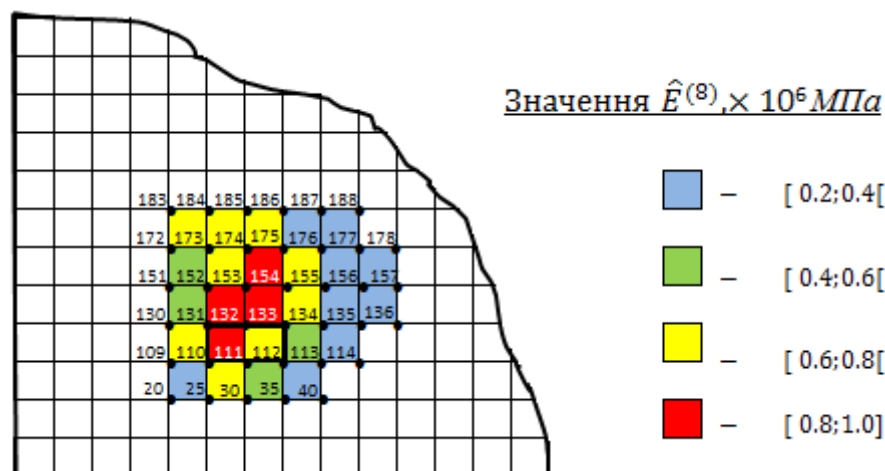


Рис. 4.12 – Ідентифікація модуля Юнга включення 2

Аналіз рисунків свідчить, що в результаті з використанням однієї лише ітераційної процедури методу Ньютона-Рафсона без попереднього визначення місця розташування включень отримати якісну ідентифікацію їх пружних властивостей не вдалося. На ітераціях спостерігалися коливання значень компонент вектора невідомих. У загальному випадку обчислювальний процес був розбіжним, похибки ідентифікації пружних характеристик істотно змінювалися від ітерації до ітерації.

За результатами обчислювального експерименту можна стверджувати, що при довільному виборі початкового наближення задовільний результат ідентифікації модулів пружності включень без уточнення їх місця розташування може бути отримано тільки у випадку, якщо вдалося «вгадати» початкове наближення модулів Юнга у вузлах скінченно-елементної сітки, тобто, якщо характер розподілу та рівень значень пружних характеристик виявиться близьким до дійсної залежності.

4.2.6. Аналіз впливу взаємного розташування включень на результати їх ідентифікації

Розглядається пластина з групою дрібних включень (рис. 4.15 с). Пластина знаходиться під дією відомого розподіленого поверхневого тиску $q = 0.6$, кромки $\xi_1 = \pm 1$ жорстко затиснено, кромки $\xi_2 = \pm 1$ вільні.

Спостережувані значення σ_p^* , $p = \overline{1, P}$ було отримано з розв'язання прямої задачі за таких умов: розміри дійсних включень: 1 – $l_1/a = 0.05$, $l_2/b = 0.025$; 2 - 4 – $l_1/a = 0.0125$, $l_2/b = 0.0125$; пружні властивості включень: $E_i^* = 6$, $i = \overline{1, 4}$, $\nu = 0.3$.

Область, яку було обрано в якості початкового наближення вектора невідомих оберненої задачі $H^{1(0)}(X) = \{H_n^{1(0)}\}$, на рис. 4.13 а позначено штрихуванням. Дійсні включення зображені сірими прямокутниками з номерами. Вектор початкового наближення $H^{1(0)}(X)$ складався з 207 компонент, що дорівнювали 1. При цьому області включення 1 відповідали 38 компонент, області групи включень 2-4 – 169 компонент зі значенням 1. Далі значення вектору $H^1(X)$ визначалися в ітераційній процедурі запропонованого підходу з початковим значенням модуля пружності $E^{(0)} = 5$.

На ітераціях першого етапу процедури ідентифікації спостерігалось послідовне зменшення області місця розташування включень (тобто зменшувалась кількість компонент вектору $H^1(X)$ зі значенням 1).

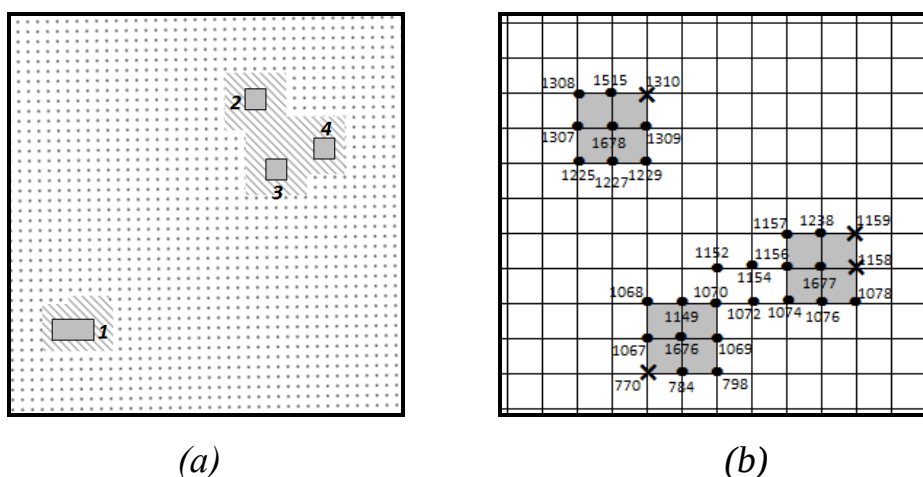


Рис. 4.13 – Ідентифікація місця розташування включень у в пластині:

(a) – початкове наближення $H^{(0)}(X)$;

(b) – результат ідентифікації включень 2 – 4

На рис. 4.13 *b* надано результат ідентифікації включень 2 - 4, який було отримано за 5 кроків ітераційної процедури. Сірим кольором позначено області дійсних включень, а хрестиками – вузли вказаних областей, які було виключено на ітераціях процедури ідентифікації (відповідні компоненти вектора $H^1(X)$ отримали значення 0). Вузли, для яких було встановлено належність до включень (відповідні компоненти вектора $H^{1(5)}(X)$ отримали значення 1), позначено чорними точками.

Для візуалізації ітераційного процесу ідентифікації місця розташування групи включень на рис. 4.14 зображено картини напружено-деформованих станів пластини з групою включень на першому етапі процедури ідентифікації. Для порівняння на рис. 4.14 *d* наведено картину деформування для пластини з дійсними включеннями.

Аналіз рис.4.14 свідчить, що розподіл напружень у пластині з дійсними включеннями відрізняється від розподілу напружень у пластині на ітераціях процесу визначення місця розташування включень. На рис. 4.14 *c* (результат ідентифікації) значні відмінності спостерігаються тільки в області розташування включень 3 та 4.

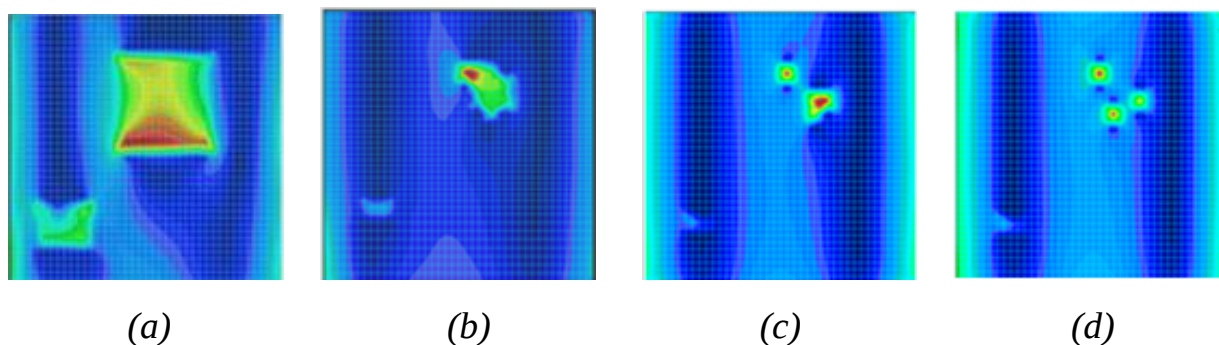


Рис. 4.14 – Напружено-деформований стан пластини з групою включень:

- (a) – початкове наближення;
- (b) – результат третьої ітерації;
- (c) – результат ідентифікації;
- (d) – дійсні включення

На рис. 4.15 проілюстровано результати першого етапу процедури ідентифікації включень 2-4. Кольорами позначено області, в яких компоненти вектора невідомих оберненої задачі $H^1(X)$ зберігали значення 1 вказану кількість ітерацій. Чорними квадратами окреслено області розташування дійсних включень.

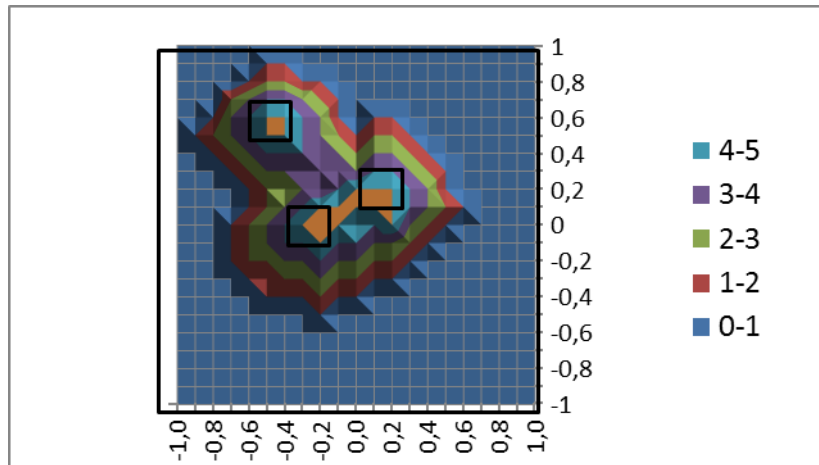


Рис. 4.15 – Результати першого етапу ідентифікації групи включень 2-4

Аналіз рисунку свідчить, що у процесі ідентифікації після виконання 4 ітерацій було локалізовано область розташування включення 2, для включень 3 та 4 визначено тільки загальну область розташування. Крім того, не всі компоненти вектора $H^1(X)$, що відповідають вузлам дійсних включень, в результаті виконання обчислювального процесу отримали значення 1; та навпаки, значення 1 після 5 кроку ітераційної процедури мали компоненти,

що характеризують вузли пластини без включень. Продовження ітераційного процесу не змінило значень компонент вектору $H^1(X)$.

Таким чином, на першому етапі процедури ідентифікації групи включень було локалізовано включення 1-2 (відповідно за 3 та 4 ітерації), а включення 3-4 ідентифіковано алгоритмом як єдине включення, розташоване в центрі області, яку займають дійсні включення 3 та 4. Також при роботі алгоритму було частково виключено вузли, що визначають місце розташування включень 3 та 4. І навпаки, вузли, що розташовані ближче до центру групи та належать області пластини, залишилися. При продовженні ітераційної процедури ідентифікації відокремити області включень 3 та 4 не вдалося. Загальна похибка відновлення місця розташування групи включень 1-4 не перевищувала 8%. Під похибкою відновлення в даному випадку розуміється відношення кількості вузлів включення, які в результаті ідентифікації було виявлено алгоритмом, до кількості вузлів, що відносяться до дійсного включення.

За результатами дослідження впливу відстані між включеннями на характер виконання процедури ідентифікації їх місця розташування можна констатувати, що запропонований алгоритм дозволяє одночасно визначити області розташування включень різного розміру, якщо вони розміщені на достатній відстані одне від одного. Для групи близько розташованих дрібних включень (відстань між включеннями порівняна з розміром включень, а лінійний розмір включень становить 2-3 скінченних елемента) можлива ідентифікація тільки спільної області їх розташування.

Далі було виконано уточнення пружних властивостей включень 1-4 – другий етап процедури ідентифікації. Було сформовано вектор $\tilde{H}^{1(0)}(X)$ шляхом заміни компонент $H^{1(5)}(X)$ зі значенням 1 на початкове наближення модуля Юнга $E^{(0)} = 5$.

Для визначення значень компонент вектора $\tilde{H}^1(X)$ із заданою точністю було виконано 7 ітерацій методу Ньютона-Рафсона. Похибка відновлення

пружних характеристик групи включень не перевищувала 2.5%. Відновлення значень модуля Юнга в вузлах пластини, які на першому етапі ідентифікації були віднесені до області включень, складала близько 15%.

4.2.7. Аналіз впливу параметрів сітки вимірювань на результат ідентифікації включень

Із використанням запропонованого підходу до вибору сітки вимірів було розв'язано задачу ідентифікації включень у пластині, яка перебуває під дією нормального розподіленого навантаження $q=0.6$. Кромки $\xi_1 = \pm 1$ жорсткого затиснено, $\xi_2 = \pm 1$ – вільні.

Розглянуто задачі ідентифікації одного, двох та групи включень (рис. 4.5). Відносні лінійні розміри включень наведено в табл. 4.3, пружні властивості всіх включень: $E^* = 5, \nu = 0.3$.

У відповідності до умови (3.34) було визначено вузли сітки, в яких вимірювалися значення узагальнених деформацій σ^* (рис. 4.16).

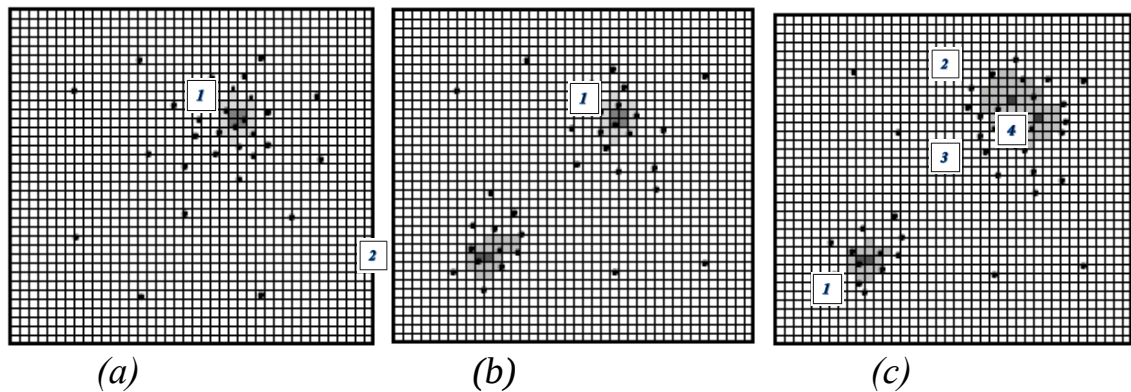


Рис. 4.16 – Вибір точок вимірювання у процесі ідентифікації одного (a), двох (b) та групи включень (c) у тонкій пластині

Вузли сітки вимірювань розташовані нерівномірно і наближені до областей, в яких властивості пластини є неоднорідними (на рисунку області позначені світло-сірим кольором). Елементи, які належать до дійсних включень, виділені темно-сірим кольором.

Для аналізу впливу вибору сітки спостережень на характер та результати процедури відновлення розташування включень та їх модулів

пружності виконано порівняння з результатами ідентифікації, отриманими для рівномірної сітки. Точки вимірювань рівномірної сітки вибиралися по осях ξ_1, ξ_2 на інтервалі $[-0.8; 0.8]$ з кроком $h = 0.2$. Результати обчислювального експерименту наведено в таблиці 4.7.

Таблиця 4.7

Порівняльний аналіз результатів ідентифікації включень при використанні різних сіток вимірювань

Кількість включень	Тип сітки вимірювань	Кількість ітерацій на першому етапі ідентифікації	Другий етап ідентифікації	
			Кількість ітерацій	Похибка відновлення, %
1 включення (рис.4.9 а)	рівномірна	5	5	2.17
	сітка за умови (3.34)	4	4	2.11
2 включення (рис.4.9 б)	рівномірна	6	6	2.21
	сітка за умови (3.34)	4	4	2.08
група включень (рис.4.9 с)	рівномірна	7	9	2.44
	сітка за умови (3.34)	5	7	2.37

На рис. 4.17 з використанням логарифмічної шкали наведено результати, що характеризують залежність відносної похибки наближення значень узагальнених деформацій $\sigma(X, H^1)$ в точках X_p , $p = \overline{1, P}$, до спостережуваних значень σ_p^* для різних видів деформівних систем з включеннями в залежності від числа точок вимірювань. При побудові зазначених залежностей було використано рівномірно розподілені по поверхні пластини сітки вимірів. Суцільна лінія відповідає результату ідентифікації включення 1 (рис. 4.5 а), пунктирна - включень 1 і 2 (рис. 4.5 б), короткий пунктир - групи включень (рис. 4.5 с).

Маркерами на кожній кривій показані значення, які було отримано з використанням запропонованої в роботі процедури вибору інформативних точок вимірювань для кожної з розглянутих задач ідентифікації.

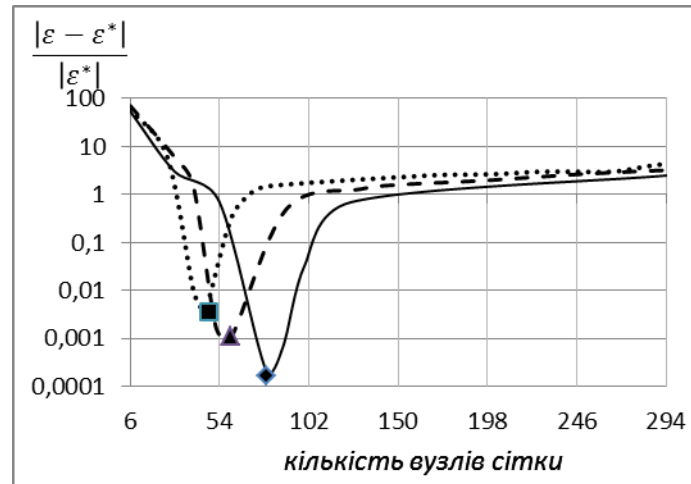


Рис. 4.17 – Залежність відносної похибки наближення до значень σ_p^* від числа точок спостереження

З аналізу наведених залежностей витікає, що для всіх розглянутих моделей пластин з включеннями існує область значень кількості вузлів сітки вимірів (50-80 вузлів), в якій значення відносної похибки мінімальні, при цьому значення функціоналу оберненої задачі відповідають критеріям виходу з ітераційної процедури методу Ньютона-Рафсона. Зі збільшенням кількості точок вимірювань спостерігається зростання відносної похибки, пов'язане з погіршенням обумовленості матриці, що призводить до більшої похибки відновлення невідомих функцій оберненої задачі.

Слід відзначити, що для всіх розглянутих задач ідентифікації включень спеціальний вибір точок спостереження дозволяє отримати найменше значення відносної похибки наближення до спостережуваних значень σ_p^* . При цьому кількість точок, яку було визначено в процедурі вибору, є близькою до кількості точок рівномірної сітки. Таким чином, використання запропонованого підходу до вибору точок вимірювання не збільшує розмірність матриці оберненої задачі, а зменшення відносної похибки у порівнянні з рівномірною сіткою вимірів досягається за рахунок вибору місця розташування точок вимірювання.

Результати обчислювальних експериментів продемонстрували ефективність використання запропонованого підходу щодо ідентифікації

жорстких включень різного розміру, взаємного розташування та пружних властивостей.

4.3. Ідентифікація локального зовнішнього впливу (задача 2)

Обернена задача відновлення параметрів моделі локального навантаження полягала у визначенні вектору невідомих параметрів моделі $H^2(X)$ по вимірним значенням узагальнених деформацій $\sigma^* = \{\varepsilon_{ij}^*, \chi_{ij}^*\}^T$, $p = \overline{1, P}$. Значення вектора деформацій σ^* в вузлах сітки визначалися з розв'язання прямої задачі деформування пластини при фіксованому векторі параметрів $H^2(X)$ та заданій величині локального силового впливу.

4.3.1. Моделі пластини в задачах ідентифікації локальної сили

На рис 4.18 зображено моделі пластин (лінійні розміри $2a \times 2b$, $a/b=1$, товщина h , $a/h=50$, $E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_0 = 0.3$), що було використано в задачах ідентифікації параметрів моделі навантаження.

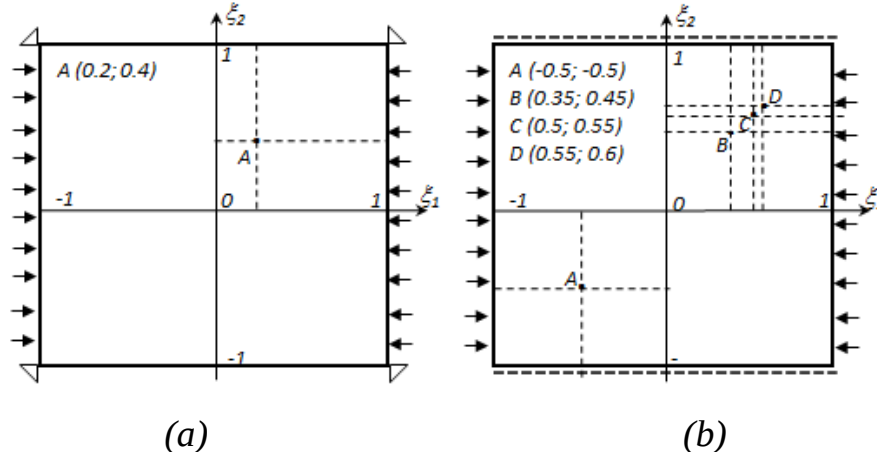


Рис. 4.18 – Моделі пластин в задачах ідентифікації локальних силових впливів:

- (a) – пластина під дією однієї локальної сили;
- (b) – пластина під дією групи сил, що прикладено на різних відстанях одна від одної

4.3.2. Розв'язуючі співвідношення та алгоритм

Для задачі ідентифікації локальних силових впливів з урахуванням введеної дискретизації функціонал (3.29) може бути записано у вигляді:

$$J(U, H^2) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N [C_1^{ij_{mq}} \varepsilon_{ij_m} \varepsilon_{mq_n} + \varepsilon^2 C_2^{ij_{mq}} \chi_{ij_m} \chi_{mq_n}] - \sum_{k=1}^N Z_k^* w_k H_k^2 - \\ - \sum_{n=1}^N (q_{1n} u_{1n} + q_{2n} u_{2n} + q_{3n} w_n) + \sum_{p=1}^P \sum_{m_p} \sum_{n_p} \lambda_p (\sigma_{ij_{m_p}}^p - \sigma_{ij_{m_p}}^{*p})^T (\sigma_{mq_{n_p}}^p - \sigma_{mq_{n_p}}^{*p}) + \sum_{k=1}^N \varphi_{0_k} (H_k^2 - 1).$$

Розв'язуюча лінеаризована система рівнянь на основі методу продовження по параметру для r -го кроку задачі ідентифікації локального силового впливу матиме вигляд:

$$\forall m, \quad m = \overline{1, N} \\ \sum_{n=1}^N a_{mn}^{(r)} \Delta U_n^{(r)} - \sum_{k=1}^N Z_k^{(r)} w_k H_k^2 + \sum_{p=1}^P \sum_{m_p} \sum_{n_p} \lambda_p (\sigma_{ij_{m_p}}^p - \sigma_{ij_{m_p}}^{*p})^T (\sigma_{ij_{n_p}}^p - \sigma_{ij_{n_p}}^{*p}) + \\ + \sum_{k=1}^K \varphi_{0_k} (H_k^2 - 1) = \Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t), \quad (4.4)$$

де $a_{mn}^{(r)}$ – коефіцієнти матриці жорсткості матеріалу пластини, що апроксимуються за допомогою методу скінченних елементів;

$\Delta U_n^{(r)}$ – вектор приростів переміщень на r -му кроці методу продовження;

$Z_k^{(r)}(H^2) = \{z_{1_k}^{(r)}(H^2), z_{2_k}^{(r)}(H^2), z_{3_k}^{(r)}(H^2)\}$, $k = \overline{1, K}$ – вектор k -го локального силового впливу на r -му кроці методу продовження;

$\Delta V^{(r)}(U^{(r-1)}, \Delta t)$ – вектор приростів навантаження на r -му кроці.

Відповідно до (3.14) розв'язок оберненої задачі ідентифікації зосередженого силового впливу $H^2(X) = \{H_n^2(X)\}$, $n = \overline{1, N}$ на r -му кроці методу продовження може бути представлено у вигляді:

$$H_n^{2(r)}(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Z_n^{(0)} w_n + \lambda_p^{(r)} \sigma_{ij_n} + \varphi_0^{(r)}(X) > 0 \\ 1, & \text{якщо } Z_n^{(0)} w_n + \lambda_p^{(r)} \sigma_{ij_n} + \varphi_0^{(r)}(X) < 0 \end{cases}. \quad (4.5)$$

Алгоритм розв'язання оберненої задачі *A1* було модифіковано для задачі ідентифікації зосереджених силових впливів у тонкій пластині у такий спосіб:

Алгоритм ідентифікації локального силового впливу

1. Задати змінні: r – номер кроку метода продовження; Δt – крок параметра; l – номер кроку внутрішнього ітераційного процесу; s – номер кроку ітераційного процесу метода Ньютона; Z_k^* , $k = \overline{1, K}$ – величини зосереджених сил; $H^2 = \{H_n^2\}$, $n = \overline{1, N}$ – вектор невідомих оберненої задачі, $\lambda_n = \{\lambda_n\}$, $n = \overline{1, N}$ – вектор дійсних чисел; ε – задана точність.
2. Задати початкові значення $r = 0$, $l = 0$, $s = 0$; $Z^{(0)}$; $H^{2(0,0)} = \{H_n^{2(0,0)}\}$, $H_n^{2(0,0)} = 0 \vee 1$; $\{\lambda_n^{(0,0)}\}$, $n = \overline{1, N}$; фіксовані значення Δt , ε .
3. Обчислити $U_n^{(r,l)}$, $Y_n^{(r,l)}(U)$ при заданих значеннях вектора $H^{2(r,l)}$, $\{\lambda_n^{(r,l)}\}$ із розв'язання системи (4.2).
4. Обчислити $\varphi_0^{(r,l)} = \{\varphi_{0_n}^{(r,l)}\}$ шляхом упорядкування компонент $Y_n^{(r,l)} = Z^{(0)} w_n + \lambda_p^{(r,l)} \sigma_{ij_n}$, $n = \overline{1, N}$.
5. Надати значення компонентам вектора невідомих оберненої задачі $H^{2(r,l)}$ на підставі правила:

$$H_n^{2(r,l)} = \begin{cases} 0, & \text{sign}(Y_n^{(r,l)} + \varphi_{0_n}^{(r,l)}) = 1 \\ 1, & \text{sign}(Y_n^{(r,l)} + \varphi_{0_n}^{(r,l)}) = -1 \end{cases}.$$
6. Якщо значення компонент вектора $H^{2(r,l)}$ співпадають зі значеннями компонент вектора $H^{2(r,l-1)}$, перейти до кроку 8; інакше – далі.
7. $r = r + 1$; $l = 0$; $t^{(r)} = t^{(r-1)} + \Delta t$; перейти до кроку 3.
8. Сформувати вектор $\tilde{H}^{2(s)} = \{\tilde{H}_n^{2(s)}\}$: змінити компоненти вектора $H^{2(s)} = \{H_n^{2(s)}\}$ зі значенням 1 на значення початкового наближення величини локальних сил $Z^{(0)}$; решті компонент вектора $\tilde{H}^{2(s)}$ надати значення 0.
9. Визначити компоненти вектора $\tilde{H}^{2(s)}$ в ітераційній процедурі метода Ньютона-Рафсона за формулою (3.19) із заданою точністю ε .
Перейти до кроку 10.
10. Кінець.

4.3.3. Опис процедури ідентифікації силових впливів

Відновлення моделі навантаження було здійснено у двоетапній процедурі ідентифікації: етап 1 – визначення розташування областей прикладання локальних сил, етап 2 – уточнення величини силових впливів.

Для виконання першого етапу процедури ідентифікації було сформовано початкове наближення вектору параметрів моделі навантаження $H^{2(0)}(X) = \{H_n^{2(0)}\}$ у такий спосіб: значення 1 було надано компонентам $H_n^{2(0)}$ у вузлах скінченно-елементної сітки, у яких спостерігалися найбільші відхилення значень узагальнених деформацій пластини за наявності зосереджених силових впливів від значень відповідних характеристик при відсутності вказаних впливів. Подальші значення компонент вектору $H^2(X)$ визначалися у відповідності до алгоритму АІ з обраним початковим наближенням величини локальних сил $Z^{(0)}$. Компоненти вектору $H_n^2(X)$, що наприкінці першого етапу процедури ідентифікації мали значення 1, визначали області прикладання локальних сил.

На початку другого етапу процедури ідентифікації з використанням вектору $H^2(X)$ було сформовано вектор $\tilde{H}^{2(0)}(X) = \{\tilde{H}_n^{2(0)}\}$ у такий спосіб: якщо компонента $H_n^2(X)$ дорівнювала 1, відповідна компонента $\tilde{H}_n^{2(0)}$ отримала значення $Z^{(0)}$, решта компонент отримала значення 0. Далі значення компонент було відновлено в ітераційній процедурі методу Ньютона-Рафсона (3.19) із заданою точністю.

Після виконання обох етапів процедури ідентифікації визначено області пластини, де прикладено силові впливи, та величини вказаних силових впливів.

4.3.4. Результати ідентифікації зосереджених силових впливів

4.3.4.1. Визначення розташування точки прикладання локальної сили

Розглядається пластина під дією комбінованого навантаження (рис.4.18 а): локальної сили Z^* , прикладеної нормально до поверхні пластини

та стискаючих зусиль $q|_{\xi_1=\pm 1} = 0.2$, що діють на кромки $\xi_1 = \pm 1$. Кромки $\xi_2 = \pm 1$ пластини вільні, у кутах $\xi_{1,2} = \pm 1$ пластину жорсткого затиснено.

Спостережувані значення деформацій σ^* було отримано шляхом розв'язання прямої задачі деформування пластини під комбінованим навантаженням за участю зосередженої сили $Z^* = 0.7$.

У якості початкового наближення величини зосередженої сили, точка прикладання якої відновлювалась, було використано силу $Z^{(0)} = 0.5$.

На рис. 4.19 *a* показано розподіл напружень у пластині під дією комбінованого навантаження.

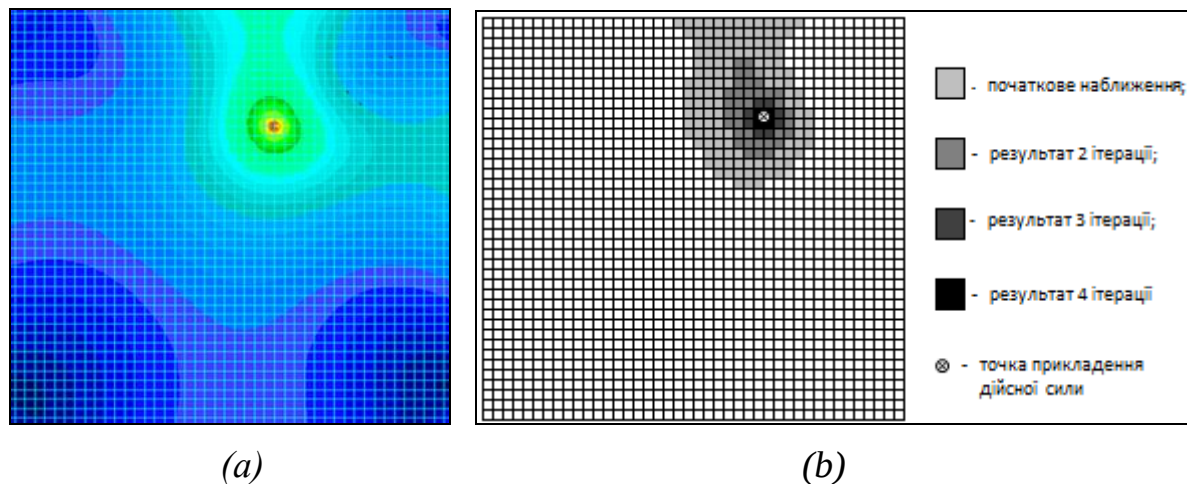


Рис. 4.19 – Процедура ідентифікації точки прикладання зосередженої сили:
 (a) – напружено-деформований стан системи;
 (b) – значення компонент вектора невідомих оберненої задачі на етапах процесу ідентифікації

На рис. 4.19 *b* область, яку обрано у якості початкового наближення вектору $H^2(X)$, позначено світло-сірим кольором; компонентам $\{H_n^{2(0)}(X)\}$, що відповідали вказаній області (197 компонент), було надано значення 1, решта компонент вектора $H^{2(0)}(X)$ отримала значення 0.

З використанням вектору $H^{2(0)}(X)$ було організовано ітераційний процес визначення області прикладання зосередженої сили. Можна відзначити, що локалізація вказаної області спостерігалася вже після першої ітерації. На рис. 4.19 *b* градаціями сірого кольору показано 2-4 кроки виконання

ітераційної процедури ідентифікації. В результаті виконання 4 ітерацій було визначено область прикладання зосередженої сили Z^* (на рис. 4.19 *b* позначено чорним кольором, білим кружком вказано точку прикладання дійсної сили).

На рис. 4.20 показано послідовність виключення на ітераціях алгоритма ідентифікації вузлів скінченно-елементної сітки як таких, в яких прикладено силу. Хрестиками позначено вузли, у яких відповідні компоненти вектора

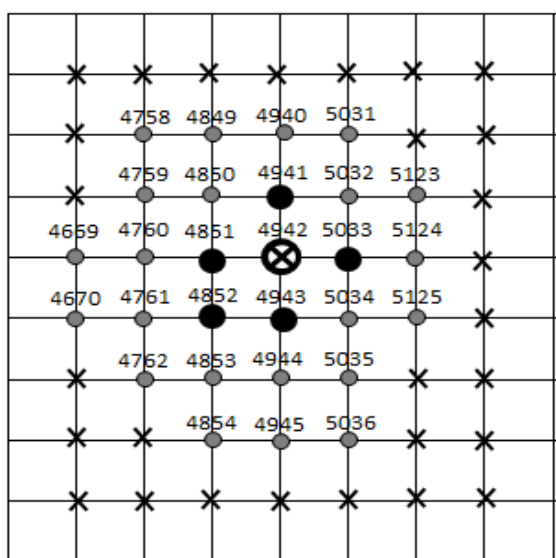


Рис. 4.20 – Реконструкція точки прикладання сили

параметрів моделі $H^2(X)$ отримали значення 0 після виконання 3 ітерацій обчислювального процесу, маленькими сірими кружками – після 4 ітерацій.

Вузли, в яких компоненти $\{H_n^2(X)\}$, $n = \overline{1, N}$ зберегли значення 1 до закінчення ітераційної процедури, позначено великими чорними кружками. Дійсну точку прикладання зосередженої сили (вузол 4942) позначено білим кружком з хрестиком.

На рис. 4.21 показано як змінювалися розподіли прогинів в перерізах пластини, що проходять через точку прикладання дійсної сили, на ітераціях першого етапу процесу ідентифікації.

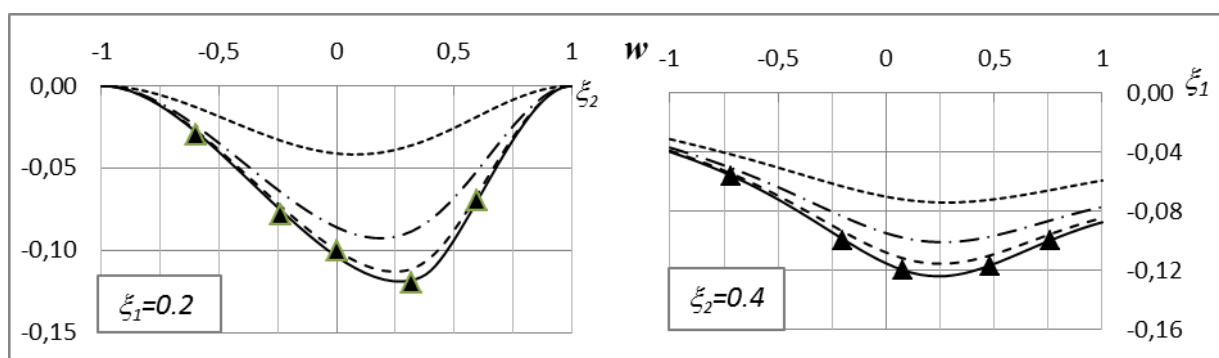


Рис. 4.21 – Розподіл прогинів у пластині на ітераціях визначення точки прикладання локальної сили (1 етап процедури ідентифікації)

Дрібний пунктир відповідає початковому наближенню $H^{2(0)}(X)$, штрихпунктирна та пунктирна лінії – другої та третьої ітераціям відповідно, суцільна лінія – результату ідентифікації (четверта ітерація). Як свідчать наведені залежності, значення прогинів на ітераціях поступово наближаються до значень прогинів, спричинених дією дійсного навантаження (позначено маркерами).

Таким чином, з використанням запропонованого алгоритму ідентифікації за 4 кроки ітераційного процесу визначена область пластини, в якій прикладено локальний силовий вплив.

4.3.4.2. Результати процедури уточнення величини сили

Для організації процесу уточнення величини зосередженого силового впливу в ітераційній процедурі метода Ньютона-Рафсона з використанням вектору $H^2(X) = \{H_n^2(X)\}$ зазначеним раніше способом було сформовано вектор початкового наближення $\tilde{H}^{2(0)}(X) = \{\tilde{H}_n^{2(0)}(X)\}$.

На рис. 4.22 наведено модель навантаження пластини зосередженими силами $Z^{(0)} = 0.5$, які прикладено у вузлах скінченно-елементної сітки (позначено номерами) у відповідності до результату першого етапу процедури ідентифікації. Дійсну силу прикладено в точці A.

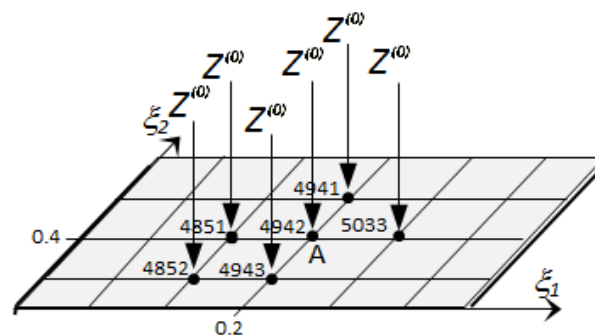


Рис. 4.22 – Значення компонент $\tilde{H}_n^{2(0)}(X)$ в процесі визначення величини локальної сили

У таблиці 4.8 наведено результати ітераційного процесу методу Ньютона-Рафсона. У останньому рядку таблиці наведено похибку визначення величини силового впливу в точці прикладання дійсної сили, яку

обчислено за формулою $\Delta Z_n^{(s)} = \frac{Z^* - \tilde{H}_n^{2(s)}}{Z^*}$, де s – номер кроку ітераційного процесу методу Ньютона-Рафсона, n – номер вузла, в якому прикладено локальну силу, Z^* – дійсне значення сили.

Таблиця 4.8

Результати відновлення величини локальної сили

Номер вузла, n	$\tilde{H}_n^{2(0)}$	Значення компонент вектора $\tilde{H}_n^2(X)$ на ітераціях			
		1	2	3	4
4851	0.500	0.2414	0.1180	0.0580	0.0230
4852	0.500	0.2822	0.1510	0.0610	0.0244
4941	0.500	0.2420	0.1282	0.0590	0.0270
4942	0.500	0.6053	0.6514	0.6754	0.6867
4943	0.500	0.2460	0.1226	0.0581	0.0233
5033	0.500	0.2711	0.1529	0.0803	0.0214
$\Delta Z_{4942}^{(r)} = \frac{Z^* - H_{4942}^{2(r)}}{Z^*}, \%$	28.57	13.53	6.94	3.51	1.90

Як свідчить аналіз таблиці, вже на перших ітераціях методу Ньютона-Рафсона спостерігається виділення головної компоненти у векторі параметрів $H^2(X) = \{H_n^2(X)\}$ – точки прикладання сили (вузол 4942). Значення решти компонент поступово зменшуються.

Процедуру ідентифікації зосередженого силового впливу $Z^* = 0.7$ у пластині було виконано також з іншими початковими наближеннями величини сили: $Z^{(0)} = 0.2$ та $Z^{(0)} = 0.9$. За результатами обчислень можна зробити висновок, що запропонований підхід дозволяє відновити локальний силовий вплив з заданою точністю як у випадку, коли початкове наближення величини сили менше за дійсне значення сили, так і тоді, коли початкове наближення його перевищує. У разі, коли між початковим наближенням та дійсним значенням сили була більша різниця, спостерігалось зростання кількості ітерацій на другому етапі процедури ідентифікації.

4.3.5. Дослідження залежності точності відновлення локальної сили від області її прикладання та величини

Далі у роботі досліджено можливості запропонованого підходу щодо ідентифікації локального навантаження пластини.

Для дослідження можливостей запропонованого підходу в залежності від розташування точки прикладання локальної сили відносно затисненої кромки було розглянуто пластину, що знаходилася під дією комбінованого навантаження: локальної сили Z^* та стискальних зусиль $q|_{\xi_2=\pm 1} = 0.3$, прикладених до кромки $\xi_2 = \pm 1$. Кромки $\xi_1 = \pm 1$ жорстко затиснено.

Задачу було розв'язано для випадків, коли силу Z^* прикладено нормально до поверхні пластини на лінії $\xi_1 = 0.4$ на відстанях $d/b = 1; 0.6; 0.2$ від затисненого краю пластини, тобто координати точок прикладання сили: $(0.4; 0.0)$, $(0.4; 0.4)$, $(0.4; 0.8)$.

Для дослідження можливостей запропонованого підходу щодо реконструкції локальних навантажень різного рівня значень було розв'язано задачу ідентифікації сил, що викликали лінійне ($Z^* = 0.2$) та нелінійне ($Z^* = 0.9$) деформування пластини з початковим наближенням $Z^{(0)} = 0.5$.

На рис.4.23 для різних випадків розташування точки прикладання дійсного локального силового впливу $Z^* = 0.9$ зображено картини напружено-деформованого стану пластини (у нормальних переміщеннях) під дією відновленого локального навантаження (результат першого етапу процедури ідентифікації).

На рис. 4.24 наведено залежності відносної похибки наближення значень деформацій σ_{ij} до спостережуваних значень σ^* в точці A (точці прикладання дійсної сили) на ітераціях відновлення величин сил $Z^* = 0.2$ (відповідні залежності зображено синім кольором) та $Z^* = 0.9$ (на рис. 4.30 зображено червоним кольором).

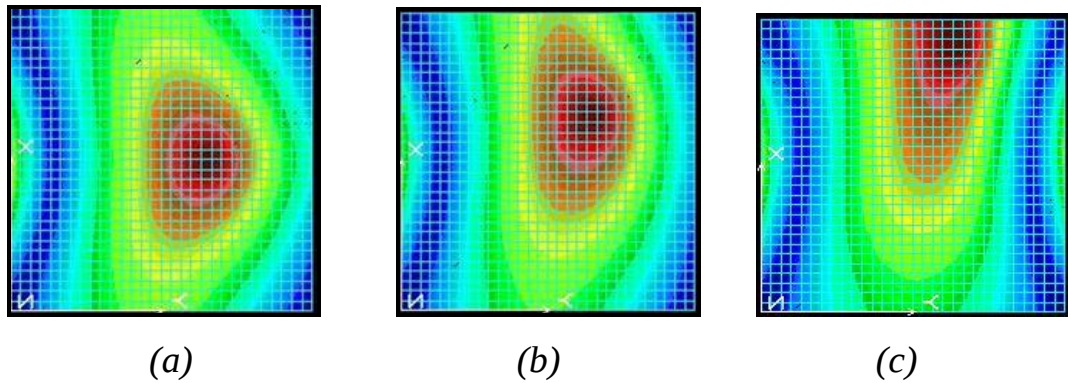


Рис. 4.23 – Напружено-деформований стан пластини під впливом відновленого локального навантаження ($Z^* = 0.9$):

- (a) – силу прикладено у точці: $\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0$;
- (b) – точка прикладання сили зміщена до затисненого краю пластини: $\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0.4$;
- (c) – точку прикладання сили розташовано біля затисненого краю пластини: $\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0.8$

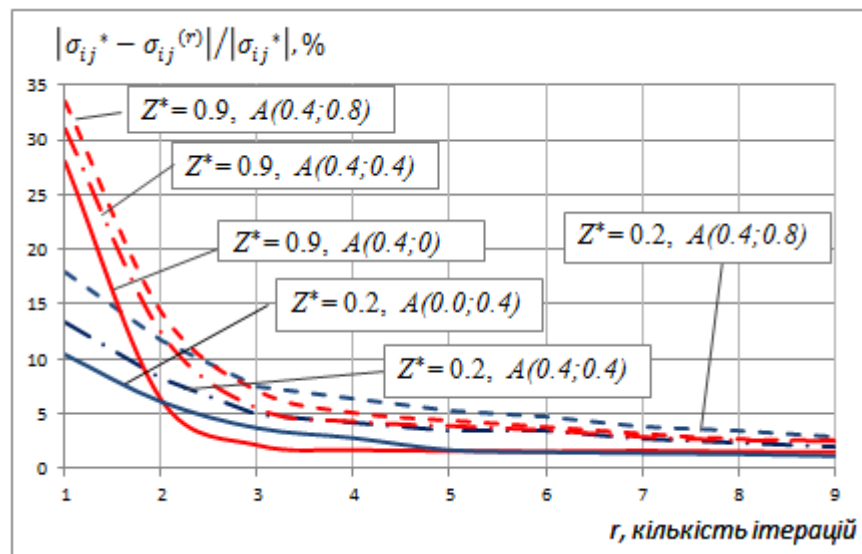


Рис. 4.24 – Відносна похибка наближення значень деформацій σ_{ij} до спостережуваних значень σ^* в точці прикладання дійсної сили на ітераціях відновлення величини сили

За результатами проведених обчислювальних експериментів встановлено, що для всіх точок прикладання зосередженої сили спостерігається збіжність обчислювального процесу відновлення їх величин за значеннями деформацій. У зв'язку з тим, що поблизу затисненої кромки пластини значення плоскої деформації та кручення порівняні з максимальними значеннями деформації основного напружено-

деформованого стану, наближення точки прикладання сили до цього краю ускладнює процес її ідентифікації.

Встановлено, що реконструкція сили, яка викликає деформації, істотно більші за крайові деформації, значно меншою мірою залежить від розташування точки прикладання сили.

У табл. 4.9 наведено результати 5 кроків процедури ідентифікації величини діючого навантаження для різних випадків розташування точки прикладання локальних сил $Z^* = 0.2$ та $Z^* = 0.9$. Як свідчать отримані результати, значення зосередженої сили більшої величини ідентифікується з більш високою точністю для всіх розглянутих випадків розташування точки її прикладання. Збільшення точності відновлення параметрів моделі навантаження також спостерігається для кожної із зосереджених сил при віддаленні точки її прикладання від краю пластини.

Таблиця 4.9

Залежність точності ідентифікації зосередженої сили
від розташування точки її прикладання

Точка прикладання сили	Дійсне значення, Z^*	Відновлене значення, $Z^{(5)}$	Похибка відновлення, %
$\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0$	0.200	0.2028	1.40
	0.900	0.8884	1.29
$\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0.4$	0.200	0.2039	1.95
	0.900	0.8839	1.79
$\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0.8$	0.200	0.2047	2.35
	0.900	0.8824	1.96

Далі було досліджено тривалість процесу ідентифікації зосередженого силового впливу в залежності від величини сили для різних випадків розташування точки прикладання сили на поверхні пластини.

Розглянуто пластину, яку деформовано локальною силою Z^* , що діє нормально до поверхні пластини, та стискальними зусиллями $q|_{\xi_2=\pm 1} = 0.5$, які прикладено до кромки $\xi_2 = \pm 1$. Кромки $\xi_1 = \pm 1$ пластини жорстко затиснено. Величина дійсної локальної сили Z^* у серії обчислювальних експериментів

по ідентифікації параметрів моделі навантаження отримувала значення $\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

На рис. 4.25 наведено зв'язок між кількістю ітерацій, яку необхідно виконати для отримання результату ідентифікації, та величиною навантаження, що відновлюється, для різних випадків розташування точки прикладання сили. Розрахунки наведено для таких точок прикладання сили: крива *a* відповідає випадку прикладання локальної сили у центральній області пластини ($\xi_1 = 0.2, \xi_2 = 0.2$); криві *b, c* описують випадки, коли точку прикладання сили зміщено до краю пластини, відповідно до навантаженого ($\xi_1 = 0.6, \xi_2 = 0.2$), та затисненого ($\xi_1 = 0.2, \xi_2 = 0.6$); крива *d* відповідає випадку, коли локальна сила діє безпосередньо біля навантаженого краю пластини ($\xi_1 = 0.8, \xi_2 = 0.2$).

Як витікає з аналізу рис. 4.25, найменшу кількість ітерацій потрібно виконати у випадку, коли зосереджену силу, що викликає лінійне деформування системи, прикладено в центральній області пластини, а найбільшу – коли локальна сила, що викликає нелінійне деформування, діє ближче до навантаженого краю пластини.

При незначних навантаженнях ітераційний процес збігається за 3-5 ітерацій, незалежно від області прикладання сили, за винятком випадку, коли сила діє у безпосередній близькості до навантаженого краю (6-7 ітерацій).

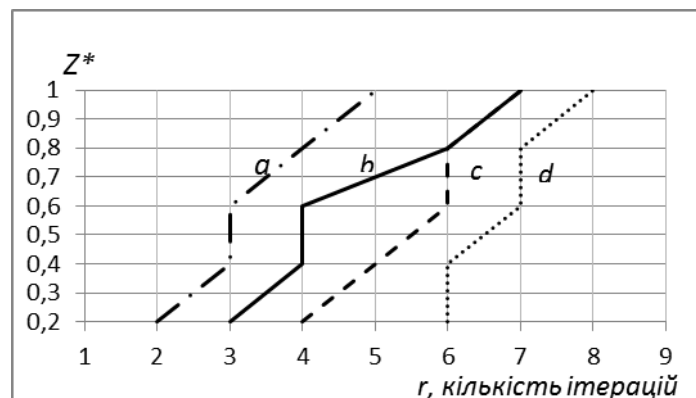


Рис. 4.25 – Взаємозв'язок між кількістю ітерацій процедури ідентифікації та величиною сили, яку прикладено на різних ділянках пластини

Зі зростанням діючого навантаження кількість ітерацій, яку потрібно виконати для ідентифікації параметрів моделі навантаження зростає, але ступінь залежності від місця розташування точки прикладання сили зберігається на тому самому рівні, як при відновленні незначних сил.

З наведених результатів експериментів випливає, що запропонований підхід до ідентифікації параметрів моделі навантаження дозволяє реконструювати локальні силові впливи у широкому діапазоні величини сили. Встановлено, що характер локального навантаження має деякий вплив на процес ідентифікації зосереджених сил, але у всіх розглянутих випадках було отримано задовільний результат його відновлення.

4.3.6. Ідентифікація групи локальних силових впливів

В роботі було досліджено можливість одночасної ідентифікації групи локальних сил, що діють на пластину на різних відстанях одна від одної.

Розглянуто пластину, що знаходиться під дією комбінованого навантаження (рис. 4.18 *b*): локальних сил Z_k^* , $k = \overline{1,4}$, прикладених нормально до поверхні пластини в точках A, B, C, D , та стискальних зусиль $q|_{\xi_1=\pm 1} = 0.5$, що діють по кромках $\xi_1 = \pm 1$. Кромки $\xi_2 = \pm 1$ жорстко затиснено.

Силу Z_1^* (A) прикладено на відстані від інших сил (відстань близько 1.2 лінійного розміру пластини), точки прикладання сил Z_2^*, Z_3^*, Z_4^* (B, C, D) знаходяться в безпосередній близькості одна від одної (мінімальна відстань між точками становить 0.07 розміру пластини). Координати точок прикладання локальних сил: $A(-0.5;0.5)$, $B(0.35;0.45)$, $C(0.5;0.55)$, $D(0.55;0.6)$.

Спостережувані значення σ^* було отримано шляхом розв'язання прямої задачі деформування пластини вказаною системою локальних сил та стискальних зусиль, величини локальних силових впливів були однаковими та дорівнювали $Z_k^* = 0.8$, $k = \overline{1,4}$.

На рис. 4.26 наведено картину напружено-деформованого стану пластини (*a*) під дією дійсного комбінованого навантаження та результати

третьої ітерації процедури ідентифікації місця розташування точок прикладання сил (b), що було отримано з використанням початкового наближення величин сил $Z^{(0)} = 0.5$.

Світло-сірим кольором на рис. 4.26 b позначено область початкового наближення, темно-сірим – результат 3 ітерації, чорним – результат 4 ітерації. Можна відзначити, що область прикладання сили Z_1^* , розташованої на відстані від групи сил, після 3 кроків першого етапу ітераційної процедури ідентифікації було локалізовано. За результатами обчислень область прикладання вказаної сили складалась з 4 вузлів. Хрестиком в білому кружку позначено точку прикладання дійсної локальної сили Z_1^* .

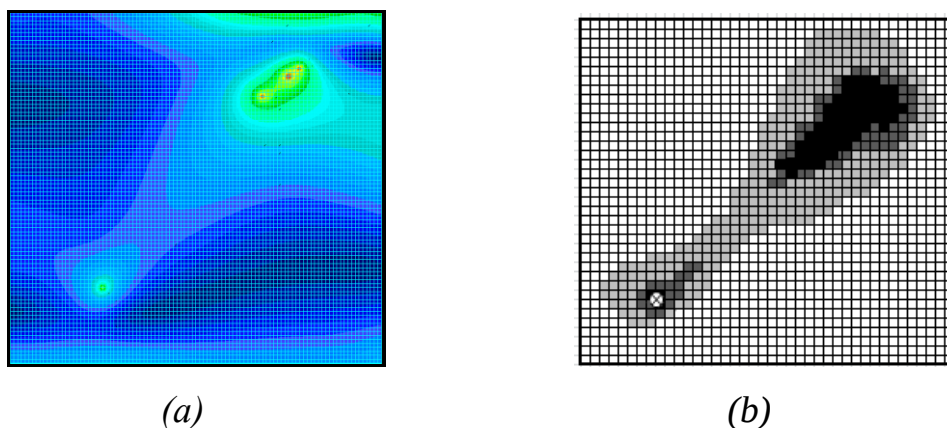


Рис. 4.26 – Реконструкція точок прикладання групи сил однакової величини:
 (a) – напружено-деформований стан пластини;
 (b) – результат 3 ітерації першого етапу ідентифікації

Для визначення областей розташування решти сил (Z_2^* , Z_3^* , Z_4^*) було виконано 6 ітерацій процедури ідентифікації. Продовження ітераційного процесу не призвело до зменшення області дії вказаної групи сил, тому що компоненти вектора невідомих $H_2(X)$ не змінювали своїх значень.

Ітераційний процес реконструкції точок прикладання сил Z_2^* , Z_3^* , Z_4^* зображено на рис. 4.27. Чорною лінією окреслено область локального навантаження, яку було визначено після виконання 3 кроків ітераційного процесу. Результат четвертої та п'ятої ітерацій показано світло-сірим і сірим

кольорами відповідно. Области, збережені алгоритмом після виконання шостої ітерації (відповідні компоненти вектора невідомих $H_2(X)$ зберегли значення 1, зображено чорним кольором. Дійсні точки прикладання локальних сил Z_2^* , Z_3^* , Z_4^* на рис. 4.27 позначено хрестиками в білих кружках.

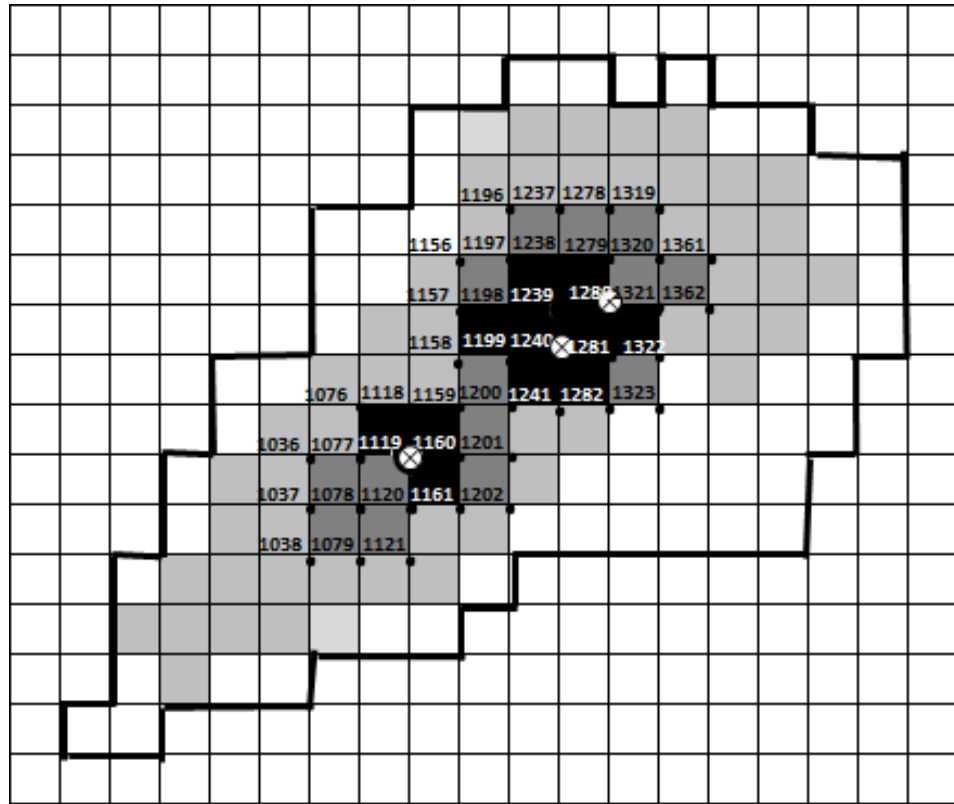


Рис. 4.27 – Процес ідентифікації областей прикладання групи силових впливів $Z_2^* - Z_4^*$.

Як свідчить аналіз рисунку, область дії сили Z_2^* було локалізовано після виконання 6 ітерацій першого етапу процедури ідентифікації, розділити області прикладання сил Z_3^* та Z_4^* у обчислювальному процесі не вдалося.

Таким чином, з використанням алгоритму ідентифікації місця розташування локальних силових впливів, діючих на різних відстанях один від одного, було отримано три області: область дії сили Z_1^* – 4 вузла, сили Z_2^* – 7 вузлів, спільна область дії сил Z_3^* та Z_4^* – 17 вузлів.

Результати процедури відновлення величин групи силових впливів (другий етап ідентифікації) наведено у табл. 4.10.

Таблиця 4.10

Уточнення величин групи локальних силових впливів
(другий етап ідентифікації)

Область дії сили	№ вузла, n	Z^*	Значення компонент $\{\tilde{H}_n^{2(r)}\}$ на ітераціях					
			0	1	2	3	4	5
Z_1^*	440	0	0.500	0.2623	0.1653	0.0980	0.0518	0.0401
	441	0.8	0.500	0.6438	0.7481	0.7786	0.7812	0.7835
	481	0	0.500	0.2436	0.1323	0.1011	0.0993	0.0912
	482	0	0.500	0.2501	0.1283	0.0899	0.0709	0.0649
Z_2^*	1076	0	0.500	0.2610	0.1421	0.1018	0.0744	0.0603
	1077	0	0.500	0.2727	0.1546	0.1213	0.0994	0.0835
	1118	0	0.500	0.2731	0.1708	0.1151	0.0988	0.0897
	1119	0.8	0.500	0.6344	0.7121	0.7516	0.7730	0.7814
	1159	0	0.500	0.2747	0.1693	0.1391	0.1054	0.0912
	1160	0	0.500	0.2531	0.1631	0.1242	0.091	0.0780
	1161	0	0.500	0.2487	0.1404	0.0847	0.0607	0.0575
Z_3^*, Z_4^*	1157	0	0.500	0.2677	0.1920	0.1532	0.1240	0.1005
	1158	0	0.500	0.2645	0.1809	0.1351	0.1103	0.0949
	1197	0	0.500	0.2776	0.1909	0.1474	0.1202	0.1156
	1198	0	0.500	0.2831	0.2091	0.1504	0.1258	0.1155
	1199	0	0.500	0.2733	0.1849	0.1468	0.1177	0.1095
	1200	0	0.500	0.2758	0.1919	0.1730	0.1386	0.1126
	1237	0	0.500	0.2638	0.1787	0.1415	0.1086	0.0987
	1238	0	0.500	0.2616	0.1895	0.1581	0.1194	0.1021
	1239	0	0.500	0.2756	0.1937	0.1510	0.1123	0.1094
	1240	0.8	0.500	0.6028	0.7031	0.7443	0.7689	0.7806
	1241	0	0.500	0.2591	0.1844	0.1405	0.1254	0.1054
	1279	0	0.500	0.2602	0.1834	0.1261	0.0986	0.0929
	1280	0.8	0.500	0.6022	0.7001	0.7486	0.7693	0.7810
	1281	0	0.500	0.2755	0.1901	0.1567	0.1341	0.1188
	1282	0	0.500	0.2614	0.1838	0.1526	0.1243	0.1159
	1321	0	0.500	0.2683	0.1793	0.1444	0.1162	0.1036
	1322	0	0.500	0.2764	0.1768	0.1406	0.1122	0.1019

З аналізу результатів, наведених в табл. 4.10, можна зазначити, що для вузлів, розташованих в безпосередній близькості від точок прикладання сил Z_3^* та Z_4^* , отримано значення величин сил, що становлять близько 10 % від дійсної навантаження, хоча в дійсності в цих вузлах локальні сили не прикладалися.

Похибки відновлення значень силових впливів в точках прикладання дійсних сил в ітераційному процесі методу Ньютона-Рафсона обчислено за

формулою $\Delta Z_n^{(s)} = \left| \frac{Z_k^* - \tilde{H}_n^{2(s)}}{Z_k^*} \right|$, $k = \overline{1,4}$ та наведено у табл. 4.11.

Таблиця 4.11

Похибки відновлення величин силових впливів
в точках прикладання дійсних сил на ітераціях другого етапу ідентифікації

Дійсна сила	Вузол прикладання сили, n	Похибки відновлення $\Delta Z_n^{(s)}$ на ітераціях, %					
		номера ітерацій, s					
		0	1	2	3	4	5
Z_1^*	441	37.50	19.53	6.49	2.68	2.35	2.07
Z_2^*	1119	37.50	20.70	10.99	6.05	3.38	2.33
Z_3^*	1240	37.50	24.65	12.11	6.96	3.89	2.43
Z_4^*	1280	37.50	24.73	12.49	6.43	3.84	2.38

Можна зазначити, що на другому етапі процедури ідентифікації вдалося визначити величини всіх зосереджених впливів, похибка відновлення не перевищує 1.5%. Для сил, що діють на відстані одна від одної, вже після 3 ітерації відзначається стабілізація знайдених значень. Для сил, точки прикладання яких розташовано близько одна від одної, задовільну точність було отримано після виконання 5 ітерацій.

Таким чином, із застосуванням двоетапної процедури ідентифікації зосереджених силових впливів можлива реконструкція розташування точок прикладання сил та визначення величин сил із задовільною точністю навіть у випадках, коли точки прикладання сил знаходяться в безпосередній близькості одна від одної.

4.3.7. Аналіз чутливості алгоритму ідентифікації локальних силових впливів до похибок вхідних даних

В роботі проведено аналіз чутливості запропонованого алгоритму реконструкції моделі навантаження до похибок експериментального визначення узагальнених деформацій σ^* .

Помилка вхідних даних моделювалася випадковими збуреннями величин вимірюваних величин таким чином: $\tilde{\sigma} = \sigma^* \left(1 + \left| \frac{\sigma^*}{\sigma_{\max}^*} \right| \theta R \right)$, де $\tilde{\sigma}$ – збурені значення спостережень σ^* ; $\sigma_{\max}^*$ – максимальне значення σ^* ; p – номер точки виміру; R – рівномірно розподілена на відрізку $[-1; 1]$ випадкова величина; $\theta = 10^d$ – параметр, що визначає величину похибки вхідних даних; d – показник рівню шуму.

В даному обчислювальному експерименті розглянуто пластину, що знаходиться під дією комбінованого навантаження: стискальних зусиль $q|_{\xi_1=\pm 1} = 0.3$, що діють на кромки $\xi_1 = \pm 1$, та локальної сили $Z^* = 0.7$, яку прикладено нормально до поверхні пластини у точці $A(0.2; 0.4)$. Кромки $\xi_2 = \pm 1$ пластини жорстко затиснено.

З використанням вимірювань $\tilde{\sigma}$ виконано ідентифікацію розташування та величини локальної сили при зміні значення показника d від -5 до -1.

На рис. 4.28 наведено розподіл прогинів в пластині під дією зазначеної зосередженої сили в перерізах, у яких значення прогину w досягає максимальних значень. Криві отримано для різних рівнів шуму: $d = -5$ відповідає тонка пунктирна крива; $d = -3$ – тонка точкова лінія; $d = -1$ позначено великими точками. Тонкою суцільною кривою позначено результат ідентифікації з використанням точних даних.

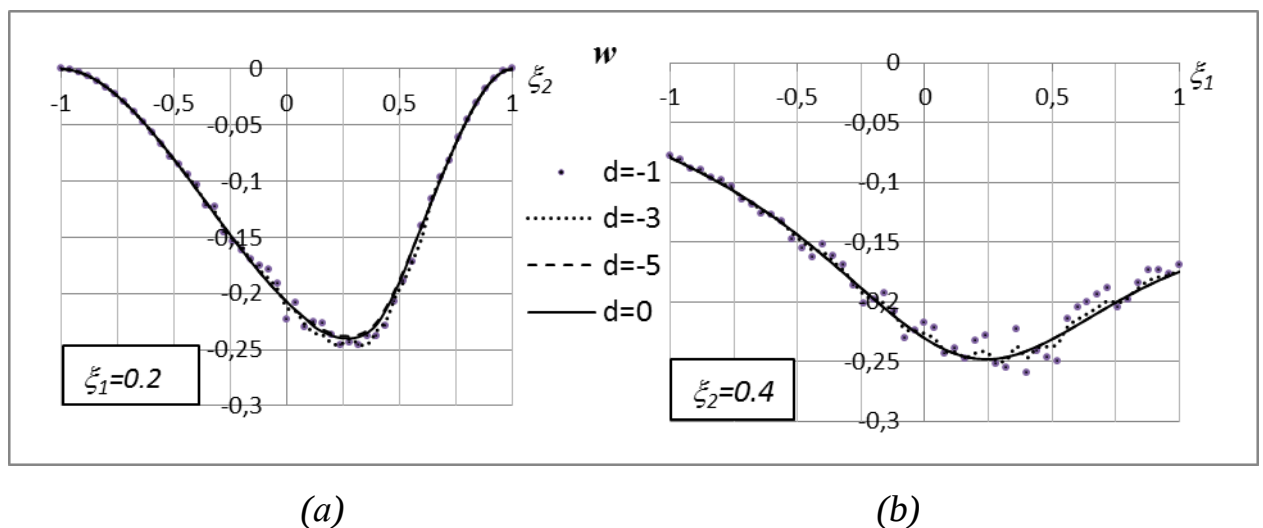


Рис. 4.28 – Поведінка функції прогину W на ітераціях процедури ідентифікації функції навантаження з різним рівнем шуму

Можна зазначити, що зі збільшенням рівня шуму спостерігається збільшення похибки відновлення параметрів моделі навантаження. Так, при $d = -1$ спостерігається зсув максимуму прогину W , що обумовлено похибкою у визначенні місця розташування точки прикладання сили. При $d = -1$ (найбільший рівень шуму) похибка визначення координати точки прикладання сили склала 8%, виконання другого етапу ідентифікації дозволило зменшити похибку відновлення локальної сили до 6%.

На рис. 4.29 наведено залежності відносних похибок відновлення прогинів на ітераціях процедури ідентифікації локального навантаження при зміні показника d від -5 до -1. Суцільною кривою показано похибку визначення місця розташування локального впливу (результат першого етапу процедури ідентифікації), пунктирною – похибку ідентифікації величини зосередженої сили (результат двоетапної процедури ідентифікації).

Як свідчать наведені залежності у разі більшого збурення вимірюваних даних алгоритм двоетапний ідентифікації дає можливість значно покращити результат відновлення локального навантаження.

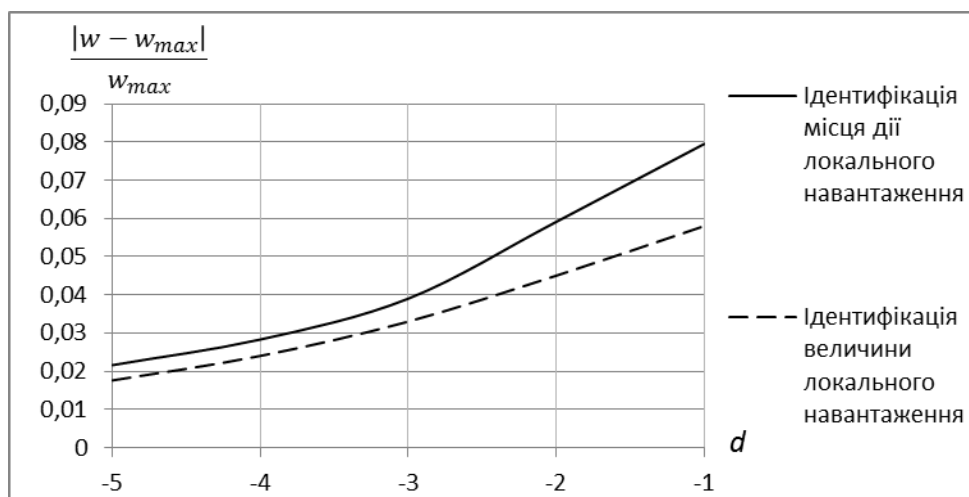


Рис. 4.29 – Залежність відносної похибки відновлення локального навантаження від показника d

Як свідчать залежності, наведені на рис. 4.29, у разі більшого збурення вимірюваних даних алгоритм двоетапний ідентифікації дає можливість значно покращити результат відновлення локального навантаження.

Таким чином, проведений аналіз підтверджує стійкість запропонованого підходу ідентифікації моделі навантаження до випадкових помилок результатів вимірювань та задовільну точність отриманих результатів ідентифікації.

4.3.8. Порівняльний аналіз результатів роботи алгоритму з відомими аналітичними розв'язками

Виконано порівняння результатів відновлення локального силового впливу, отриманих з використанням запропонованого підходу, з результатами, відомими з літератури [71]. Розглянуто пластину, що знаходиться під дією навантаження, заданого на симетрично розташованій на поверхні пластини прямокутній площадці розмірами l_1/a , $l_2/b=1$. Кромки $\xi_1 = \pm 1$ пластини довільно оперті, кромки $\xi_2 = \pm 1$ – вільні. Навантаження моделювалось прикладанням у відповідних площадці вузлах сітки сил Z^* .

В табл. 4.12 наведено результати відносних прогинів w/h , що було отримано під дією відновленої сили Z^* в центрі пластини при різних розмірах площадки навантаження. Для порівняння в таблиці наведено аналітичний розв'язок w_0/h , отриманий за формулою з роботи Ю. П. Жигалко [71]. Як свідчить аналіз таблиці, значення прогинів, викликаних дією відновленого навантаження Z^* , відрізняються від аналітичного розв'язку не більш ніж на 5 %.

Таблиця 4.12

Порівняння результатів прогинів w/h з аналітичним розв'язком w_0/h

	$Z^*=0.2$					$Z^*=0.7$				
	l_1/a	l_2/b	l_3/c	l_4/d	l_5/e	l_1/a	l_2/b	l_3/c	l_4/d	l_5/e
w_0/h	0.055	0.054	0.052	0.050	0.049	0.193	0.187	0.182	0.176	0.171

w/h	0.053	0.051	0.049	0.048	0.048	0.186	0.181	0.176	0.171	0.163
Відхил, %	4.35	4.86	4.78	4.17	2.66	3.52	3.26	3.19	3.18	4.75

Таким чином, проведений аналіз застосування запропонованого алгоритму щодо ідентифікації локального навантаження підтвердив його стійкість відносно параметрів моделі навантаження та узгодженість з відомими з літератури результатами розв'язання аналогічних задач ідентифікації.

Висновки до розділу 4

1. Виконано ідентифікацію локальних силових впливів та дефектів матеріалу у вигляді жорстких включень за результатами моніторингу напружено-деформованого стану тонкої пластини, отриманими за допомогою розробленого підходу, алгоритмів та пакетів прикладних програм, які реалізують метод скінченних елементів. При розв'язанні алгоритму ідентифікації використано результати попереднього аналізу напружено-деформованого стану пластини за відсутністю силових впливів та включень.
2. Встановлено, що для розв'язання оберненої задачі ідентифікації слід обирати нелінійну постановку крайової задачі та враховувати нелінійність при розв'язанні прямої задачі деформування пластини за наявності включень та силових впливів з використанням методу скінченних елементів. Для отримання результатів ідентифікації з заданою точністю проведено аналіз збіжності результатів розв'язання прямої задачі деформування пластини при використанні різних скінченно-елементних сіток та обрано сітку потрібної щільності.
3. На підставі даних спостережень, отриманих в одному статичному вимірюванні, з використанням двоетапної процедури ідентифікації визначено місце розташування у тонкій пластині дефектів у вигляді жорстких включень та відновлено їх фізико-механічні властивості.

4. Реконструйовано розташування точок прикладання зосереджених силових впливів та визначено величини впливів.
5. Отримано та проаналізовано числові розв'язки задачі ідентифікації жорстких включень для різних випадків їх взаємного розташування у пластині, розмірів включень та їх пружних властивостей.
6. Досліджено особливості напружено-деформованого стану системи за різних значень параметрів моделі локального навантаження у тонкій пластині. Проаналізовано залежність тривалості процедури ідентифікації та точності отриманих розв'язків від величини силового впливу та від розташування точки його прикладання відносно кромки пластини.
7. Проаналізовано результати визначення силових впливів у пластині за наявності похибки спостережуваних значень характеристик напружено-деформованого стану та підтверджено стійкість запропонованого підходу щодо збурення вхідних даних.
8. Проведений аналіз результатів ідентифікації дозволив зробити висновок про стійкість та доцільність використання запропонованого алгоритму щодо визначення дефектів матеріалу у вигляді включень та дії зосереджених сил у тонкій пластині.
9. Вищезазначені результати цього розділу стосовно дефектів матеріалу пластини у вигляді жорстких включень викладено у публікаціях [53, 57, 59, 60, 114], результати виявлення зосереджених силових впливів та їх величин – у публікаціях [54, 58, 61, 63].

РОЗДІЛ 5

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДЕФЕКТІВ У ВИГЛЯДІ ЛІНІЙНИХ РОЗРІЗІВ

У ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ

5.1. Особливості моделювання розрізу у тонкій пластині

При розв'язанні задачі ідентифікації дефектів матеріалу пластини у вигляді лінійних розрізів як оберненої задачі у варіаційній постановці виникає необхідність ітеративного розв'язання послідовності прямих задач з розрізами різної орієнтації та довжини. Використання методу скінченних елементів для визначення напружено-деформованого стану пластини з розрізом на кожній ітерації потребує побудови нової розрахункової моделі пластини з новим місцем розташування вершин розрізу, виконання генерації сітки скінченних елементів, створення нової нумерації вузлів, що призводить до суттєвих часових витратах.

Альтернативою є створення методу ідентифікації розрізу у тонкій пластині, що базується на використанні однократно побудованої моделі суцільної конструкції. Даний підхід, який запропоновано в [99] та розвинуто в даному дослідженні, ґрунтується на використанні варіаційного принципу, коли умови на берегах розрізу перетворюються в умови на лінії, що імітує розріз у суцільній конструкції.

При використанні цього підходу, в силу лінійності напружено-деформованого стану, аналітичний розв'язок є сумою двох станів, що визначаються окремо – напружено-деформованого стану суцільної конструкції та напружено-деформованого стану, який отримано в результаті визначення з умов на берегах розрізу додаткових деформацій, викликаних стрибками переміщень та кутів повороту.

5.2. Моделювання розрізу у пластині лінією у суцільній конструкції

У роботі запропоновано підхід щодо моделювання лінійного розрізу у тонкій пластині (береги розрізу не контактують між собою) лінією у суцільній пластині. Уздовж лінії, що імітує розріз, зосереджені внутрішні

джерела напружень, що зумовлюють стрибки переміщень та кутів повороту (узагальнених переміщень) при переході через лінію. Умови на лінії (значення узагальнених переміщень) можуть бути визначеними із розв'язання оберненої задачі.

5.2.1. Розв'язуючі співвідношення та алгоритм

Для урахування граничних умов (2.23) та з огляду на неперервність функцій T_{ij} , M_{ij} , Q_{ij} всередині області Ω та на берегах розрізу, до функціоналу (2.24) приєднано функціонал $J_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ у вигляді:

$$J_{\Gamma_p^\pm(H^3)} = \int_{\substack{b_1 \\ \Gamma_p^\mp(H^3) \\ \xi_1 = \text{const}}}^{b_2} \left(T_{12}(u_1^+ - u_1^-) + T_{22}(u_2^+ - u_2^-) + M_{22} \left(\frac{\partial w^+}{\partial \xi_2} - \frac{\partial w^-}{\partial \xi_2} \right) + \bar{Q}_{22}(w^+ - w^-) \right) d\xi_2 + \\ + \int_{\substack{a_1 \\ \Gamma_p^\pm(H^3) \\ \xi_2 = \text{const}}}^{a_2} \left(T_{11}(u_1^+ - u_1^-) + T_{12}(u_2^+ - u_2^-) + M_{11} \left(\frac{\partial w^+}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w^-}{\partial \xi_1} \right) + \bar{Q}_{11}(w^+ - w^-) \right) d\xi_1, \quad (5.1)$$

де $u_1^\pm$, $u_2^\pm$, $w^\pm$, $\frac{\partial w^\pm}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial w^\pm}{\partial \xi_2}$ – значення узагальнених переміщень на берегах розрізу $\Gamma_p^\pm(H^3)$; $l_1 = a_2 - a_1$ – довжина поздовжнього розрізу ($\xi_2 = \text{const}$);

$l_2 = b_2 - b_1$ – довжина поперечного розрізу ($\xi_1 = \text{const}$); $\Gamma_p^+(H^3)_{\xi_2 = \text{const}}$, $\Gamma_p^-(H^3)_{\xi_2 = \text{const}}$ –

границі поздовжнього розрізу при $\xi_2 = \text{const}$, $a_1 \leq \xi_1 \leq a_2$; $\Gamma_p^+(H^3)_{\xi_1 = \text{const}}$, $\Gamma_p^-(H^3)_{\xi_1 = \text{const}}$ –

границі поперечного розрізу при $\xi_1 = \text{const}$, $b_1 \leq \xi_2 \leq b_2$;

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{\partial M_{ii}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(T_{ii} \frac{\partial w}{\partial \xi_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(T_{ij} \frac{\partial w}{\partial \xi_j} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

Тоді функціонал (2.25) щодо задачі деформування пластини з лінійним розрізом через функції зусиль T_{ij} , моментів M_{ij} та поперечних сил Q_{ij} може бути записано у вигляді:

$$J(U, T, M, Q) = \iint_{\Omega} -\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left\{ [T_{11}^2 - 2\nu T_{11}T_{22} + T_{22}^2 - 2(1+\nu)T_{12}^2] + \varepsilon^2 [M_{11}^2 - \nu M_{11}M_{22} + M_{22}^2 - (1+\nu)M_{12}^2] \right\} + \\ + T_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2 \right) + T_{22} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) - T_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^2 \left(M_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + M_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} + 2M_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) \Bigg\} d\xi_1 d\xi_2 - \iint_{\Omega} (q_1 u_1 + q_2 u_2 + qw) d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \int_{\Gamma_{\xi_1=\pm 1}} \left[T_{11}^* u_1 + T_{12}^* u_2 + \bar{Q}_{11}^* w + M_{11}^* \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right] d\xi_2 + \int_{\Gamma_{\xi_1=\pm 1}} \left[T_{11} (u_1^* - u_1) + T_{12} (u_2^* - u_2) + \bar{Q}_{11} (w^* - w) + M_{11} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \right] d\xi_2 + \\
& + \int_{\Gamma_{\xi_2=\pm 1}} \left[T_{12}^* u_1 + T_{22}^* u_2 + \bar{Q}_{22}^* w + M_{22}^* \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right] d\xi_1 + \int_{\Gamma_{\xi_2=\pm 1}} \left[T_{12} (u_1^* - u_1) + T_{22} (u_2^* - u_2) + \bar{Q}_{22} (w^* - w) + M_{22} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi_2} - \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \right] d\xi_1 + \\
& + \int_{\substack{b_2 \\ b_1 \\ \Gamma_p^+(H^3) \\ \xi_1 = \text{const}}} \left(T_{12} (u_1^+ - u_1^-) + T_{22} (u_2^+ - u_2^-) + M_{22} \left(\frac{\partial w^+}{\partial \xi_2} - \frac{\partial w^-}{\partial \xi_2} \right) + \bar{Q}_{22} (w^+ - w^-) \right) d\xi_2 + \\
& + \int_{\substack{a_2 \\ a_1 \\ \Gamma_p^-(H^3) \\ \xi_2 = \text{const}}} \left(T_{11} (u_1^+ - u_1^-) + T_{12} (u_2^+ - u_2^-) + M_{11} \left(\frac{\partial w^+}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w^-}{\partial \xi_1} \right) + \bar{Q}_{11} (w^+ - w^-) \right) d\xi_1, \tag{5.2}
\end{aligned}$$

де $\Gamma = \Gamma_{\xi_2=\pm 1} \cup \Gamma_{\xi_1=\pm 1}$; $\Gamma_{\xi_2=\pm 1}$, $\Gamma_{\xi_1=\pm 1}$ – ділянки зовнішнього контуру пластини при $\xi_2 = \pm 1$, $\xi_1 = \pm 1$ відповідно.

З умови $\delta J(U, T, M, Q) = 0$ витікають нелінійні рівняння рівноваги пластини в функціях зусиль та моментів (2.14), (2.15), граничні умови (2.22) на зовнішньому контурі пластини Γ та (2.23) на границях розрізу $\Gamma_p^\pm$, а також геометричні співвідношення у вигляді:

$$\begin{aligned}
T_{11} - \nu T_{22} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)^2; & M_{11} - \nu M_{22} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2}; \\
T_{22} - \nu T_{11} &= \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right)^2; & M_{22} - \nu M_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}; \\
T_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right); & M_{12} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}.
\end{aligned}$$

Невідомі функції U , $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$, T_{ij} , M_{ij} , Q_{ij} варіюються незалежно всередині області Ω та на берегах розрізу $\Gamma_p^\pm(H^3)$, де $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)} = \left\{ \tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(t)} \right\}$, $t = \overline{1,5}$ – вектор невідомих оберненої задачі, компонентами якого є стрибки переміщень U та кутів повороту $\frac{\partial w}{\partial \xi_i}$, $i = 1, 2$: $\tilde{U}_{\Gamma_p^+(H^3)}^{(1)} = [u_1^+ - u_1^-]$; $\tilde{U}_{\Gamma_p^-(H^3)}^{(2)} = [u_2^+ - u_2^-]$;

$$\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(3)} = [w^+ - w^-]; \quad \tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(4)} = \left[\frac{\partial w^+}{\partial \xi_1} - \frac{\partial w^-}{\partial \xi_1} \right]; \quad \tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(5)} = \left[\frac{\partial w^+}{\partial \xi_2} - \frac{\partial w^-}{\partial \xi_2} \right].$$

В силу незалежності вектор-функції $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ умову стаціонарності функціоналу (5.2) може бути реалізовано як

$$\delta_B J(U, T, M, Q) = 0, \quad \text{де } B = \{U, T_{ij}, M_{ij}, Q_{ij}\}, \quad (5.3)$$

за умови

$$\delta_{\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}} J_{\Gamma_p^\pm(H^3)} = 0. \quad (5.4)$$

Таким чином, задача про деформування пластини з розрізом є еквівалентною до задачі про деформування суцільної пластини зі стрибками переміщень та кутів повороту на лінії, що імітує розріз.

Варіаційна постановка задачі визначення стрибків переміщень $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ на лінії розрізу на підставі умови (5.3) формулюється у такий спосіб:

$$\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)} = \arg \min_{\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm}} \Delta^T(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm}) \Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm}) \quad (5.5)$$

при попередньому виконанні умови $\delta_\Delta J = 0$,

де $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm})$ – вектор нев'язки, у разі поперечного розрізу ($\xi_1 = \text{const}$)

$\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm}) = \{T_{22}, T_{12}, M_{22}, Q_{22}\}^T$, у разі поздовжнього розрізу ($\xi_2 = \text{const}$) –

$\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm}) = \{T_{11}, T_{12}, M_{11}, Q_{11}\}^T$.

5.2.2. Метод розв'язання прямої задачі

Для розв'язання задачі деформування пластини з розрізом на розв'язках, які відповідають умові (5.3), здійснюється перехід до дискретної моделі пластини з використанням методу скінченних елементів. Тоді невідомі функції задачі U , $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm}$, T_{ij} , M_{ij} , Q_{ij} подаються у вигляді векторів $\{U_n\}$, $\{\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm n}\}$, $\{T_{ij n}\}$, $\{M_{ij n}\}$, $\{Q_{ij n}\}$, $n = \overline{1, N}$, а їх значення на скінченному елементі задаються для локальної системи координат за допомогою апроксимацій через вузлові значення.

Після підстановки в функціонал (5.2) апроксимацій невідомих функцій, виконання процедур інтегрування та підсумовування для визначення напружено-деформованого стану пластини з розрізом отримуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь, які лінеарізуються методом продовження по параметру:

$$\sum_{n=1}^N a_{mn}(U^{(r-1)}) \Delta u_{in} = \Delta \tilde{G}_m^{(r-1)}(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^n, \Delta q_m, U^{(r-1)}), \quad (5.6)$$

де r – номер кроку методу продовження; $a_{mn}(U^{(r-1)})$ – лінеаризована матриця жорсткості; $\Delta \tilde{G}_m^{(r-1)}$ – проекція правої частини, що залежить від $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$; Δq_m – приріст навантаження на кроці методу продовження.

Розв'язання системи рівнянь (5.6) дозволяє визначити вузлові переміщення U_n всередині області Ω та на границі Γ при фіксованому векторі $H^3(X) = \{\xi_{1K_1}, \xi_{2K_1}, \xi_{1K_2}, \xi_{2K_2}\}$, що визначає місце розташування вершин.

Значення компонент стрибків переміщень $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ визначаються в ітераційному процесі метода Ньютона-Рафсона:

$$\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)} = \tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s-1)} - \left[W(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s-1)}) \right]^{-1} \cdot G(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s-1)}), \quad (5.7)$$

де $[W(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s-1)})] = [A^T]A$, $G = [A^T]\Lambda^{(s-1)}$; $A = \left[\partial \Delta_k / \partial \tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)_l} \right]_{\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm} = \tilde{U}_{\Gamma_p^\pm}^{(s-1)}}$ – матриця похідних нев'язки $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm})$ по компонентам вектора невідомих оберненої задачі; s – номер кроку ітераційного процесу.

В роботі побудовано алгоритм АЗ для визначення стрибків переміщень $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ на лінії розрізу.

Алгоритм АЗ визначення стрибків переміщень $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ на лінії розрізу

1. Задати початкові значення: $s = 0$, $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(0)}$, ε – точність.
2. Розв'язати пряму задачу при відомому векторі $U_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)}$, отримати вектори

$$T^{(s)} = \{T_{ij_n}\}^{(s)}; \quad Q^{(s)} = \{Q_{ij_n}\}^{(s)}; \quad M^{(s)} = \{M_{ij_n}\}^{(s)}, \quad n = \overline{1, N}.$$

3. Сформувати вектор $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)})$. Перевірити виконання умови $\Delta_k(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)}) \leq \varepsilon$; якщо для кожної k -ї компоненти вектора $\Delta(\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)})$ умова виконується – перейти до кроку 5, інакше – до кроку 4.
4. $s = s + 1$. Визначити вектор $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}^{(s)}$ з формули (5.7), перейти до кроку 2.
5. Кінець.

5.3. Уточнення картини напружено-деформованого стану тонкої пластини з розрізом

Запропонований підхід та алгоритм АЗ щодо визначення стрибків узагальнених переміщень на лінії розрізу було застосовано для уточнення картини напружено-деформованого стану пластини з математичним розрізом, отриманої за допомогою методу скінченних елементів.

5.3.1. Вибір сіток скінченних елементів для розв’язання прямої задачі деформування пластини з розрізом

Вибір сітки здійснювався на моделі пластини з центральним розрізом довжини $2l_1 = 0.25a$; координати вершин $A(-0.5;0)$, $B(0.5;0)$. Пластина знаходилась під дією нормального розподіленого навантаження $q = 0.1$ та розтягальних зусиль $q_2|_{\xi_2=\pm 1} = 0.8$ (рис.5.1).

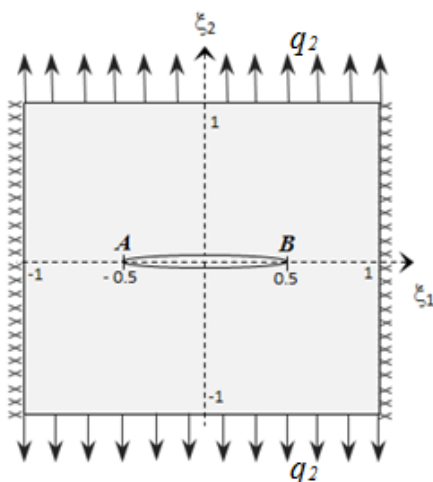


Рис. 5.1. – Модель пластини з розрізом у процесі вибору сітки

Побудову скінченно-елементної моделі пластини здійснено за допомогою пакету прикладних програм. Вибір сіток, які б забезпечили отримання значень основних характеристик напружено-деформованого стану системи із заданою точністю, проводився серед регулярних сіток та сіток зі згущенням в областях вершин розрізу.

На рис. 5.2 наведено розподіли

напружень s_{11} та s_{22} в перерізі $\xi_2 = 0$, (співпадає з лінією розрізу), які отримано з використанням регулярних сіток різної щільності (N – кількість вузлів).

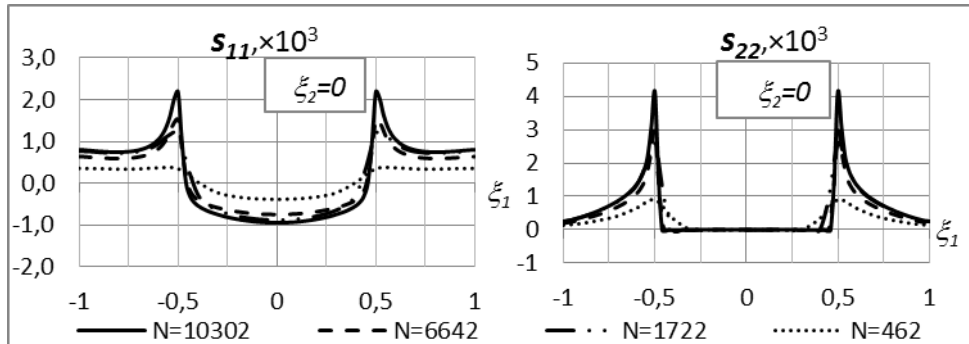


Рис. 5.2 – Розподіли напружень у пластині з розрізом, що отримано на регулярних сітках різної щільності

З аналізу наведених розподілів можна зробити висновок, що зі згущенням сітки спостерігається збіжність значень напружень для будь якої точки перерізу, окрім малого окілу біля вершин розрізу. Біля вершин розрізу, навпаки, значення напружень демонструють суттєве зростання, що пов'язано з сингулярністю поля напружень вигляду $1/\sqrt{r}$ біля вершин розрізів, де r – відстань від вершини до точки вимірювання.

Як відомо, з метою більш точного моделювання поведінки напружень та деформацій поблизу вершин в пружних тілах використовують методи з нерівномірним розбиттям вказаних областей. У даному дослідженні для уточнення поля напружень було побудовано нерегулярні сітки з 4-вузлових скінченних елементів, причому навколо вершин розрізу було створено вироджені трикутні елементи з ущільненням сітки на 10%, 15% та 20% у напрямку вершин.

На рис. 5.3 зображено картини напружено-деформованого стану пластини з розрізом, що отримано з використанням регулярної сітки $N = 10302$ (a) та сітки $\bar{N} = 1550$ зі згущенням в області вершин розрізу (b).

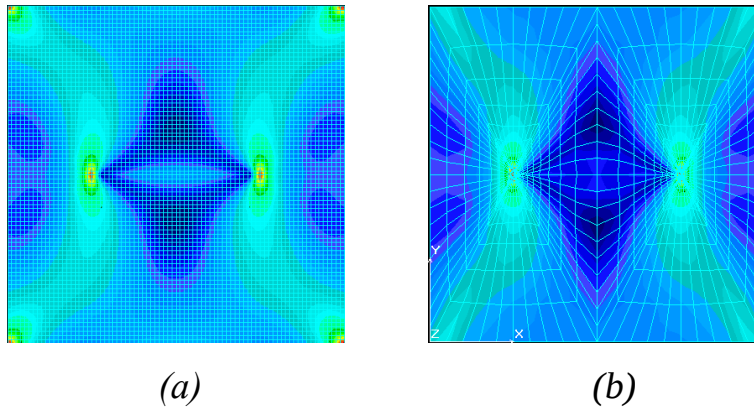


Рис. 5.3 – Напружено-деформований стан пластини з центральним розрізом

На рис. 5.4 наведено значення напружень s_{22} в перерізі $\xi_2 = 0$ в напрямку від вершини розрізу у бік затисненої кромки пластини, що було обчислено з використанням нерегулярних сіток: $\tilde{N} = 1550$ (пунктир), $\tilde{N} = 3840$ (тонка лінія), $\tilde{N} = 5250$ (суцільна лінія).

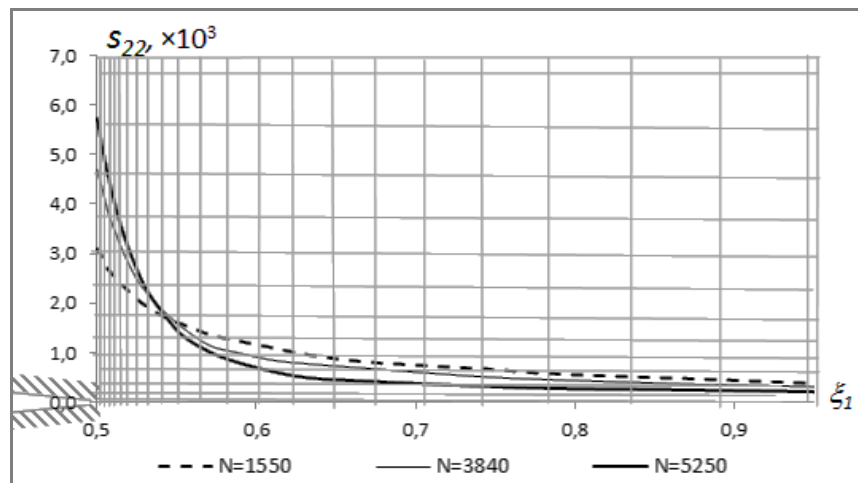


Рис. 5.4 – Значення напружень s_{22} в перерізі $\xi_2 = 0$ на відрізку $\xi_1 = [0.5; 1]$ за результатами розрахунків з використанням нерегулярних сіток

З рис.5.4 витікає, що при згущенні сітки спостерігається суттєве зростання значень напружень у разі наближення до вершини розрізу, а у разі віддалення від вершини обчислені значення приблизно однакові.

З урахуванням результатів проведеного аналізу розв'язання прямої задачі деформування пластини з розрізом було виконано на регулярній сітці $N = 10201$ та нерегулярній сітці $\tilde{N} = 5250$.

5.3.2. Аналіз результатів застосування алгоритму $A3$ до уточнення картини напружено-деформованого стану пластини

Запропонований підхід було застосовано щодо уточнення картини напружено-деформованого стану пластини ($a/b=1$, $a/h=100$, $E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$) з лінійним поздовжнім розрізом довжини $2l_1 = a/5$. Координати вершин розрізу $A(-0.1; 0.7)$, $B(0.1; 0.7)$. Пластина знаходиться під дією осевого розтягання $q_2|_{\xi_2=\pm 1} = 0.5$, кромки $\xi_1 = \pm 1$ жорстко затиснено.

На рис. 5.5 наведено розподіли напружень s_{11} та s_{22} в перерізі пластини $\xi_2 = 0.7$, що було отримано з використанням регулярної та нерегулярної сіток.

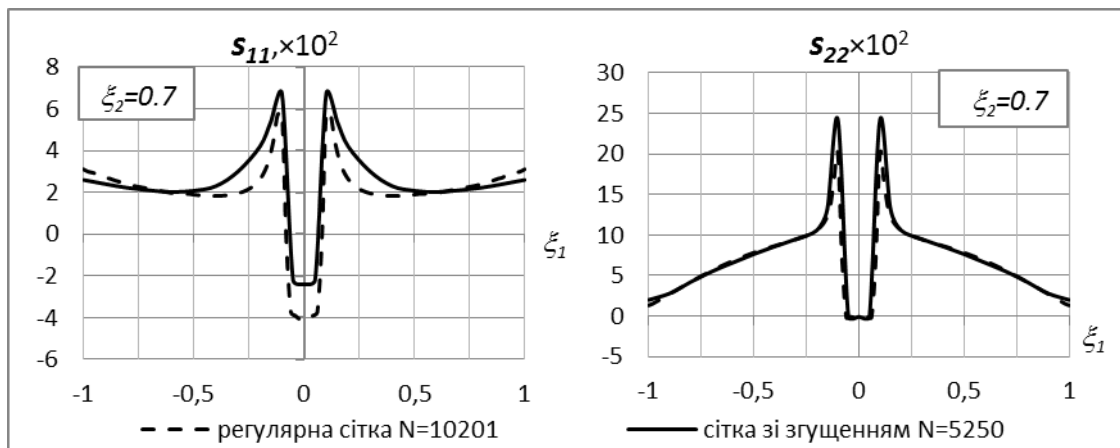


Рис. 5.5 – Розподіли напружень s_{11} та s_{22} на лінії розрізу

Як свідчить аналіз рис. 5.5, розрахунок на нерегулярній сітці продемонстрував більш виражену сингулярність функцій напружень при наближенні до вершин розрізу. Такий результат пояснюється згущенням скінченних елементів в області вершин, що дає можливість точніше описати поле напружень в околі вершин.

У таблиці 5.1 наведено розрахункові значення функції зусиль у вузлах сітки на лінії розрізу $\xi_2 = 0.7$. Враховуючи симетричність розташування розрізу відносно осі ξ_2 , значення наведено для половини розрізу.

Таблиця 5.1

Обчислені значення зусиль на берегах розрізу $\Gamma_p^{\pm}(H^3)$

<i>Регулярна сітка</i> $N = 10201$						
ξ_1	T_{11}		T_{22}		T_{12}	
	$\Gamma_p^+(H^3)$	$\Gamma_p^-(H^3)$	$\Gamma_p^+(H^3)$	$\Gamma_p^-(H^3)$	$\Gamma_p^+(H^3)$	$\Gamma_p^-(H^3)$
0.00	-315.20	-305.70	0.553	0.399	-1.980	1.340
0.01	-307.40	-298.50	0.787	0.611	-5.085	3.735
0.02	-299.10	-292.10	1.020	0.822	-8.190	6.130
0.03	-279.50	-274.40	3.930	3.646	-17.35	14.27
0.04	-260.10	-257.30	6.840	6.470	-26.50	22.40
0.05	-203.30	-204.50	-0.360	-0.685	-57.60	51.80
0.06	-146.40	-152.40	-7.560	-7.840	-88.70	81.20
0.07	19.50	5.50	425.70	419.10	-229.85	218.60
0.08	185.70	163.80	859.00	846.30	-371.00	356.00
0.09	236.50	221.50	1004.0	998.50	-143.65	125.00
<i>Нерегулярна сітка</i> $\tilde{N} = 5250$						
ξ_1	T_{11}		T_{22}		T_{12}	
	$\Gamma_p^+(H^3)$	$\Gamma_p^-(H^3)$	$\Gamma_p^+(H^3)$	$\Gamma_p^-(H^3)$	$\Gamma_p^+(H^3)$	$\Gamma_p^-(H^3)$
0.000	-219.20	-196.10	0.1241	-0.008	-0.0521	0.120
0.036	-221.90	-198.40	8.0530	4.015	-21.140	-17.61
0.059	-125.10	-120.60	260,30	248.70	-88.320	-79.44
0.074	6.3510	3.014	481,10	444.60	-250.40	-232.10
0.083	117.60	108.20	634,30	592.10	-310.30	-297.80
0.089	206.90	194.10	743,50	708.70	-185.70	-181.30
0.093	273.80	221.20	819,20	791.40	-90.220	-85.44
0.096	327.80	304.50	877,30	860.40	-10.38	-8.870
0.097	346.70	328.30	896,80	872.30	30.61	24.71
0.098	365.90	343.20	986,60	983.90	90.07	86.68

Як свідчать наведені у табл. 5.1 результати обчислень на двох сітках, для моделі з дійсним розрізом значення зусиль на берегах $\Gamma_p^{\pm}(H^3)$ в обох випадках відмінні від нуля, тобто, умови (2.23) не виконуються.

Для усунення виявленої невідповідності між обчисленим станом пластини з розрізом та станом вказаної системи у разі виконання умов (2.23) на берегах розрізу було виконано додаткове уточнення отриманих параметрів напружено-деформованого стану пластини з використанням алгоритму АЗ. Для цього на берегах дійсного розрізу в вузлах скінченно-елементної сітки

задавалися значення стрибків переміщень та кутів повороту $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$, які визначалися за формулою (5.7). Критерієм закінчення ітераційного процесу було виконання статичних граничних умов (2.23) на берегах розрізу $\Gamma_p^\pm(H^3)$.

На рис. 5.6 показано як змінювалися розподіли функцій зусиль T_{11} та T_{22} на лінії розрізу $\xi_2 = 0.7$, отримані на сітці $N = 10201$, на ітераціях процесу уточнення з використанням запропонованого підходу.

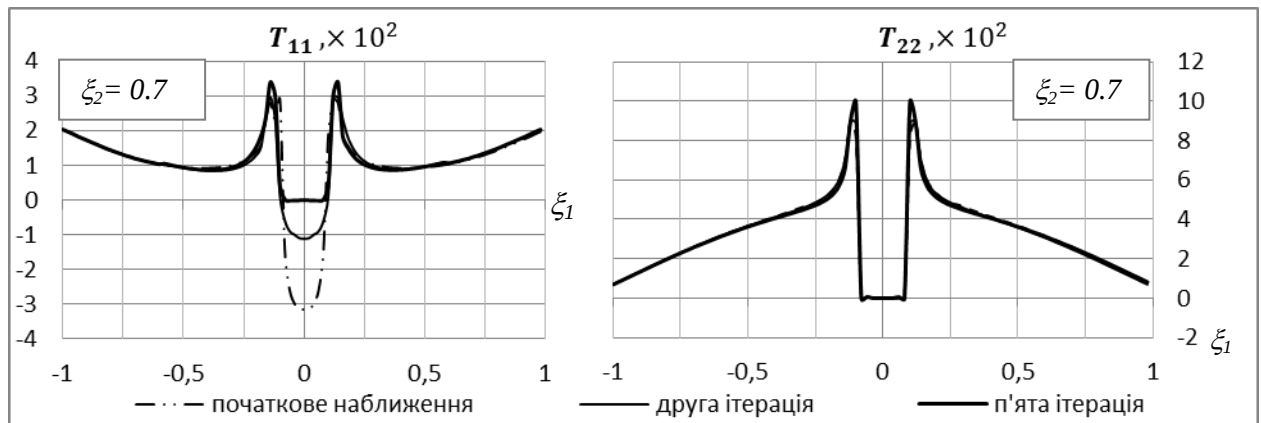


Рис. 5.6 – Розподіл функцій T_{11} та T_{22} на лінії розрізу в процесі уточнення характеристик напружено-деформованого стану пластини з розрізом

Можна відзначити, що за результатами визначення стрибків переміщень $\tilde{U}_{\Gamma_p^\pm(H^3)}$ з використанням алгоритму *A3* досягнуто виконання заданих статичних умов на берегах розрізу у тонкій пластині.

5.4. Ідентифікація дефектів у вигляді лінійних розрізів

Далі з використанням запропонованого способу моделювання розрізу за допомогою лінії у суцільній пластині із заданими стрибками узагальнених переміщень розв'язано задачу ідентифікації у тонкій пластині дефектів у вигляді лінійних розрізів, яку сформульовану як обернену задачу.

5.4.1. Постановка оберненої задачі та метод розв'язання

Для опису невідомих оберненої задачі – координат вершин розрізу (точок A та B), використовується вектор $[X_A, X_B]$. Тоді у якості невідомих

оберненої задачі виступає вектор $H^3(X) = \{\xi_{1A}, \xi_{2A}, \xi_{1B}, \xi_{2B}\}$, що складається з координат вершин розрізу.

Для розв'язання оберненої задачі необхідно знайти вектор $H^3(X)$, $H^3(X) \in \bar{H}$, такий, що доставляє мінімум функціоналу

$$S(H^3(X)) = \sum_p (\sigma(X_p, H^3(X)) - \sigma_p^*)^2 \rightarrow \min, \quad p = \overline{1, P}. \quad (5.8)$$

Значення компонент вектора $\sigma(X_p, H^3(X))$ визначаються з умови мінімуму функціонала (5.2), σ_p^* – спостережувані значення узагальнених деформацій, які виміряно в точках X_p , $p = \overline{1, P}$ на поверхні пластини.

Для визначення значень вектора $H^3(X)$ будемо використовувати метод, аналогічний методу вектора спаду [111, 121].

Сформулюємо задачу ідентифікації розрізу з урахуванням введеної дискретизації у вигляді:

$$H^3(X) = \arg \min_{H \in \bar{H}} S(H^3(X)), \quad H^3 \in \bar{H}, \quad (5.9)$$

де $S(H^3(X)) = (\sigma_p(X_p, H^3(X)) - \sigma_p^*)^T (\sigma_p(X_p, H^3(X)) - \sigma_p^*)$, $p = \overline{1, P}$.

Для використання методу вектора спаду визначимо дискретний точковий простір M , $\bar{H}'$ – множина допустимих розв'язків, $\bar{H}' \subset \bar{H}$.

Для простору M введемо метрику у вигляді:

$$\rho^2(H_1, H_2) = \sum_{i=1}^2 (X_{1i} - X_{2i})^2,$$

де X_{1i} , X_{2i} – координати точок H_1 , H_2 в просторі M .

Припустимо, що H' , $H' \in \bar{H}'$ – деякий допустимий розв'язок оберненої задачі (5.9). Визначимо окіл M_r точки H' з радіусом r як набір можливих розв'язків H_q^3 , $q = \overline{1, 8}$, так щоб $\rho(H_q^3, H') \leq r$, в якості радіуса r оберемо довжину діагоналі скінченного елемента (рис. 5.7).

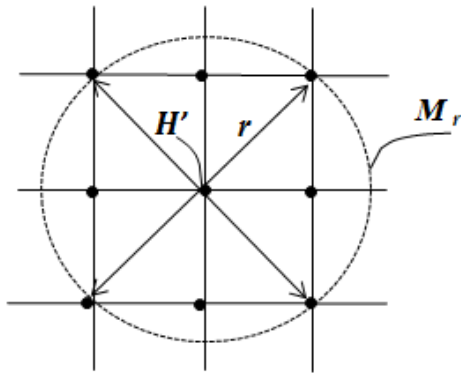


Рис. 5.7 – Множина можливих розв'язків оберненої задачі

В околі M_r точки $H' \in \overline{H}$ в якості вектора спаду функції $S(H^3(X))$ виступає такий вектор $\Delta(H_q^3, H')$, компонентами якого є $\Delta_q = S(H_q^3(X)) - S(H')$, де $H_q^3(X)$, $q = \overline{1, 8}$ – припустимі розв'язки задачі, що належать окілу M_r . У випадку, коли всі $\Delta_q = \Delta(H_q^3, H') \geq 0$, точка H' є точкою локального мінімуму, тобто $S(H') = \min_{H_q^3} S(H^3(X))$, $H_r^3 \in M_r$.

Якщо ж будь-які компоненти Δ_q вектора спаду функції $S(H^3(X))$ матимуть від'ємні значення, це буде означати, що H' не є точкою локального мінімуму і в деяких точках окілу M_r функція $S(H^3(X))$ приймає менші значення, ніж у H' . Точка H_q^3 , для якої компонента Δ_q , $q = \overline{1, 8}$ приймає найменше значення, визначає напрямок подальшого руху до точки локального мінімуму.

На наступному кроці обчислювального процесу методу вектора спаду саме ця точка стає центром окілу M_r . Обчислювальний процес закінчуються, якщо всі компоненти $\Delta_q \geq 0$, а центральна точка окілу M_r є точкою локального мінімуму.

Запропонований підхід до розв'язання оберненої задачі було реалізовано наступним алгоритмом.

Алгоритм А4 ідентифікації вершин розрізу

1. Ініціалізувати змінні: $H^3(X) = \{\xi_{1A}, \xi_{2A}, \xi_{1B}, \xi_{2B}\}$ – вектор невідомих оберненої задачі; r – радіус, $r > 0$; s – номер ітерації, $s = 0$.
2. Задати вектор $H^{3(s)}(X) = \{\xi_{1A}^{(s)}, \xi_{2A}^{(s)}, \xi_{1B}^{(s)}, \xi_{2B}^{(s)}\}$, що визначає початкове місце розташування вершин розрізу в пластині.

3. Розв'язати пряму задачу при заданому розташуванні вершин розрізу $H^{3(s)}(X)$ та визначити напружено-деформований стан пластини.
4. Для кожної з вершин розрізу побудувати вектор спаду $\Delta = \{\Delta_q\}$, $q = \overline{1, 8}$ в напрямку точок сітки X_n , для яких $\rho(X_k^{(s)}, X_{k^q}) \leq r$.
5. Якщо всі компоненти $\Delta_q \geq 0$, перейти до пункту 7.
6. Виконати крок в напрямку вузла, в якому компонента Δ_q приймає найменше значення, $s = s + 1$. Перейти до пункту 3.
7. Кінець.

5.4.2. Модель пластини з розрізом

В задачах ідентифікації розрізу розглядалась тонка пластина (лінійні розміри $2a \times 2b$, $a/b=1$, товщина h , $a/h=50$, $E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_0 = 0.3$), що знаходилась під дією нормального розподіленого навантаження q та розтягальних зусиль $q_2|_{\xi_2=\pm 1}$. Кромки пластини $\xi_1 = \pm 1$ жорстко затиснено.

У пластині є поздовжній розріз AB довжини $2l_1$, місце розташування вершин якого необхідно визначити. На берегах розрізу $\Gamma_p^\pm(H^3)$ виконуються умови (2.23), значення переміщень $u_i^\pm$, $w^\pm$, $\frac{\partial w^\pm}{\partial \xi_i}$, $i=1,2$ на берегах розрізу вільні. Модель пластини зображено на рис. 5.8.

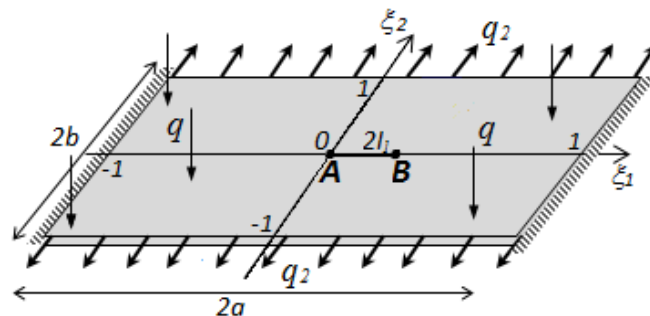


Рис. 5.8 – Модель пластини з розрізом та схема навантаження для задачі ідентифікації поздовжнього розрізу

5.4.3. Аналіз результатів ідентифікації лінійних розрізів

Далі наведено результати ідентифікації лінійних розрізів у пластині з використанням запропонованого способу моделювання розрізу за допомогою лінії у суцільній пластині із заданими стрибками узагальнених переміщень.

Спостережувані значення $\sigma^* = \{\varepsilon_{ij}^*, \chi_{ij}^*\}^T$ отримано з розв'язання прямої задачі деформування пластини з розрізом ($2l_1 = a/2$, координати вершин $A(0.0;0.0)$, $B(0.25;0.0)$) таким навантаженням: $q = 0.1$, $q_2|_{\xi_2=\pm 1} = 0.8$.

Визначення значень компонент $\{H_n^{(s)}\}$, $n = \overline{1, N}$ виконано в ітераційному процесі методу вектора спаду. Кроки виконання ітераційного процесу визначення вершин розрізу проілюстровано на рис. 5.9: рис. 5.9 *a* відповідає ідентифікації лівої вершини, рис. 5.9 *b* – правої.

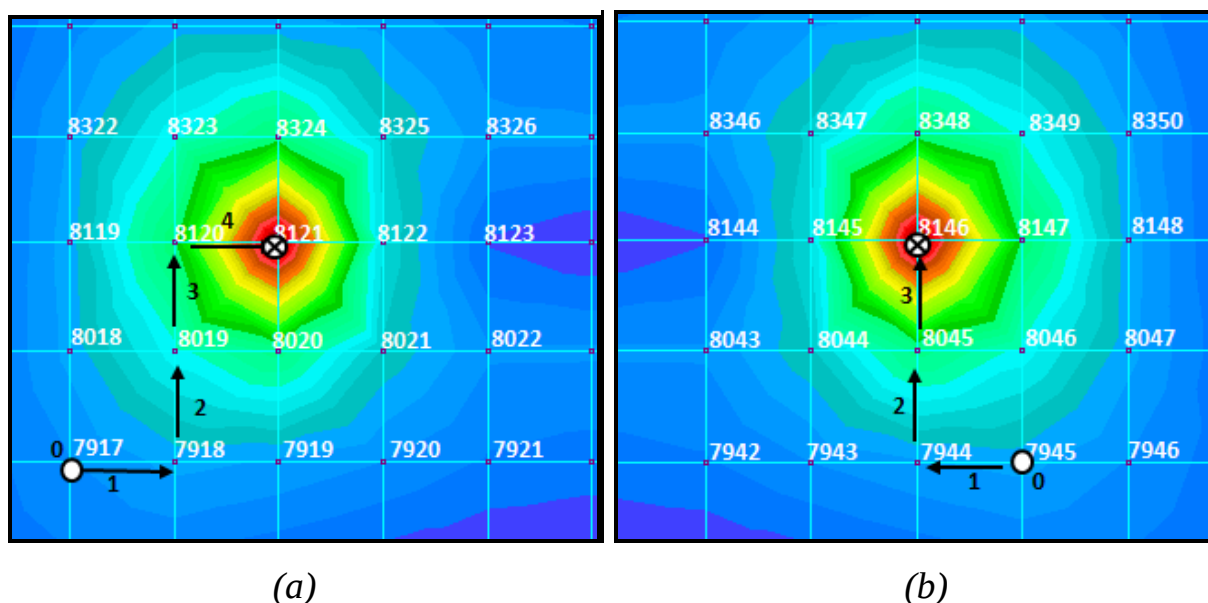


Рис. 5.9 – Ілюстрація ітераційного процесу визначення вершин розрізу методом вектора спаду:

(*a*) – ідентифікація лівої вершини; (*b*) – ідентифікація правої вершини

Номери вузлів позначено білими цифрами, чорними цифрами вказано номери ітерацій. Білим кружком показано вузол, вибраний в якості початкового наближення, а чорним хрестиком у білому кружку – результат процесу ідентифікації. Стрілками показано напрямки переміщення вершин розрізу на кроках ітераційного процесу методу вектора спаду.

У таблиці 5.2 показано, як змінювалися значення координат вершин розрізу (компонент $\{H_n^{3(s)}\}$) на ітераціях методу вектора спаду. В останньому стовпчику таблиці наведено мінімальні значення компонент вектора спаду на ітерації, що визначили напрямок переходу до наступного вузла.

Таблиця 5.2

Відновлення вершин розрізу в пластині методом вектора спаду

№ ітерації, s	Координати вершин на ітераціях метода вектора спаду							
	ліва вершина			$\min \Delta_q$	права вершина			$\min \Delta_q$
	№ вузла	ξ_1	ξ_2		№ вузла	ξ_1	ξ_2	
0	7917	-0.02	-0.02	-0.3143	7945	0.27	-0.02	-0.2772
1	7918	-0.01	-0.02	-0.2746	7944	0.25	-0.01	-0.2437
2	8019	-0.01	-0.01	-0.1161	8045	0.25	-0.01	-0.0682
3	8120	-0.01	0.00	-0.0413	8146	0.25	0.00	0.0278
4	8121	0.00	0.00	0.0271	-	-	-	-

Як впливає з аналізу таблиці 5.2, відновлення місця розташування лівої вершини розрізу відбулося за 4 кроки ітераційного процесу методу вектора спаду, правої – за 3 кроки.

На рис. 5.10 показано, як змінювалась картина напружено-деформованого стану пластини в ітераційній процедурі ідентифікації вершин розрізу.

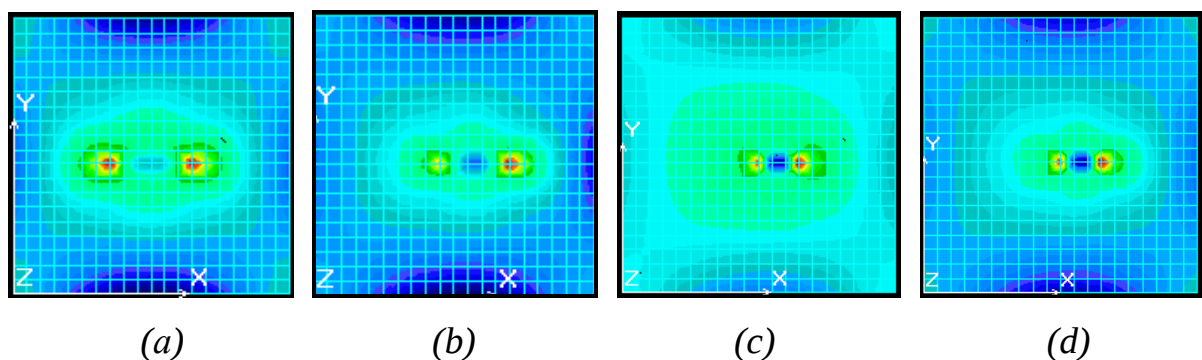


Рис. 5.10 – Картини напружено-деформованого стану системи в процедурі ідентифікації вершин розрізу:

- (a) – початкове наближення;
- (b) – результат першої ітерації;
- (c) – результат третьої ітерації;
- (d) – результат ідентифікації

Швидкість збіжності ітераційного процесу проілюстровано на рис. 5.11 залежністю значення $|\min \Delta_q|$ для вершин розрізу на ітераціях методу вектора спаду. Видно, що значення абсолютної величини $\min \Delta_q$ на ітераціях швидко зменшується.

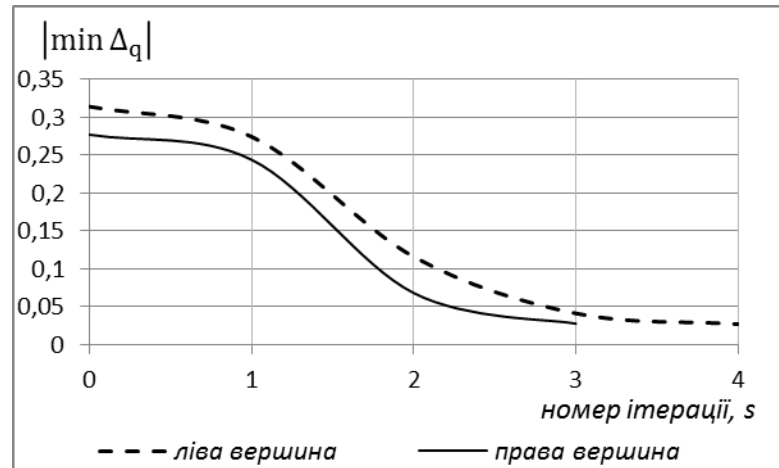


Рис. 5.11 – Збіжність ітераційного процесу ідентифікації вершин розрізу

Аналіз проведених розрахунків показав, що вибір початкового наближення впливає на збіжність та швидкість збіжності запропонованого алгоритму.

5.4.4. Дослідження ефективності запропонованого підходу ідентифікації для різних випадків розташування розрізу у пластині

Досліджено вплив розташування розрізу в пластині на якість ідентифікації при моделюванні розрізу лінією в суцільній пластині.

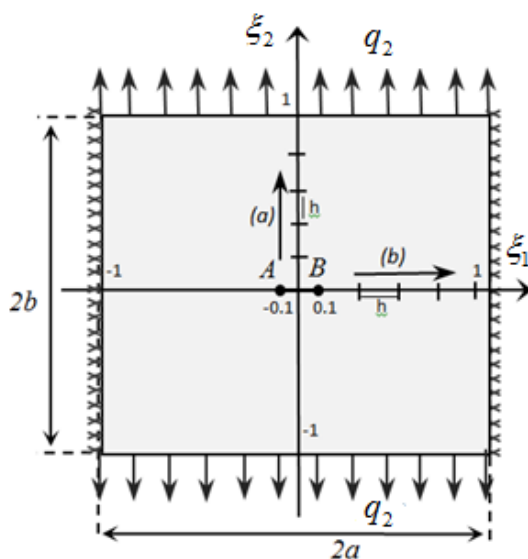


Рис. 5.12 – Розташування розрізу у пластині

Розглядається тонка пластина з розрізом AB довжини $2l_1 = a/5$, що знаходиться під дією нормальної розподіленого навантаження $q = 0,1$ та розтягальних зусиль $q_2|_{\xi_2=\pm 1} = 0,3$. Кромки пластини $\xi_1 = \pm 1$ жорстко затиснено.

На рис. 5.12 зображено як змінювалось

розташування розрізу в обчислювальних експериментах. Розріз AB зміщувався від центру пластини паралельно координатним осям ξ_1 і ξ_2 з кроком $h = a/5$. Стрілками вказано напрямки зміщення розрізу: (a) – до навантаженої кромки пластини; (b) – до затисненої кромки.

За допомогою алгоритму $A4$ було виконано ідентифікацію вершин розрізу і на підставі отриманих результатів розраховано характеристики напружено-деформованого стану пластини. Картини напружено-деформованого стану пластини для різних випадків розташування розрізу відносно осі ξ_2 надано на рис. 5.13.

На рис. 5.14 та 5.15 показано розподіли функції напружень в перерізах пластини, що співпадають з лінією розрізу, при зміщенні розрізу в напрямку осі ξ_2 (стрілка a на рис. 5.12).

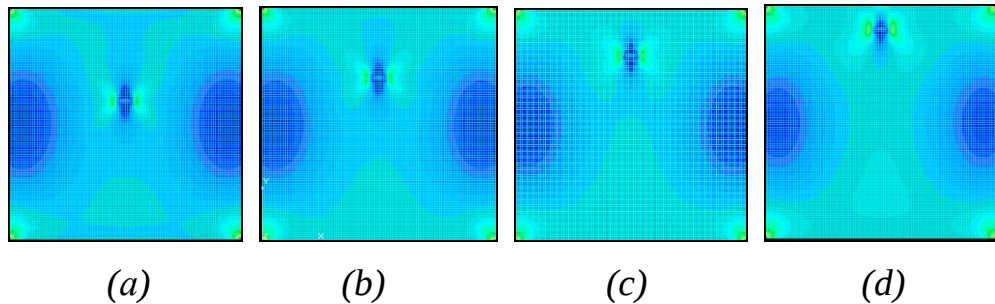


Рис. 5. 13 – Напружено-деформований стан пластини з розрізом при його зміщенні уздовж осі ξ_2 :

(a) – $A(-0.1;0.2)$, $B(0.1;0.2)$; (c) – $A(-0.1;0.6)$, $B(0.1;0.6)$;
 (b) – $A(-0.1;0.4)$, $B(0.1;0.4)$; (d) – $A(-0.1;0.8)$, $B(0.1;0.8)$

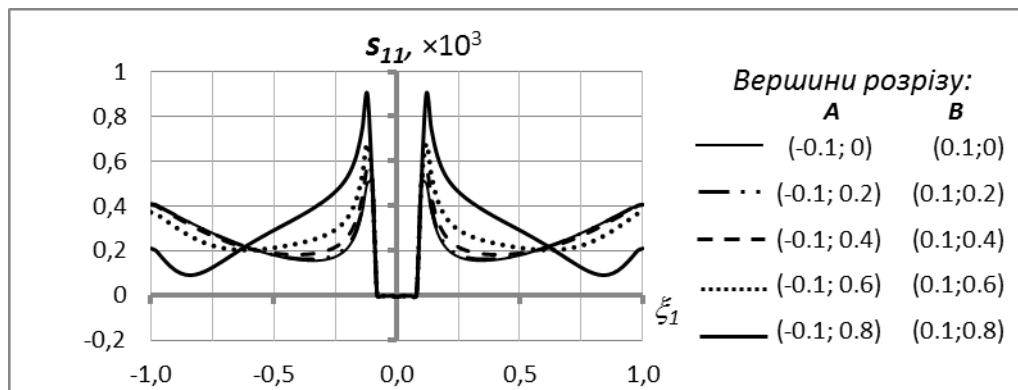


Рис. 5.14 – Розподіл функції напруження S_{11} в перерізах, що співпадають з лінією розрізу, при зміщенні розрізу у напрямку навантаженої кромки (уздовж осі ξ_2)

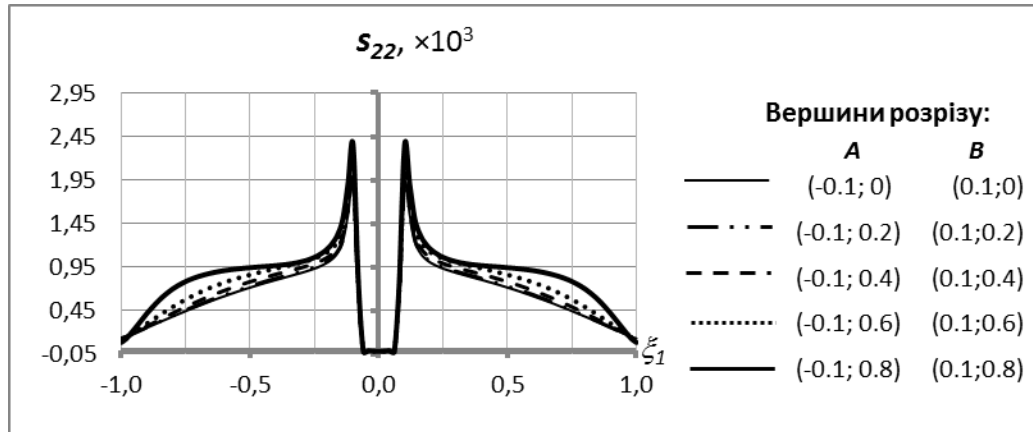


Рис. 5.15 – Розподіл функції напруження S_{22} в перерізах, що співпадають з лінією розрізу, при зміщенні розрізу у напрямку навантаженої кромки (уздовж осі ξ_2)

З аналізу наведених розподілів видно, що при зміщенні розрізу у напрямку осі ξ_2 поведінка напружень S_{11} та S_{22} в перерізах, які співпадають з лінією розрізу, змінюється несуттєво. Розподіл напружень залишається симетричним, можна відзначити лише збільшення амплітуди значень напружень при наближенні до навантаженої кромки пластини.

На рис. 5.16 зображено картини напружено-деформованого стану пластини при зміщенні розрізу в напрямку затисненої кромки.

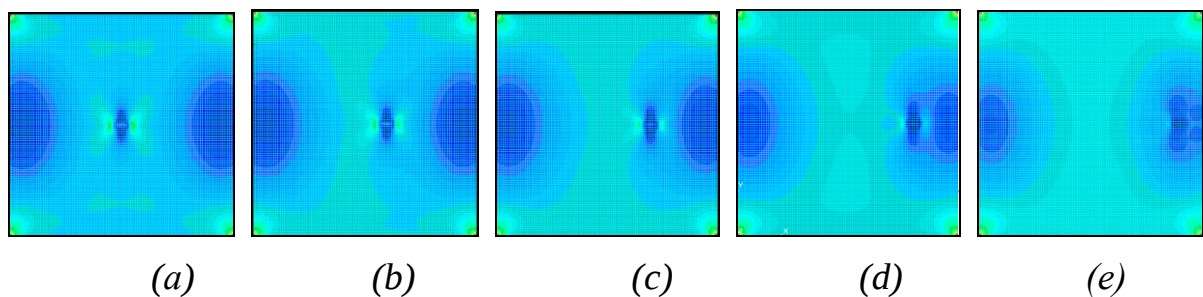


Рис. 5.16 – Напружено-деформований стан пластини з розрізом AB при його зміщенні у напрямку затисненої кромки (уздовж осі ξ_1):

- (a) - $A(-0.1; 0)$, $B(0.1; 0)$;
- (b) - $A(0.1; 0)$, $B(0.3; 0)$;
- (c) - $A(0.3; 0)$, $B(0.5; 0)$;
- (d) - $A(0.5; 0)$, $B(0.7; 0)$;
- (e) - $A(0.7; 0)$, $B(0.9; 0)$

На рис. 5.17 та 5.18 наведено розподіли функцій напружень S_{11} та S_{22} в пластині для випадку зміщення розрізу в напрямку осі ξ_1 .

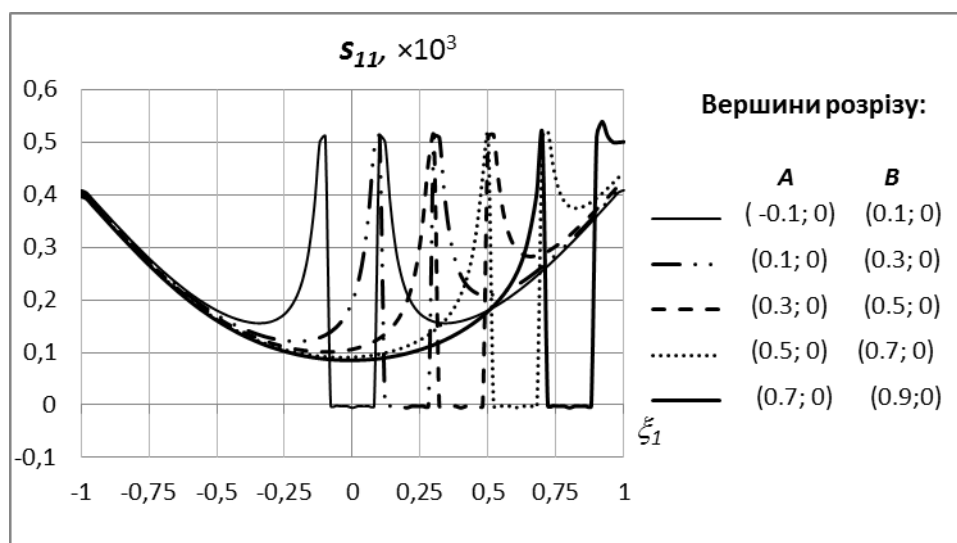


Рис. 5.17 – Розподіл функції напружень S_{11} при зміщенні розрізу до затисненої кромки (уздовж осі ξ_1) в перерізі $\xi_2 = 0$

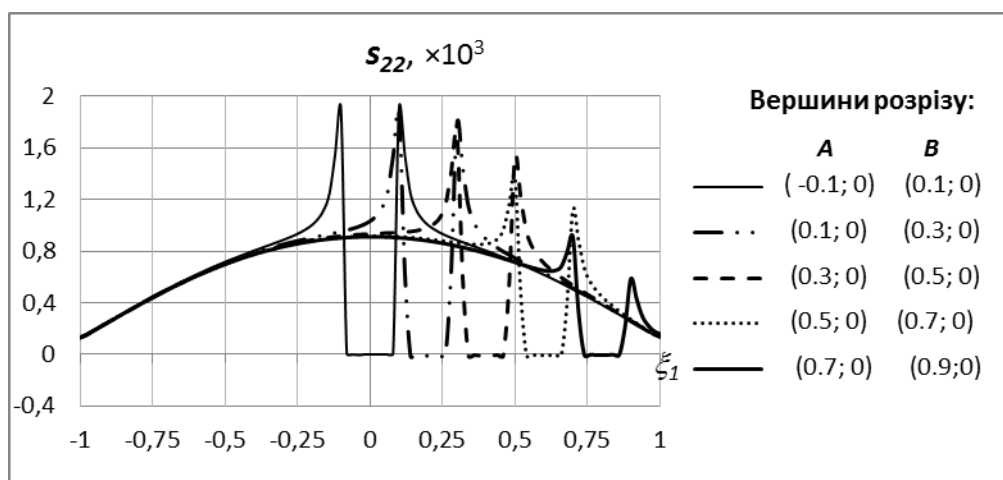


Рис. 5.18 – Розподіл функції напружень S_{22} при зміщенні розрізу до затисненої кромки (уздовж осі ξ_1) в перерізі $\xi_2 = 0$

При зміщенні розрізу до затисненої кромки пластини характер розподілу напружень S_{11} та S_{22} змінюється. Наближення до затисненої кромки пластини супроводжується зменшенням стрибків напружень в вершинах розрізу, характер розподілу напружень перестає бути симетричним: значення напружень для вершини розрізу, розташованої ближче до затисненої кромки пластини, значно менше.

Зазначені особливості характеру напружено-деформованого стану впливають на проведення процедури ідентифікації.

У таблиці 5.3 наведено характеристики ітераційного процесу ідентифікації вершин розрізу для різних випадків розташування розрізу.

Таблиця 5.3

Ідентифікація вершин розрізу
у пластині для різних випадків його розташування

Координати вершин дійсного розрізу, $\xi_{1A}^* = -0.1$, $\xi_{1B}^* = 0.1$		Зміщення розрізу до навантаженої кромки $\xi_2 = 1$				
		кількість ітерацій	Вершина A, $\xi_{1A} = -0.1$		Вершина B, $\xi_{1B} = 0.1$	
			ξ_{2A}	похибка, %	ξ_{2B}	похибка, %
ξ_{2A}^*	ξ_{2B}^*					
0.0	0.0	3	0.0	0.00	0.0	0.00
0.2	0.2	3	0.202	1.00	0.202	1.00
0.4	0.4	4	0.406	1.50	0.404	1.00
0.6	0.6	4	0.608	0.67	0.606	1.00
0.8	0.8	5	0.806	0.75	0.794	0.75
Координати вершин дійсного розрізу, $\xi_{2A}^* = 0$, $\xi_{2B}^* = 0$		Зміщення розрізу до затисненої кромки $\xi_1 = 1$				
		кількість ітерацій	Вершина A, $\xi_{2A} = 0$		Вершина B, $\xi_{2B} = 0$	
			ξ_{1A}	похибка, %	ξ_{1B}	похибка, %
ξ_{1A}^*	ξ_{1B}^*					
-0.1	0.1	3	-0.1	0.00	0.102	0.50
0.1	0.3	4	0.102	0.50	0.298	0.67
0.3	0.5	4	0.298	0.67	0.496	0.80
0.5	0.7	5	0.494	1.20	0.688	1.71
0.7	0.9	6	0.690	1.43	0.878	2.44

З аналізу наведеної таблиці випливає, що при зміщенні розрізу до навантаженої кромки пластини кількість ітерацій та точність відновлення координат вершин розрізу практично не змінюються. При зміщенні до затисненої кромки кількість ітерацій збільшується, похибка визначення координат вершин розрізу зростає. У безпосередній близькості до затисненої кромки похибка відновлення координати ξ_1 вершини B становить близько 2.5%.

На рис. 5.19 наведено залежність похибки відновлення розташування вершин розрізу в пластині $\frac{\|\xi_i - \xi_i^*\|}{\|\xi_i^*\|}, i=1,2$ в залежності від відстані від вершини розрізу до країв пластини.

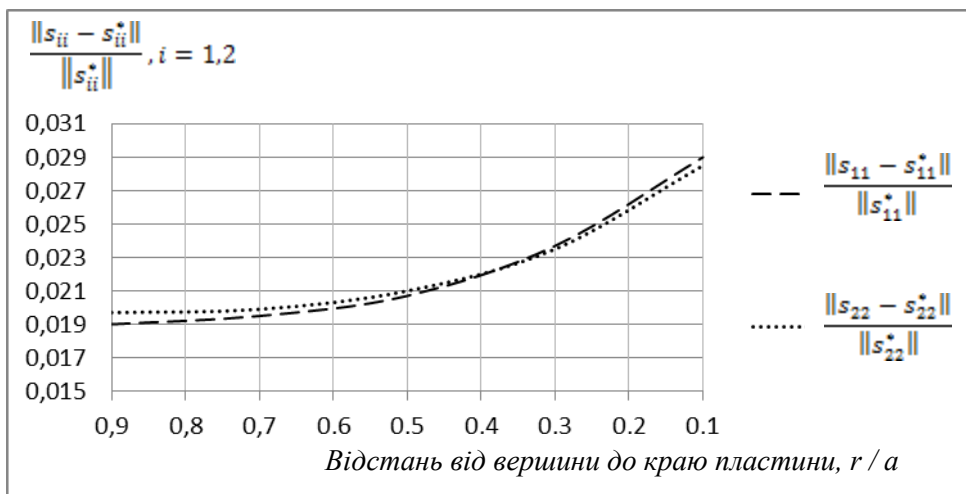


Рис. 5.19 – Похибка відновлення напружень s_{11} і s_{22} в залежності від відстані до затисненої кромки пластини $\xi_1 = 1$

5.4.5. Дослідження ефективності запропонованого підходу ідентифікації в залежності від довжини розрізу

Розглядається пластина $(2a \times 2b \times h, a/b=1, h \ll a, b)$ з центральним поздовжнім розрізом довжини $2l_1$. Пластина знаходиться під дією розтягальних зусиль $q_2|_{\xi_2=\pm 1}=0.5$ та нормального до поверхні пластини розподіленого навантаження $q=0.1$. Пластину жорстко зафіксовано по кромках $\xi_1 = \pm 1$.

Процедуру ідентифікації вершин розрізу проведено для таких значень його довжини: $l_1/a = \{0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5\}$.

В ході експериментів для всіх вказаних значень довжини центрального розрізу вдалося ідентифікувати координати його вершин за 3-6 кроків ітераційного процесу. Найбільшу кількість ітерацій потрібно було виконати для визначення вершин розрізу довжини $l_1/a = 0.05$. Присутність в пластині такого малого дефекту при зазначеному навантаженні супроводжується незначними відхиленнями характеристик напружено-деформованого стану

пластини від відповідних характеристик суцільної конструкції. Це призводить до збільшення тривалості ітераційного процесу визначення вершин вказаного розрізу.

Далі було досліджено залежність процедури ідентифікації вершин розрізу довжини $l_1/a = \{0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5\}$, який розташовано на лінії $\xi_2 = 0$ на відстані r/a до затисненої кромки $\xi_1 = 1$. Результати обчислювальних експериментів наведено в табл. 5.4.

Значення похибок визначення координат вершин ξ_{1A} та ξ_{1B} обчислено у такий спосіб: $\delta_A = |\xi_{1A} - \xi_{1A}^*| / \xi_{1A}^*$, $\delta_B = |\xi_{1B} - \xi_{1B}^*| / \xi_{1B}^*$.

Таблиця 5.4

Кількість ітерацій процесу ідентифікації вершин розрізу залежно від його довжини та відстані до затисненого краю пластини

Довжина розрізу, l_1/a	Відстань від лінії розрізу до краю пластини, r/a														
	1.0			0.8			0.6			0.4			0.2		
	Кількість ітерацій(s) та похибки(δ_A, δ_B) визначення координат ξ_{1A} і ξ_{1B} , %														
	S	δ_A	δ_B	S	δ_A	δ_B	S	δ_A	δ_B	S	δ_A	δ_B	S	δ_A	δ_B
0.5	3	1.13	1.26	4	1.08	1.22	5	1.19	1.31	6	1.43	1.57	8	1.94	1.99
0.4	4	1.12	1.31	4	1.29	1.32	5	1.35	1.47	7	1.69	1.84	9	1.95	2.03
0.3	4	1.31	1.36	5	1.31	1.48	6	1.49	1.67	8	1.86	2.04	9	2.06	2.10
0.2	5	1.27	1.37	6	1.68	1.73	7	1.70	1.81	9	1.92	2.18	10	2.14	2.11
0.1	5	1.33	1.54	6	1.71	1.85	8	1.93	1.96	10	2.04	2.36	11	2.21	2.18
0.05	6	1.82	1.94	7	1.89	1.93	9	1.95	1.97	11	2.27	2.44	12	2.43	2.48

З аналізу табл.5.4 витікає, що, незалежно від довжини розрізу, наближення його вершини до затисненої кромки збільшує тривалість процедури ідентифікації.

5.4.6. Ідентифікація розрізу в тонкій пластині для різних моделей навантаження

У роботі досліджено можливість ідентифікації розрізу в тонкій пластині в залежності від рівня та типу зовнішнього навантаження.

Пластину з поздовжнім розрізом AB жорстко затиснено по кутах. Розглянуто випадки деформування вказаної пластини одновісним та двовісним розтяганням для різних співвідношень розтягальних зусиль, спрямованих по осях ξ_1 та ξ_2 . Схему навантаження досліджуваної системи наведено на рис. 5.20.

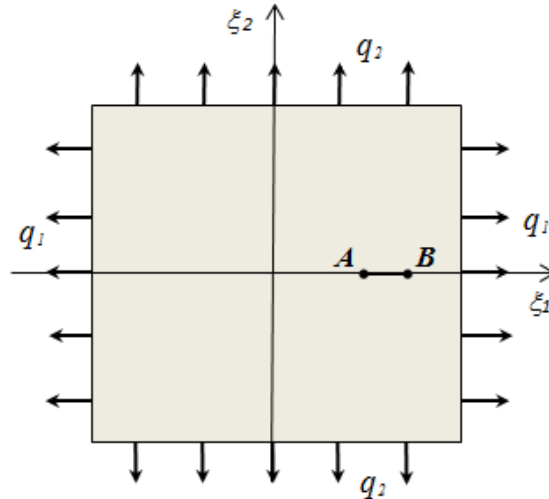


Рис. 5.20 – Схема навантаження пластини з розрізом AB одновісними та двовісними розтягальними зусиллями

Спостережувані значення узагальнених деформацій σ_p^* отримано для дійсного розрізу $2l_1 = a/5$ з координатами вершин: $A(0.5;0)$, $B(0.7;0)$.

Діапазон зміни величини розтягальних зусиль обирається таким чином, щоб деформування пластини залишалося пружним: $q_i = \{0.25, 0.5, 0.75\}, i=1,2$. Ненавантажені кромки пластини в обчислювальних експериментах з одновісним розтяганням вільні.

5.4.6.1. Одновісне розтягання $q_1 = 0$, $q_2 \neq 0$

На рис. 5.21 наведено розподіли напружень S_{11} та S_{22} в пластині з розрізом для різних рівнів осьового розтягання q_2 .

Аналіз розподілів напруження S_{11} дозволяє зробити висновок, що при зазначеній моделі навантаження за границями розрізу напруження S_{11} мають від'ємні значення, які зростають пропорційно підвищенню рівня розтягальних зусиль q_2 . Збільшення величини розтягальних зусиль q_2

внаслідок присутності у пластині дефекту у вигляді розрізу призводить до суттєвого зростання напружень навколо його вершин.

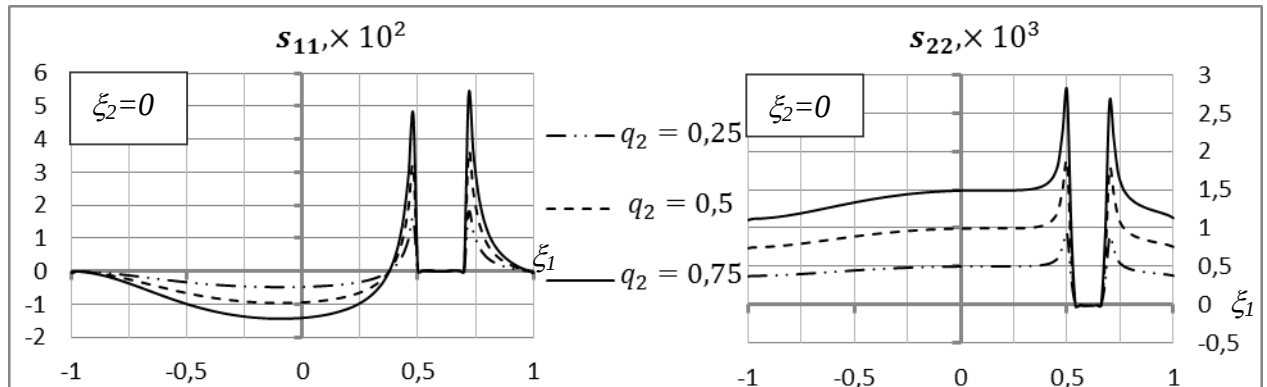


Рис. 5.21 – Розподіл напружень на лінії розрізу при одновісному розтяганні

Як і в області суцільної пластини, напруження S_{11} підвищуються пропорційно зростанню розтягальних зусиль q_2 , але в даному випадку вони мають додатні значення. На лінії розрізу напруження близькі до нуля.

Крім того, слід зазначити, що значення напружень S_{11} в околі вершини, яка розташована ближче до центру пластини, дещо нижчі, ніж біля вершини, яка знаходиться ближче до краю пластини.

Як витікає з аналізу розподілів напруження S_{22} , збільшення величини розтягальних зусиль q_2 призводить до пропорційного збільшення напруження S_{22} на всьому перерізі $\xi_2 = 0$, окрім лінії розрізу: на лінії розрізу напруження S_{22} близькі до нуля.

Також помітно, що рівень значень напружень S_{22} в околі правої вершини менший, ніж в околі лівої. Тобто, вплив розтягальних зусиль q_2 на поле напружень S_{22} зменшується у разі наближення до кромки $\xi_1 = 1$.

Порівняння розподілів напружень S_{11} та S_{22} свідчить, що для напружень S_{11} у даному випадку отримано протилежний результат: наближення до кромки $\xi_1 = 1$ викликає більше зростання напружень S_{11} в околі правої вершини розрізу. Різниця величин стрибків напружень в околі

вершин розрізу для S_{11} та S_{22} збільшується зі зростанням величини розтягальних зусиль q_2 .

Вказані закономірності розподілу функції напружень було отримано для всіх випадків розташування розрізу уздовж лінії $\xi_2 = 0$.

5.4.6.2. Одновісне розтягання $q_1 \neq 0$, $q_2 = 0$

Розглядалися випадки деформації пластини з розрізом одновісним розтяганням q_1 різної величини. В даному випадку розтягальні зусилля спрямовано паралельно лінії розрізу.

У ході проведення обчислювальних експериментів встановлено, що напруження S_{11} підвищується пропорційно зростанню рівня розтягальних зусиль q_1 на всій лінії $\xi_2 = 0$, включаючи лінію розрізу. При цьому характер розподілу напружень S_{11} повністю зберігається.

На рис. 5.22 наведено розподіл напружень S_{22} у випадку деформування пластини з розрізом AB розтягальними зусиллями q_1 різної величини.

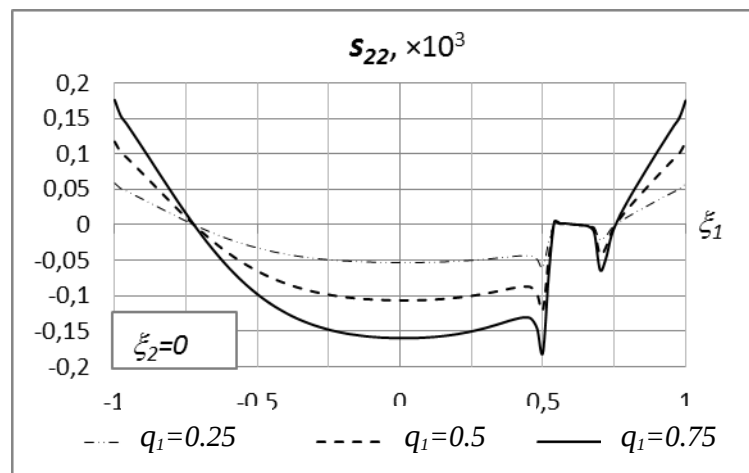


Рис. 5.22 – Розподіл напружень S_{22} в перерізі $\xi_2 = 0$ пластини з розрізом при осьовому розтяганні q_1

Аналіз рисунка свідчить, що величина напружень S_{22} збільшується пропорційно зростанню зусиль q_1 , а загальний характер поведінки напружень змінюється несуттєво. При цьому на лінії розрізу значення

напружень S_{22} близькі до нуля незалежно від рівня розтягальних зусиль q_1 . Крім того, у даному випадку спостерігається менший стрибок напружень S_{22} у вершині розрізу, що розташована ближче до кромки пластини $\xi_1 = 1$.

Слід зазначити, що завдяки використанню запропонованого способу моделювання розрізу лінією у суцільній пластині задані статичні граничні умови на берегах розрізу виконуються (значення напружень S_{11} та S_{22} близькі до нуля) для всіх розглянутих в обчислювальних експериментах моделях зовнішнього навантаження.

5.4.6.3. Двовісне розтягання $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$

Пластина з розрізом AB , яку жорстко затиснено по кутах, знаходиться під впливом розтягальних зусиль q_1 та q_2 , які прикладено до всіх кромek пластини у відповідності до схеми, наведеної на рис. 5.20.

В роботі виконано ідентифікацію вершин розрізу при таких співвідношеннях амплітуд розтягальних зусиль $q_1 : q_2 - 1:1, 1:2, 1:3$.

На рис. 5.23 наведено розподіли напружень S_{11} та S_{22} у досліджуваній пластині в перерізі $\xi_2 = 0$, що співпадає з лінією розрізу, для випадку зростання розтягальних зусиль q_2 при фіксованому значенні зусиль $q_1 = 0.25$.

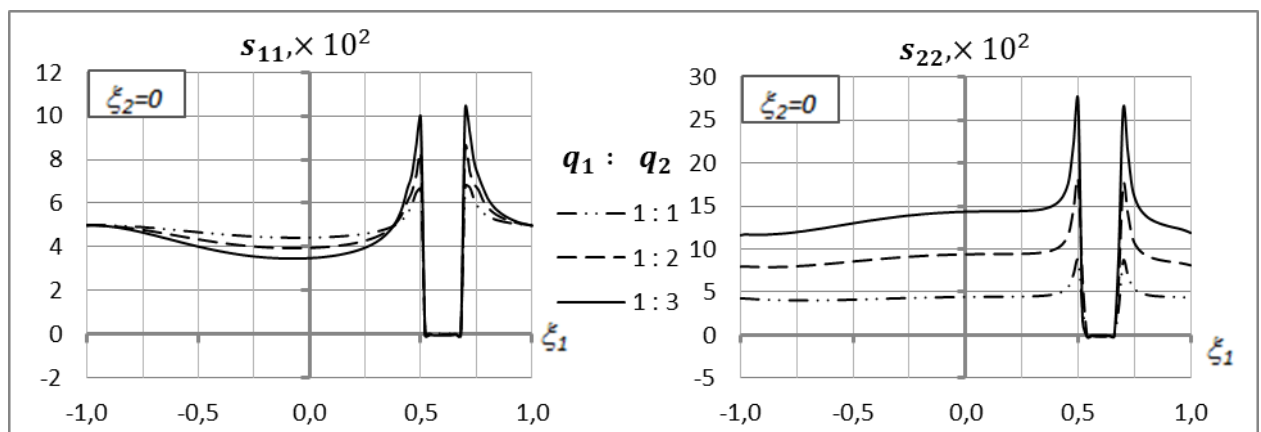


Рис. 5.23 – Розподіл функцій напружень S_{11} та S_{22} в перерізі $\xi_2 = 0$ при двовісному розтяганні з фіксованим значенням розтягального зусилля q_1

З аналізу наведених розподілів витікає:

– у разі зростання розтягальних зусиль q_2 відносно зусиль q_1 спостерігається збільшення напружень S_{11} в центральній частині пластини та біля вершин розрізу. На відміну від розподілу напружень S_{11} при одновісному розтяганні q_2 у даному випадку напруження S_{11} на всьому перерізі $\xi_2 = 0$ мають додатні значення. На лінії розрізу, як і у випадку одновісного розтягання q_2 , задані статичні граничні умови виконуються;

– збільшення величини розтягальних зусиль q_2 відносно зусиль q_1 призводить до пропорційного зростання напружень S_{22} , при цьому характер розподілу в перерізі $\xi_2 = 0$ не змінюється. Порівняння з рис. 5.21, де наведено розподіл напружень S_{22} у випадку одновісного розтягання q_2 , показує, що наявність розтягальних зусиль q_1 дещо знижує величини напружень S_{22} на всій довжині перерізу. Значення стрибків напружень S_{22} в околі вершин розрізу також несуттєво зменшуються, а на лінії розрізу – близькі до нуля.

На рис. 5.24 наведено розподіли напружень S_{11} та S_{22} у разі збільшення зусиль q_1 при фіксованому значенні зусиль $q_2 = 0.25$.

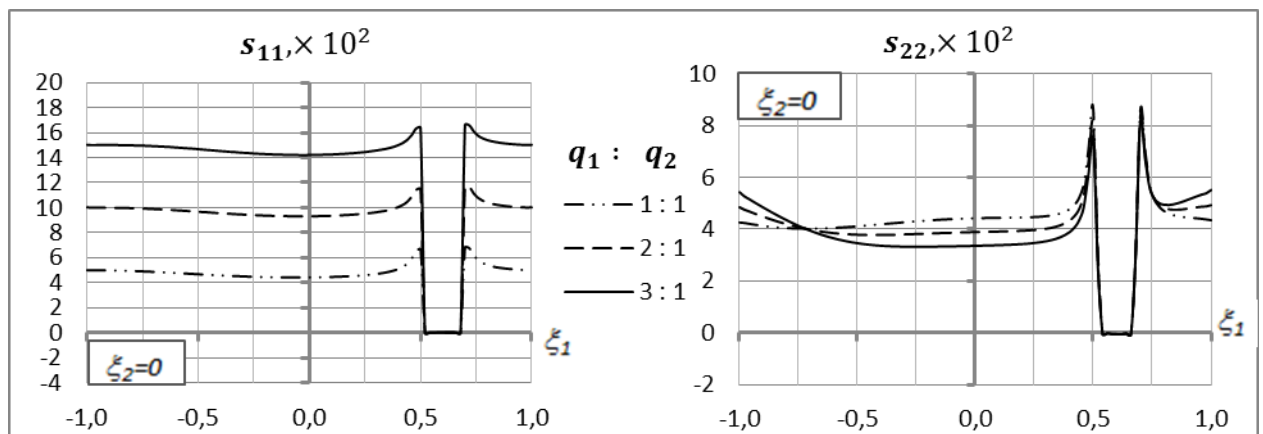


Рис. 5.24 – Розподіл функцій напружень S_{11} та S_{22} в перерізі $\xi_2 = 0$ при двовісному розтяганні з фіксованим значенням розтягального зусилля q_2

Як впливає з аналізу наданих на рис. 5.24 розподілів напружень в пластині з розрізом, яка деформується двовісним розтяганням, при фіксованому значенні зусиль $q_2 = 0.25$ та збільшенні зусиль q_1 спостерігається така поведінка функцій напружень S_{11} та S_{22} :

– збільшення розтягальних зусиль q_1 призводить до пропорційного зростання напружень S_{11} на всьому перерізі $\xi_2 = 0$ за виключенням лінії розрізу $0.5 \leq \xi_2 \leq 0.7$. На лінії розрізу напруження S_{11} залишаються близькими до нуля при всіх розглянутих значеннях зусиль q_1 ;

– характер розподілу напруження S_{22} змінюється несуттєво, незначне зростання напружень спостерігається у центральній частині пластини та в околі вершин розрізу.

У таблиці 5.5 наведено результати ідентифікації вершин розрізу при різних співвідношеннях розтягуючих зусиль q_1 та q_2 .

Як свідчать дані таблиці, зростання розтягальних зусиль обох напрямків призводить до незначного збільшення кількості ітерацій процесу ідентифікації розрізу. У всіх розглянутих випадках співвідношення розтягальних зусиль вдалося виконати ідентифікацію вершин розрізу з заданою точністю.

Таблиця 5.5

Результати ідентифікації вершин розрізу в пластині
при різних співвідношеннях розтягальних зусиль

Співвідношення розтягальних зусиль $q_1 : q_2$	Результати процедури ідентифікації розрізу			
	Вершина А		Вершина В	
	Кількість ітерацій, s	Похибка, δ_A	Кількість ітерацій, s	Похибка, δ_B
1 : 1	5	1.34	4	2.01
1 : 2	6	1.89	6	2.36
1 : 3	7	2.18	7	2.38
2 : 1	7	2.32	6	2.41
3 : 1	9	2.49	7	2.48

Висновки до розділу 5

1. У роботі розвинуто підхід щодо моделювання пластини з лінійним розрізом на основі моделі суцільної пластини з лінією, вздовж якої задано стрибки переміщень та кутів повороту. Визначення стрибків переміщень та кутів повороту відбувається із розв'язання оберненої задачі шляхом задоволення заданих статичних умов на берегах розрізу.

2. Запропонований підхід застосовано щодо уточнення розрахункової скінченно-елементної моделі пластини з математичним розрізом.

3. За допомогою розробленого підходу моделювання розрізів з використанням суцільної конструкції з лінією, яка імітує розріз, розв'язано задачу ідентифікації розрізів у тонкій пластині.

4. Досліджено ефективність запропонованого підходу в залежності від довжини розрізу та місця його розташування в пластині. Аналіз результатів обчислювальних експериментів показав, що з використанням моделі суцільної пластини з лінією можливе виявлення у тонкостінній системі дефектів у вигляді лінійних розрізів.

Вищезазначені результати цього розділу викладено у публікаціях [55, 56, 64-66, 67].

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено створенню теоретичних й алгоритмічних основ числових методів ідентифікації властивостей тонкостінних систем в процесі експлуатації за відомими результатами спостережень за напружено-деформованим станом системи.

В роботі отримано такі висновки:

1. Вперше в рамках нелінійної теорії пластин із використанням методу обернених задач побудовано модель деформування спостережуваної тонкої пластини під дією зосереджених сил невідомих величин, при наявності дефектів матеріалу пластини у вигляді жорстких включень або розрізів, місце розташування та параметри яких підлягають визначенню.

2. Для побудови моделі оберненої задачі застосовано варіаційний підхід, який базується на формулюванні повного функціоналу енергії пластини, до якого приєднується додаткова умова, що визначає близькість обчисленого та спостережуваного станів пластини, а параметри моделі описано за допомогою характеристичних функцій.

3. Для оцінки близькості стану пластини, що визначається за допомогою математичної моделі, та спостережуваного стану обрано метрику, яка використовує найбільш інформативні функції напружено-деформованого стану – тангенціальні та поперечні деформації.

4. Вперше застосовано новий числовий метод та побудовано ітераційний алгоритм, що поєднують скінченно-елементну дискретизацію моделі пластини, лінеаризацію за допомогою методу продовження по параметру навантаження, теорію оптимального розбиття множин та метод Ньютона-Рафсона для визначення параметрів моделі.

5. Розвинуто підхід щодо моделювання розрізу у пластині на основі моделі суцільної пластини з лінією, вздовж якої задані стрибки переміщень та кутів повороту, визначення яких відбувається з розв'язання оберненої задачі шляхом задоволення статичних умов на берегах розрізу.

6. За допомогою розробленого підходу розв'язано задачу ідентифікації розрізів у тонкій пластині та досліджено ефективність підходу в залежності від довжини розрізу та місця його розташування у пластині.

7. Досліджено процес ідентифікації жорстких включень в деформівній тонкій пластині для різних випадків взаємного розташування вказаних дефектів в матеріалі пластини та різних значень їх пружних характеристик.

8. Розглянуто процес деформування тонкої пластини в умовах комбінованого навантаження за участю зосереджених сил, точки прикладання та величини яких визначалися за допомогою запропонованого підходу. На прикладі ідентифікації локальних сил продемонстровано стійкість розробленого алгоритму до похибки вхідних даних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абовский Н. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский., Н. П. Андреев, А. П. Деруга . – М.: Наука. ФизматГИЗ, 1978. – 288 с.
2. Азаров Д. А. Механико-геометрическое моделирование в нелинейной теории упругости / Д. А. Азаров, Л. М. Зубов // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Сер. Естественные науки. - 2016. -№3. - С.5-13.
3. Алифанов О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
4. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. - М.:Машиностроение, 1978. –312 с.
5. Арсенин В.Я. О методах решения некорректно поставленных задач / В.Я. Арсенин. – М., МИФИ, 1973. – 165 с.
6. Арсенин В.Я. О решении некоторых интегральных уравнений I рода типа свертки методом регуляризации / В.Я. Арсенин, В.В. Иванов // Ж. вычисл. мат. и мат. Физ. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 310-321.
7. Баев А.В. Принцип Лагранжа и конечномерная аппроксимация в задаче оптимального обращения линейных операторов / А.В. Баев // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2006. – Т. 7, № 1. – С. 323-336.
8. Бакушинский Л.В. Некорректные задачи / Л.В. Бакушинский, А. В. Гончарский. – М.: Изд. МГУ, 1989. – 200 с.
9. Баранов И.В. Интегральные уравнения для упругого слоя с трещиной произвольной конфигурации и их исследование / И.В. Баранов, О. В. Булгурян, А.О. Ватульян // Вестник ДГТУ. Издательский центр ДГТУ. – 2004. – Т.4. – №3. – С. 257-269.

10. Баранов И.В. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред / И.В. Баранов, А.О. Ватульян, А.Н. Соловьев // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 3. – С. 14-26.
11. Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэрма. – М.: Мир, 1989. – 303 с.
12. Бережницкий Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницкий, М. В. Делявский, В. В. Панасюк. – Киев.: Наукова думка, 1979. – 400 с.
13. Бережницкий Л. Т. О взаимодействии линейных жестких включений и трещин в деформируемом теле / Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук. – Киев.: Наукова думка, 1983. – 288 с.
14. Бернштейн М.Л. Атлас дефектов стали / М. Л. Бернштейн. // М.: Металлургия, 1979. – 188 с.
15. Богачев И. В. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко / И. В. Богачев, А. О. Ватульян, В. В. Дударев, П. А. Лапина, Р. Д. Недин // Изв. Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т.17. – Вып.4. – С. 419-430.
16. Богданов В. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану / В. Богданов, Г. Сулим // Вісник Львівського університету. – 2010. – Серія мех.-мат. – Вип. 73. – С. 192-204.
17. Булычева Е. Ю. Декомпозиционный подход к решению плохо обусловленных задач параметрической идентификации / Е. Ю. Булычева, Ю. Г. Булычев, И. В. Бурлай // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 28-31.
18. Бурлай И. В. Оптимальная обработка результатов измерений с использованием процедур регуляризации / И. В. Бурлай, М. А. Титов // Автоматизация и современные технологии. – 2007. – № 10. – С. 18-20.

19. Бухгейм А. Л. Введение в теорию обратных задач / А. Л. Бухгейм. – Н.: Наука, 1988. – 181 с.
20. Вабищевич П.Н. О решении задачи Коши для уравнений Лапласа в двухсвязной области / П.Н. Вабищевич // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 241, № 6. – С. 1257-1260.
21. Васильев В. В. Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости / В. В. Васильев, С. А. Лурье, В. А. Салов // Физическая мезомеханика. - 2018. - №21 (4). - С.5-12.
22. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. // М.: Наука, 1988. – 549 с.
23. Ватульян А. О. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин / А. О. Ватульян, О. В. Явруян // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, № 4. – С. 714-725.
24. Ватульян А. О. К восстановлению динамической нагрузки, действующей на элемент тонкостенной конструкции / А. О. Ватульян, В. М. Драгилев, Л. Л. Драгилева // Дефектоскопия. – 2000. – №7. – С. 82-87.
25. Ватульян А. О. Идентификация плоских трещин в упругой среде / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического Сотрудничества (ЧЭС). – 2003. – № 1. – С. 23-28.
26. Ватульян А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости / А. О. Ватульян // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 405, № 3. – С. 343-345.
27. Ватульян А. О. Некоторые полувывные алгоритмы реконструкции интерфейсных трещин / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2003. – № 3. – С. 20-25.

28. Ватульян А. О. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред / А. О. Ватульян, И. В. Баранов, А. Н. Сольвьев // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, №3. – С.14-26.
29. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.
30. Ватульян А. О. О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел / А. О. Ватульян // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 422, № 2. – С. 182-184.
31. Ватульян А. О. О вариационном подходе при исследовании обратных коэффициентных задач в теории упругости / А. О. Ватульян // Владикавказский математический журнал. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 3-8.
32. Ватульян А. О. О граничной обратной задаче для конечного упругого тела / А.О. Ватульян, А.И. Козаренко // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2004. – № 3. – С. 34-38.
33. Ватульян А. О. О некоторых проблемах реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругих телах / А. О. Ватульян, В. В. Дударев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, № 4-2. – С. 25-32.
34. Ватульян А. О. О реконструкции плоских трещин в упругом теплопроводном теле с учетом взаимодействия их берегов / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2006. – № 1. – С. 149-160.
35. Ватульян А. О. О реконструкции трещин с взаимодействующими берегами / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев // Дефектоскопия. – 2004. – № 10. – С. 62-69.

36. Ватульян А. О. Об итерационном подходе в обратных задачах теории упругости / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 1. – С. 23-30.
37. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 222 с.
38. Ватульян А. О. Обратные задачи теории трещин в твердых телах / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естесств. науки. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды – 2004. – С. 74-80.
39. Ватульян А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел / А. О. Ватульян // Вестник Самарского государственного университета. – 2007. – № 4. – С. 93-104.
40. Ватульян А. О. Развитие нового метода граничных интегральных уравнений применительно к прямым и обратным задачам динамической теории упругости / А. О. Ватульян, Н. В. Боев, О. В. Ковалев, С. А. Коренский, А. Н. Соловьев, М. А. Сумбатьян, В. М. Шамшин // Информационный бюллетень РФФИ. – 1997 Т. 5, № 1. – С. 219.
41. Ватульян А. О. Разработка методов решения обратных задач теории упругости для тел с дефектами / А. О. Ватульян // Информационный бюллетень РФФИ. – 1995. – Т. 3, № 1. – С. 85.
42. Ватульян А. О. Реконструкция жесткости неоднородной упругой пластины / А. О. Ватульян, И. В. Богачев, О. В. Явруян // Акустический журнал. – 2016. – №3.– С. 369-374.
43. Вестяк В. А. Численно-аналитическое решение обратной коэффициентной задачи термоупругости для пластины / В. А. Вестяк, А. В. Земсков, Н. Н. Эрихман // Вестник Московского авиационного института. – 2009. – Т. 16, № 6. – С. 35.

44. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
45. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 373 с.
46. Ворович И. И. Функциональный анализ / И. И. Ворович, Л. П. Лебедев. – М.: Вузовская книга, 2000. – 316 с.
47. Гасанов А. И. Вычислительная диагностика определения свойств конструкционных материалов / А. И. Гасанов // Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1, № 6. – С. 1-32.
48. Грибова В. В. Решение задачи об изгибе защемленной по контуру пластины с тонким линейным включением методом минимизации погрешности по энергии / В. В. Грибова // Праці Одеського політехнічного університету. – 2012. Вип.1(38). – С. 254-260.
49. Григолюк Э. И. Проблемы нелинейного деформирования / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. – М.: Наука, 1988. – 230 с.
50. Григолюк Э. И. Проблемы построения теории тонких пластин / Э. И. Григолюк, В. Мамай // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. Вип. 3. – С. 56-71.
51. Губенко С. І. Неметаллические включения в стали / С. І. Губенко, С. П. Ошкадеров. – Київ : Наукова думка, 2016 . – 528 с.
52. Гуда О. В. Сучасні моделі та методи розрахунку пластин / О. В. Гуда // Міжвузовський збірник "Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво". – 2011. – Вип.3. – С.109-114.
53. Гук Н. А. Вибір точок спостереження в задачах ідентифікації дефектів в тонкостінній системі / Н. А. Гук, Н. І. Степанова // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання (ІТКМ-2019): Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 20-25 травня 2019, м. Івано-Франківськ. – 2019. – С. 305-308.

54. Гук Н. А. Ідентифікація зосереджених зовнішніх впливів методом обернених задач / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні: Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 27 – 29 березня 2018 року, м. Дніпро. – С. 62.
55. Гук Н. А. Імітація розрізу у тонкостінних системах / Н. А. Гук, Н.И. Степанова // Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2018): Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції, 17-18 травня 2018 р., м. Черкаси. – 2018. – С. 47-49.
56. Гук Н. А. Ідентифікація тріщин у пластинах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2016): Матеріали XIV Міжнародної наукової конференції, 18-20 листопада 2016., м. Дніпро. – 2016. – С. 57-59.
57. Гук Н. А. Идентификация включений в деформируемой пластине / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2014): Матеріали XII Міжнародної наукової конференції, листопад 2014., м. Дніпро. – 2014. – С. 68-70.
58. Гук Н.А. Идентификация внешних воздействий при деформировании тонкостенных оболочек / Н.А. Гук // Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transaction. – 2010. – Vol. 18. – P. 129-134.
59. Гук Н. А. Идентификация геометрических параметров и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2016. – Том 2, № 7 (80). – С.4-9.
60. Гук Н.А. Идентификация жестких включений в тонкой пластине / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Сер.: «Математика, прикладна математика і механіка». – 2015. – Том 82. – С. 47-60.

61. Гук Н. А. Идентификация локального силового воздействия в тонкостенной системе методом обратных задач / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // (MPZIS-2015): Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції, 18-20 листопада 2015, м. Дніпро. – 2015. – С. 60-61.
62. Гук Н. А. Идентификация механических свойств тонкостенных элементов по результатам косвенных измерений / Н. А. Гук, Н. И. Ободан // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 233-243.
63. Гук Н. А. Идентификация точечных силовых воздействий в тонкостенных системах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Зб. наук. пр. «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дн-ськ: Ліра. – 2015. – Вип. 24 – С. 58-72.
64. Гук Н. А. Идентификация трещин в тонких пластинах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Зб. наук. пр. «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дн-ськ: Ліра. – 2017. – Вип. 26 – С. 51-69.
65. Гук Н.А. Моделирование поведения тонкостенной системы с повреждением как обратная задача / Н.А. Гук , Н.И. Степанова // Математическое моделирование и информационные технологии: Материалы 5-й международной конференции, 22-25 марта 2016, Кишинэу. – 2016. – Том 2.– С.94-96.
66. Гук Н. А. Нелинейное деформирование сжато-изогнутой пластины с разрезом / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Вісник Запорізького національного університету. Сер.: «Фізико-математичні науки». – 2016. – №2. – С.89-102.
67. Гук Н. А. Обробка даних спостережень методом обернених задач при діагностуванні приповерхневих тріщин / Н. А. Гук , Н. И. Степанова // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMS-2015): Матеріали XXI Всеукраїнської наукової конференції, 24-25 вересня 2015. – Львів. – С.134-136.

68. Денисов А. М. Обратные и некорректно поставленные задачи / А. М. Денисов, В. И. Дмитриев // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 2005. – № 6. – С.23-30.
69. Денисов А. М. Интегро-функциональные уравнения для решения обратной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения / А. М. Денисов // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 9. – С.1203-1209.
70. Емельянов И. Г. Напряженное-состояние оболочечных конструкций при локальных нагрузках / И. Г. Емельянов, А. В. Кузнецов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – №1. – С. 53-59.
71. Жигалко Ю. П. Обратные задачи изгиба пластин при локальном нагружении / Ю. П. Жигалко // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1981. – Вып.16. – С.75-82.
72. Зайцев Б.Ф. Методика моделирования трещин с контактирующими берегами на основе метода конечных элементов [Текст] / Б. Ф. Зайцев, Н. Г. Шульженко, А. В. Асаенко // Вісник НТУ "ХПІ": Серія "Динаміка та міцність машин". – 2007.– № 22. – С.48-61.
73. Зверяев Е. М. О разложении функции Папковича-Фадля в задаче изгиба пластины / Е. М. Зверяев, М. Д. Коваленко, Д. А. Абруков, А. П. Кержаев // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2019. – № 38. – 28 с.
74. Иванов В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
75. Кабанихин С. И. Прямые и итерационные методы решения обратных и некорректных задач / С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин // Сибирские электронные математические известия. – 2008. – Т. 5. – С.595-608.

76. Капустин С. А. Применение твердотельных конечных элементов в задачах изгиба балок и пластин / С. А. Капустин, Ю. А. Чурилов, А. А. Рябов, В. И. Романов, Д. А. Плакунов // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79. – №1. – С. 76-92.
77. Капцов А. В. Идентификация плоской трещины в упругом теле с помощью инвариантных интегралов / А. В. Капцов, Е. И. Шифрин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 3. – С. 145-163.
78. Карчевский А. Л. Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом / А. Л. Карчевский // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 139-149.
79. Киселева Е. М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения / Киселева Е. М., Шор Н. З. – К.: Наукова думка, 2005. – 562 с.
80. Козлов В. А. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений / В. А. Козлов, В. Р. Мазья, А. В. Фомин // Журн. вычислит. математики и мат. Физики – 1991. – Т. 31, № 1. – С. 64-74.
81. Короткий А. И. Решение ретроспективной обратной задачи для одной нелинейной эволюционной модели / А. И. Короткий, И. А. Цепелев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2003. – Т. 9, № 2. – С. 73-86.
82. Костин В. А. Идентификация поля цилиндрических жесткостей изотропных и ортотропных пластин / В. А. Костин, А. П. Снегуренко // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2001. – № 2. – С. 3-9.

83. Костин В. А. К вопросу оптимизации поиска управляющих параметров при численном решении уравнений колебаний тонкостенной конструкции / В. А. Костин, Е. А. Халкина // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 1996. – № 1. – С.27-31.
84. Костин В. А. К вопросу уточнения внешней нагрузки по заданным деформациям / В. А. Костин, А. П. Снегуренко // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 1999. – № 4. – С.3-8.
85. Костин В. А. Решение обратных задач прочности тонкостенных конструкций градиентным методом с привлечением сопряженных систем / В. А. Костин // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2002. – № 3. – С. 6-9.
86. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: изд. СО АН СССР, 1962. – 68 с.
87. Лазарев Н. П. Производная функционала энергии в задаче о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения / Н. П. Лазарев, Н. В. Неустроева // Сиб. журнал индустр. математики. – 2017. – Т. 20. – № 2(70). С.59-70.
88. Левин В. А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В. А. Левин, Е. М. Морозов, Ю. Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2004 – 408 с.
89. Морозов В. А. О некоторых общих условиях регуляризуемости некорректных вариационных задач / В. А. Морозов // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2001. – Т. 5, № 1. – С.31-40.
90. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. / В. А. Морозов. – М.: Наука, 1987. – 608 с.

91. Немировский Ю. В. Проектирование армированных композитов с заданным набором эффективных теплофизических характеристик и некоторые смежные задачи диагностики их свойств / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Теплофизика и аэромеханика. – 2008. – Т. 15, № 2. – С.291-305.
92. Неустроева Н. В. Производная функционала энергии в задаче о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения / Н. В. Неустроева, Н. П. Лазарев // Сиб. журн. индустр. математ. – 2017. – Т.20. – №2(70). – С.59-70.
93. Ободан Н. И. Идентификация дефектов в деформируемых телах / Н. И. Ободан, А. С. Шульга // Проблемы машиностроения. – 2005. – №1. – С.32-51.
94. Ободан Н. И. Декомпозиционный подход к решению обратных задач деформирования тонкостенных оболочек и пластин / Н. И. Ободан, Н. А. Гук // Вісник ДНУ, серія "Механіка". – Д.: изд. ДНУ. – 2009. – Т. 2, вип.13, №5. – С.102-112.
95. Ободан Н. И. Идентификация внешней нагрузки для формообразования тонкостенных конструкций / Н. И. Ободан, Н. А. Гук // Проблемы машиностроения. – 2009. – Т. 12, № 2. – С. 39-46.
96. Ободан Н. И. Идентификация дефектов в деформируемых телах / Н. И. Ободан, А. С. Шульга // Проблемы машиностроения. – 2005. – №1. – С. 32-51.
97. Ободан Н. І. Вибір формальної моделі оберненої задачі деформівної тонкостінної системи за результатами спостережень / Н. І. Ободан, Н. А. Гук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вып. 11. – С.131-141.

98. Одинок Ю. Г. К определению нагрузок на тонкостенную конструкцию по параметрам ее напряженно-деформированного состояния / Ю. Г. Одинок, А. Ю. Одинок // *Авиационная техника. Изв. ВУЗов.* – 1984. – № 4. – С.53-58.
99. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами [Текст] / В. А. Осадчук. – К.: Наукова думка, 1985. – 221 с.
100. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках / В.В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин // – К.: Наук. Думка, 1976. – 443 с.
101. Пастернак Я. М. Розв'язування методами інтегральних рівнянь задач антиплоского деформування тіл із тонкими стрічковими включеннями. II. Аналіз концентрації та інтенсивності напружень [Текст] / Я. М. Пастернак, Г. Т. Сулим // *Фіз.-хім. мех. матеріалів.* – 2012. – 48, № 6. – С.86-91.
102. Постнов В. А. Использование метода конечных элементов для определения структурных повреждений / В. А. Постнов // *Вестник гражданских инженеров.* – 2004. – № 1. – С.70-76.
103. Постнов В. А. Использование метода регуляризации Тихонова для решения задач идентификации упругих систем / В. А. Постнов // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* – 2010. – № 1. – С.64-71.
104. Раминкас В. Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям / В. Раминкас. – Вильнюс: Мокслас, 1982. – 244 с.
105. Романов В. Г. Асимптотическое разложение решения системы уравнений упругости с сосредоточенной импульсной силой / В. Г. Романов // *Сибирский журнал промышленной математики.* – 2008. – Т. XI, № 3. – С.102-118.

106. Романов В. Г. Обратная задача для уравнений упругости при неизвестной форме импульсного источника / В. Г. Романов // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 417, № 6. – С.746-752.
107. Романов В. Г. Оценка устойчивости решения в двумерной обратной задаче для уравнений упругости / В. Г. Романов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2006. – Т. 12, № 2. – С.152-161.
108. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
109. Самарский А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
110. Сафронов Р. А. Численное решение некоторых задач статического изгиба прямоугольных пластин под действием локальной нагрузки / Р. А. Сафронов // Математика. Механика: Сб. науч. Тр. - Изд-во Саратов. университета, 2009. - 11. - С.133-136.
111. Сергиенко И. В. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, Т. Т. Лебедева, В. А. Рошин. — К.: Наукова думка, 1980. — 76 с.
112. Сергиенко И. В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. – К.: Наукова думка, 2009. – 639 с.
113. Сковорода А. Р. «Реконструкция упругих свойств неоднородного слоя на основе данных о деформировании его поверхности при локальном нагружении. Результаты вычислительного эксперимента» / А. Р. Сковорода // Матем. Моделирование. – 1996. – Т. 8, №5. – С.26-36.

114. Степанова Н. І. Вплив початкового наближення на результат ідентифікації пружних характеристик жорстких включень у тонкій пластині / Н. І. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2018): Матеріали XVI Міжнародної наукової конференції, листопада 2018., м. Дніпро. – 2018. – С. 198-200.
115. Столяров Н. Н. К решению задачи изгиба пластин методом Ричардсона с чебышевским ускорением / Н. Н. Столяров, А. А. Рябов // Сборник Математическая физика. – Куйбышев. – 1976. – С.89-96.
116. Тихонов А. Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 263 с.
117. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 386 с.
118. Тихонов А. Н. О некоторых некорректных задачах математической физики. / А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев. – М.: Наука, 1970. – 110 с.
119. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С.501-504.
120. Товстик П. Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек / П. Е. Товстик // Изв. Саратов. Университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8. – Вып. 3. – С.72-85.
121. Фридман В. М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска / В. М. Фридман // УМН. – 1962. – Т. 17, вып. 3. – С.201-204.
122. Цвелодуб И. Ю. Жесткопластическое включение в упругой среде / И. Ю. Цвелодуб // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1, № 2. – С.100-105.

123. Цвелодуб И. Ю. К определению прочностных характеристик физически нелинейного включения в линейно-упругой среде / И. Ю. Цвелодуб // ПМТФ. – 2000. – Т. 41, №4. – С.178-184.
124. Цвелодуб И. Ю. О разрушении физически нелинейной неоднородной среды в условиях релаксации напряжений во включениях / И. Ю. Цвелодуб // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, № 1. – С. 160-168.
125. Цвелодуб И. Ю. Об изгибе упругих пластин с физически нелинейным включением / И. Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 6. – С.152-157.
126. Цвелодуб И. Ю. Об одной обратной задаче изгиба физически нелинейной неоднородной пластины / И. Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 5. – С.104-107.
127. Цвелодуб И. Ю. Обратная упругопластическая задача для пластин / И. Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 4. – С.186-194.
128. Цвелодуб И. Ю. Плоские задачи для упругой среды с жесткопластическими включениями / И. Ю. Цвелодуб // Физическая мезомеханика. – 2009. – Т. 12, № 5. – С.73-76.
129. Чан Н. Д. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных пластин на основе уточненной теории / Н.Д. Чан, В. В. Фирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – 14(2). – С.23- 32.
130. Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру и наилучшая параметризация / В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

131. Шифрин Е. И. Идентификация конечного числа малых дефектов в анизотропном линейно-упругом теле по результатам одного статического испытания / Е. И. Шифрин, П. С. Шушпанников // Изв. РАН. МТТ. –2015. – № 4. – С.68-81.
132. Шифрин Е. И. О связи между инвариантными интегралами линейной изотропной теории упругости и интегралами, определяемыми принципом взаимности / Е. И. Шифрин // ПММ. –2009. – Т. 73, № 2. – С. 325-334.
133. Щербаков В. В. Существование оптимальной формы тонких жестких включений в пластине Кирхгофа-Лява / В. В. Щербаков // Сиб. Журн.индустр.матем. – 2013. – Т. 16, № 4. – С.142-151.
134. Янчевский И. В. К проблеме восстановления временной зависимости нестационарного воздействия, приложенного к упруго-деформируемому элементу конструкции / И. В. Янчевский // Проблемы машиностроения. – 2015. – Т.18. – № 2. – С.43-54.
135. Янютин Е. Г. Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости (прямая и обратная задачи) / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вісник НТУ ХПІ – 2015. – № 6 (1115). – С.191-200.
136. Ярема Є. Б. Напружений стан пластини з жорсткою еліптичною шайбою та наскрізною прямолінійною тріщиною / Є. Б. Ярема, В. В. Рощот // Матеріали V Міжнар. наук.-техн. конф. "Актуальні задачі сучасних технологій",Тернопіль. – 2016. – С.68-69.
137. Alessandrini G. Stable Determination of an Inclusion in an Elastic Body by Boundary Measurements / G. Alessandrini, M. Di Cristo, A. Morassi, E. Rosset // SIAM J. Math. Anal.– 2014. – V. 46. – P.2692-2729.
138. Alessandrini G. Detecting an inclusion in an elastic body by boundary measurements / G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset // SIAM J. Math. Anal.– 2002. – V. 33. – P.1247-1268.

139. Andrieux S. On the identification of planar cracks in elasticity via reciprocity gap concept / S. Andrieux, A. Ben Abda, H. Bui // C. R. Acad. Sci. Series / – 1997. – Vol. 3, No. 12. – P.431-1438.
140. Artioli E. A stress/displacement Virtual Element method for plane elasticity problems / E. Artioli, S. de Maranda, C. Loradina, L. Patruno // Computer Methods and Applied Mechanics and Engineering. – 2017. – V. 325. – P. 155-174.
141. Bakhyshov F. A. Inverse doubly periodic problem of the theory of bending of a plate with elastic inclusions / F. A. Bakhyshov and V. M. Mirsalimov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2006. – Vol. 47, No. 4. – P.588-595.
142. Banan M. R. Parameter estimation of structures from static response. I: computational aspects / M. R. Banan, K. D. Hjelmstad // Journal of Structural Engineering. – 1994. – V. 120 (11). – P.3243-3258.
143. Bilotta A. Numerical size estimates of inclusions in Kirchhoff–Love elastic plates / A. Bilotta, A. Morassi, E. Rosset, E. Turco, S. Vessella // Int.J. of Solids and Structures. – 2019. – V. 168. – P.58-72.
144. Bonnet M. Inverse problem in elasticity / M. Bonnet, A. Constantinescu // Inverse Probl. – 2005. – T. 21, № 2. – P.1-50.
145. Burger M. A level set method for inverse problems / M. Burger // Inverse Probl. – 2001. – T. 17, № 5. – P.1327-1355.
146. Cornwell P. Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures / P. Cornwell, S. W. Doebling, C. R. Farrar // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – V.224 (2). – P.359-374.
147. Di Cristo M. Doubling inequalities for anisotropic plate equations and applications to size estimates of inclusions / M. Di Cristo, C.-L. Lin, A. Morassi, E. Rosset, S. Vessella, J.-N. Wang // Inverse Problems. – 2013. – V. 29 – P.1-17.

148. Dolbow J. An efficient finite element method for embedded interface problems [Text] / J. Dolbow, I. Harari // International Journal for Numerical Methods in Engineering.– 2009.– Vol. 78, iss. 2.– P.229-252.
149. Dovbnya K.M. Studies on the Stress State of an Orthotropic Shell of Arbitrary Curvature with the Through Crack Under Bending Loading [Text] / K.M. Dovbnya, N.A. Shevtsova // Strength of Materials. – 2014. – Vol. 46, iss. 3. – P.345-349.
150. Endo M. Study on an alternative deformation concept for the Timoshenko beam and Mindlin plate models / M. Endo // Intern. J.Engineering Sci. – 2015. – Vol. 7. – P.32-48.
151. Goldstein R. Application of invariant integrals to the problems of defect identification / R. Goldstein, E. Shifrin, P. Shushpannikov // Intern. J. Fract. – 2007. – V. 147, № 1-4. – P.45-54.
152. Guo M. Identification of imperfections in thin plates based on the modified potential energy principle / M. Guo, H. Zhong // Mechanics Research Communications. –2016. – V.72. – P.16-23.
153. Guk N. Identification of geometrical parameters of the thin-walled system with the use of decoupling approach / N.Guk // Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transaction. – 2009. – Vol. 17. – P.111-118.
154. Inoue H. Review of inverse analysis for indirect measurement of impact force / H. Inoue, J. Harrigan, S. Reid // Appl. Mech.Rev. – 2001. – V. 54(6). – P. 503-524.
155. Hjelmstad K. D. Damage detection and assessment of structures from static response / K. D.Hjelmstad, S. Shin // Journal of Engineering Mechanics. – 1997. – V. 123(6). – P.568-576.
156. Jackowska-Strumillo L. On numerical solution of shape inverse problem / L. Jackowska-Strumillo, J. Sokolowski, A. Zochowski // Comp.Optim.Appl. – 2002. – V.23, N.2. – P.231-255.

157. Kaptsov A. V. Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis / A. Kaptsov, E. Shifrin // *Inv.Probl.* – 2017. – T. 34, № 3. – P.953-976.
158. Karchevsky A. L. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media / E. Kurpinar, A. L. Karchevsky // *Inverse Probl.* – 2004. – T. 20, № 3. – P. 953-976.
159. Karchevsky A. L. Properties of the misfit functional for a nonlinear one-dimensionanal coefficient hyperbolic inverse problem / A. L. Karchevsky // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems, VSP, The Netherlands.* – 1997. – V. 5, № 2. – P. 139-163.
160. Khodadad M. Inclusion indefication by inverse application of boundary element method, genetic algorithm and conjugate gradient method / M. Khodadad, M. Dashti-Ardakani // *Am.J.Appl.Sci.* – 2008. – V. 5, № 9. – P. 1158-1166.
161. Lee H. S. A new spatial regularization scheme for the indefication of the geometric shape of an inclusion in a finite body / H. S. Lee, Y. H. Kim, C. J. Park, H. W. Park // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1999. – V.46, N.7. – P. 973-992.
162. Lee U. A structural damage identification method for plate structures / U. Lee, J. Shin // *Engineering Structures.* – 2002. – V.24. – P. 177-188.
163. Lenkovs'kyi T. M. Conditions of self-simslarity of edge transverse shear cracks in a square plate / T. M. Levkovs'kyi, P. S. Kun, B. Dudda, E. Kharchenko // *Materials science.* – 2018. – Vol. 54. – No. 3. – P. 361- 367.
164. Liang Y. Material point method with enriched shape function for crack problems / Y. Liang, T. Benedek, X. Zhang, Y. Liu // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 2017. – V.322. – P. 541-562.

165. Marinov T. T. An inverse problem for estimation of bending stiffness in Kirchhoff–Love plates / T. T. Marinov, R. S. Marinova // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2013. –V. 65 (3). – P. 512-519.
166. Morassi A. Detecting general inclusions in elastic plates / A. Morassi, E. Rosset, S. Vessella // *Inverse Problems*. – 2009. –V. 25. – P. 1-14.
167. Morassi A. Detection of a rigid inclusion in an elastic body: uniqueness and stability /A. Morassi, E. Rosset // *Proceedings of the 22nd IFIP TC7 Conference, Torino*. – 2005. – P. 279-284.
168. Morassi A. Estimating area of inclusions in anisotropic plates from boundary data / A. Morassi, E. Rosset, S. Vessella // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 6. – 2013. – P. 501-515.
169. Morassi A. Recent results about the detection of unknown boundaries and inclusions in elastic plates / A. Morassi, E. Rosset, S. Vessella // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* – 2013. – V. 21 – P. 311-352.
170. Morassi A. Stable determination of an inclusion in an inhomogeneous elastic body by boundary measurements / A. Morassi, E. Rosset, S. Vessella // *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*. – 2016. –Vol. 48. – P. 101-120.
171. Morassi A. Stable determination of a rigid inclusion in an anisotropic elastic plate / A. Morassi, E. Rosset, S. Vessella // *SIAM J. Math. Anal.*. – 2012. – V. 3 (44). – P. 2204-2235.
172. Morassi A. Unique determination of unknown boundaries in an elastic plate by one measurement / A. Morassi, E. Rosset // *Comptes Rendus Mécanique*. – 2010. – V. 338. – P. 450-460.
173. Morozov N. The influence of defects and inclusions on capacity for work of thin plates / N. Morozov, Y. Petrov, B. Semenov // *Int.Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics ICTAEM* – 2018. – P. 268-272.

174. Nguyen-Hoang S. A new polyhedral element for the analysis of hexahedral-dominant finite element models and its application to nonlinear solid mechanics problems / S. Nguyen-Hoang, D. Sohn, H.- G. Kim // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2009. – V. 197. – P. 1-14. – 2017. – V. 324. – P. 248-277.
175. Nedin R. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress / R. Nedin, V. Dudarev, A. Vatulyan // *Engineering Structures*. – 2017. – V. 151, P. 391-405.
176. Park H.W. Determination of optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua / H.W. Park, S. Shin, H.S. Lee // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 2001. – V. 51. – P. 1211-1230.
177. Sanayei M. Assessment of structures using static test data / M. Sanayei, O. Onipede // *AIAA Journal*. – 1991. – V. 29 (7). – P. 1156-1179.
178. Shifrin E. I. Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements / E. I. Shifrin, P. S. Shushpannikov // *Int. J. Solid Struct.* – 2011. – Vol.48. – P. 1154-1163.
179. Shifrin E. I. Identification of a multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis / E. I. Shifrin, P. S. Shushpannikov // *Inv. Probl.* – 2017. – Vol.34. – N.1. DOI: 10.1088/1361-6420/aa9d74.
180. Shifrin E. I. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional / E. I. Shifrin, P. S. Shushpannikov // *Inv. Probl.* – 2010. – Vol.26. – N.5. 055001.
181. Shifrin E. I. Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements / E. I. Shifrin, P. S. Shushpannikov // *Int. J. of Solid and Structures*. – 2013. – Vol. 50. – P. 3707-3716.

182. Son N.- H. A new polyhedral element for the analysis of hexahedral-dominant finite element models and its application to nonlinear solid mechanics problems / N.- H. Son, Dongwoo Sohn, H.- G. Kim // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2017. – V. 32.– P. 248-277.
183. Song J. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture [Text] / J. Song , H. Wang , T. Belytschko // *Comput. Mech.* – 2008. – Vol. 42. – P. 239-250.
184. Stavroulakis G. E. Inverse and Crack identification problems in Engineering Mechanics / G. E. Stavroulakis. – Dordrech: Kluwer Academic Publishers– 2001. – 223 p.
185. Tautenhahn U. Tikhonov regularization and a posteriori rules for solving nonlinear ill posed problems / U. Tautenhahn, Q. Jin // *Inverse Probl.* 2003. – V. 19. – P. 1-21.
186. Tsvelodub I. Yu. Inverse problem of deformation of a physically nonlinear inhomogeneous medium / I. Yu. Tsvelodub // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2002. – T. 43, № 3. – P. 445-447.
187. Uno H. A family of rules for parameter choice in Tikhonov regularization of ill-posed problems with inexact noise level / Håmarik Uno, Palm Reimo, Raus Toomas // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2012. — Volume 236. — P. 2146-2157.
188. Vrabie M. Comparative analysis of bending theories for isotropic plates. Case study / M. Vrabie, S. Baetu // *Universitatea Tehnică «Gheorghe Asachi» din Iași*. –2013. – T. LIX (LXIII). – Fasc. 3. – P.133-144.
189. Wen P. H. A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method [Text] / P. H. Wen, M. H. Aliabadi // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – Vol. 48, Iss. 78. – P. 1171-1179.

ДОДАТКИ

Додаток А

Покажемо, що задачу B може бути зведено до задачі знаходження сідлової точки функціоналу (3.8).

Передусім зазначимо, що задача B має розв'язок. Дійсно, оскільки $\tilde{H}$ – замкнута, обмежена, опукла множина гільбертова простору $L_{2\Omega}$, а функціонал $\tilde{h}(U(X), H(X), \psi(X))$ – лінійний (а отже, опуклий), безперервний на цій множині, то в силу теореми Вейерштрасса [19], функціонал $\tilde{h}(U(X), H(X), \psi(X))$ досягає на множині $\tilde{H}$ своєї нижньої грані.

Розглянемо задачу C .

Задача C . Для будь-якої фіксованої вектор-функції $\psi_*(X)$, $\psi_*(X) \in \overline{\psi}$ знайти вектор-функцію $H_*(X)$, $H_*(X) \in \tilde{H}$, таку, що

$$\tilde{h}(H_*(X), \psi_*(X)) = \min_{H(X) \in \tilde{H}} \tilde{h}(H(X), \psi(X)). \quad (\text{A.1})$$

Теорема 1: Якщо пара $(H_*(X), \psi_*(X))$ є сідловою точкою функціонала Лагранжа (3.8), то вектор-функція $H_*(X)$ є розв'язком задачі B .

Доведення: За умовою пара $(H_*(X), \psi_*(X)) \in H \times \Lambda$ є сідловою точкою функціонала Лагранжа (3.8), тому

$$\begin{aligned} J(U(X), H_*(X)) + \int_{\Omega} \varphi_0(X) \left(\sum_{n=1}^N H_{*n}(X) - 1 \right) d\Omega + \sum_{p=1}^P \lambda_p \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega &\leq \\ \leq J(U(X), H_*(X)) + \int_{\Omega} \varphi_0^*(X) \left(\sum_{n=1}^N H_{*n}(X) - 1 \right) d\Omega + \sum_{p=1}^P \lambda_p^* \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega &\leq \\ \leq J(U(X), H(X)) + \int_{\Omega} \varphi_0^*(X) \left(\sum_{n=1}^N H_n(X) - 1 \right) d\Omega + \sum_{p=1}^P \lambda_p^* \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega, & \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

для $\forall H(X) \in \check{H}$, $\psi(X) \in \bar{\psi}$, $i, j = 1, 2$.

Покажемо, що $H_*(X) \in \check{H}$. З лівої частини нерівності (A.2) при $\varphi_0(X) = \varphi_0^*(X)$ маємо:

$$\sum_{p=1}^P (\lambda_p^* - \lambda_p) \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega \geq 0$$

при будь-яких $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in E_N$, що можливе тільки якщо

$$\int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega = 0, \quad p = 1, \overline{N}. \quad (\text{A.3})$$

Далі, при $\lambda_p = \lambda_p^*$, $p = 1, \overline{N}$, з лівої нерівності (A.2) отримуємо:

$$\int_{\Omega} (\varphi_0^*(X) - \varphi_0(X)) \left(\sum_{n=1}^N H_{*n}^*(X) - 1 \right) d\Omega \geq 0$$

при будь-яких $\varphi_0(X) \in L_{2\Omega}$, що є можливим тільки у випадку, якщо

$$\sum_{n=1}^N H_{*n}^*(X) = 1. \quad (\text{A.4})$$

Таким чином, показано, що $H_*(X) \in \check{H}$.

З (A.3) та (A.4) випливає, що

$$\sum_{p=1}^N \lambda_p^* \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{\Omega} \varphi_0^*(X) \left(\sum_{n=1}^N H_{*n}^*(X) - 1 \right) d\Omega = 0. \quad (\text{A.6})$$

Тоді, з урахуванням правої нерівності в (A.2) та рівностей (A.5), (A.6), при будь-якому $H(X) \in \check{H}$ матимемо:

$$\begin{aligned} J(U(X), H_*(X)) &\leq J(U(X), H(X)) + \\ &+ \int_{\Omega} \varphi_0^*(X) \left(\sum_{n=1}^N H_{*n}^*(X) - 1 \right) d\Omega + \sum_{p=1}^N \lambda_p^* \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega = J(U(X), H(X)), \end{aligned}$$

тобто, $J(U(X), H_*(X)) = \min_{H(X) \in \check{H}} J(U(X), H(X))$. Теорему доведено.

Лемма 1. Для того, щоб пара $(H_*(X), \Psi_*(X)) \in H \times \Lambda$ була сідловою точкою функціоналу (3.8) необхідно і достатньо існування такої, відмінною від тотожного нуля, вектор-функції $\Psi_*(X)$, щоб:

1. $h(H_*(X), \Psi_*(X)) \leq h(H(X), \Psi_*(X)), H(X) \in \bar{H}$;
2. $\sum_{n=1}^N H_{*n} = 1, \int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega = 0, \quad i, j = 1, 2.$

Теорема 2. Для того, щоб вектор-функція $H_*(X)$ була розв'язком задачі B , необхідно і достатньо існування такої, відмінною від тотожного нуля, вектор-функції $\Psi_*(X)$, щоб:

1. Вектор-функція $H_*(X)$ була розв'язком задачі C ;
2. Задовольнялися рівності (3.5), (3.6).

Доведення:

Достатність: Достатність умов теореми 2 випливає з теореми 1 та леми 1.

Необхідність: Нехай $H_*(X)$ – оптимальний розв'язок задачі B , тобто:

$$J(U(X), H_*(X)) \leq J(U(X), H(X)), \quad \forall H(X) \in \check{H}. \quad (\text{A.7})$$

Припустимо, що $H_*(X)$ не є оптимальним розв'язком задачі C при фіксованому $\Psi(X) = \Psi_*(X)$. Тоді в силу того, що задача C при кожному фіксованому $\Psi(X)$ має розв'язок, при $\Psi(X) = \Psi_*(X)$ знайдеться таке $\hat{H}(X) \in H$, при якому будуть задовольнятися нерівності (3.5), (3.6), тобто $\hat{H}(X) \in \check{H}$, і

$$h(\hat{H}(X), \Psi_*(X)) \leq h(H_*(X), \Psi_*(X)).$$

Але в такому випадку $J(U(X), \hat{H}(X)) \leq J(U(X), H_*(X))$, що суперечить сформульованій умові (A.7). Теорему доведено.

З теореми 2 очевидним є наслідок.

Наслідок. Задача B є рівносильною такій задачі:

Знайти вектор-функції $H_*(X) \in \bar{H}$ та $\Psi_*(X) \in \bar{\Lambda}$ такі, що

$$h(H_*(X), \Psi_*(X)) = \min_{H(X) \in H} h(H(X), \Psi_*(X)),$$

$$\int_{\Omega} (\sigma_p(H(X)) - \sigma_p^*) d\Omega = 0, \quad p = \overline{1, N},$$

$$\sum_{n=1}^N H_{*n} = 1.$$

Побудуємо розв'язок сформульованої задачі. Для цього спочатку переформулюємо задачу C таким чином:

необхідно мінімізувати

$$h(H(X), \Psi(X)) = \int_{\Omega} \sum_{n=1}^N (Y_n(U(X)) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n) H_n(X) d\Omega -$$

$$- \int_{\Omega} \varphi_0(X) d\Omega - \sum_{n=1}^N \lambda_n \sigma_n^*, \quad \forall \Psi(X) \in \overline{\Lambda} \quad (\text{A.8})$$

за умов

$$0 \leq H_n \leq 1, \quad n = \overline{1, N}, \quad (\text{A.9})$$

де $Y_n(U(X))$ – функція стану системи, яка формується для кожної оберненої задачі окремо з доданків функціоналу (2.25), які залежать від відповідних $H^d(X)$, $d = \overline{1, 3}$.

Є очевидним, що

$$\min h(H(X), \Psi(X)) = - \int_{\Omega} \varphi_0(X) \cdot d\Omega - \sum_{n=1}^N \lambda_n \sigma_n^* +$$

$$+ \int_{\Omega} \sum_{n=1}^N \min_{0 \leq H_n(X) \leq 1} (Y_n(U(X)) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_{ij_n}) H_n(X) d\Omega$$

Тоді оптимальний розв'язок задачі C матиме вигляд:

$$H_{*n}(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Y_n(U(X)) + \varphi_0(X) + \lambda_n \varepsilon_n > 0 \\ 1, & \text{якщо } Y_n(U(X)) + \varphi_0(X) + \lambda_n \varepsilon_n < 0 \\ \text{будь-яке число} \in [0, 1], & \text{якщо } Y_n(U(X)) + \varphi_0(X) + \lambda_n \varepsilon_n = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.10})$$

Тепер з усіх $\psi(X) \in \overline{\Psi}$ необхідно, у відповідності до наслідку з теореми 2, вибрати такі $\psi_*(X) \in \overline{\Psi}$, щоб відповідні їм $H_{*n}(X)$, які було отримано за

формулою (A.10), були характеристичними функціями множин Ω_n^* , $n = \overline{1, N}$, $X \in \Omega$ та задовольняли умовам (3.5), (3.6), тобто

$$\forall n = \overline{1, N}, X \in \Omega$$

$$H_{*n}(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n > 0, \text{ тоді } X_n \notin \Omega_n^* \\ 1, & \text{якщо } Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n = 0, \text{ тоді } X_n \in \Omega_n^* \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$$\text{і } \text{mes}(X \in \Omega: Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n < 0) = 0.$$

$$\text{Або } \forall n = \overline{1, N}, X \in \Omega$$

$$H_{*n}(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n > 0, \text{ тоді } X_n \notin \Omega_n^* \\ 1, & \text{якщо } Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n < 0, \text{ тоді } X_n \in \Omega_n^* \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{і } \text{mes}(X \in \Omega: Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n = 0) = 0. \quad (\text{A.13})$$

З леми 1 та теореми 2 випливає, що пара $(H_*(X), \psi_*(X))$, яку побудовано за формулами (A.11) або (A.12) і яка задовольняє умовам (3.5), (3.6), є сідловою точкою функціоналу Лагранжа (3.8).

Порівнюючи (A.11) і (A.12) можна зробити висновок, що вектор $H_*(X)$, компоненти якого визначаються за цими формулами, здійснює одне й теж розбиття множини Ω на $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*)$, різною є лише форма запису умови належності точки X_n підмножині Ω_n^* , $n = \overline{1, N}$. Тому вирази (A.11) та (A.12) є різними формами запису однієї і тієї ж сідлової точки $(H_*(X), \psi_*(X))$.

Вираз для компонент вектора $H_*(X)$ може бути записано в компактному вигляді через функцію $\text{sign}(\cdot)$:

$$H_{*n}(X) = \frac{1}{2} \{1 - \text{sign}(Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n)\}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (\text{A.14})$$

Умову $\text{mes}(X \in \Omega: Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n = 0) = 0$ будемо називати умовою сильної регулярності функціоналу (A.8).

Якщо підставимо вираз для $H_*(X)$ з (A.14) в рівності (3.5), (3.6), отримаємо для $X \in \Omega$ систему для визначення $\varphi_0(X)$ і λ_n , $n = \overline{1, N}$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \text{sign}(Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n) = N - 2 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sigma_{ij_n} \cdot \text{sign}(Y_n(U) + \varphi_0(X) + \lambda_n \sigma_n) d\Omega = \sum_{p=1}^P \sigma_p^* - 2\sigma_p^*, n = \overline{1, N} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Далі, якщо виконується умова

$$\text{mes } R = 0, \quad R = \left\{ X \in \Omega : Y_i(U) - Y_j(U) = \text{const}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N} \right\} \quad (\text{A.17})$$

тоді справедливе таке твердження.

Твердження: Якщо виконується умова (A.17), то множини оптимальних розв'язків задач A і B співпадають.

Доведення: Є очевидним, що $\overline{H} \subset \check{H}$, причому $\overline{H}$ складається з граничних точок множини $\check{H}$.

Припустимо, що $H_{**}(X)$ є оптимальним розв'язком задачі A . В такому разі

$$J(U(X), H_{**}(X)) \leq J(U(X), H(X)) \quad \forall H(X) \in \overline{H}.$$

Якщо $H_*(X)$ – оптимальний розв'язок задачі B , тоді

$$J(U(X), H_*(X)) \leq J(U(X), H(X)) \quad \forall H(X) \in \check{H}.$$

З того, що $\overline{H} \subset \check{H}$, випливає, що

$$J(U(X), H_*(X)) \leq J(U(X), H_{**}(X)). \quad (\text{A.18})$$

Враховуючи виконання умови сильної регулярності для функціоналу (A.8) та вигляд оптимального розв'язку (A.10) для задачі C , можна стверджувати, що оптимальний розв'язок задачі B досягається на границі множини $\check{H}$, а тому $H_*(X) \in \overline{H}$. Тоді

$$J(U(X), H_{**}(X)) \leq J(U(X), H_*(X)). \quad (\text{A.19})$$

З (A.18) и (A.19) випливає, що $J(U(X), H_{**}(X)) = J(U(X), H_*(X))$.

Твердження доведене.

Таким чином, показано, що задачу A може бути зведено до відшукування сідлової точки функціонала Лагранжа (3.8). При цьому перша компонента визначається за формулою (A.14), а друга - в результаті розв'язання системи (A.15) - (A.16). Сідлова точка функціоналу (3.8) визначає значення характеристичних функцій оберненої задачі, а обернена задача є коректною.

Додаток Б

Список публікацій за темою дисертації і відомості про апробацію результатів дисертації

Праці, у яких опубліковано основні наукові результати

1. Гук Н. А. Идентификация геометрических параметров и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Прикладная математика. – 2016. – Том 2. – № 7 (80). – С.4-9. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.64395.
2. Гук Н. А. Ідентифікація жорстких включень у тонкій пластині / Н. А. Гук, Н. І. Степанова // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Сер.: «Математика, прикладна математика і механіка». – 2015. – Том 82. – С. 47-60.
3. Гук Н. А. Идентификация точечных силовых воздействий в тонкостенных системах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Зб. наук. пр. «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дн-ськ: Ліра. – 2015. – Вип. 24 – С. 58-72.
4. Гук Н. А. Нелинейное деформирование сжато-изогнутой пластины с разрезом / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Вісник Запорізького національного університету. Сер.: «Фізико-математичні науки». – 2016. – №2. – С. 89-102.
5. Гук Н. А. Идентификация трещин в тонких пластинах / Н. А. Гук, Н.И. Степанова // Зб. наук. пр. «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дн-ськ: Ліра. – 2017. – Вип. 26 – С. 51-69.

Праці апробаційного характеру

1. Гук Н. А. Идентификация включений в деформируемой пластине / Н. А. Гук, Н.И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2014): Матеріали XII Міжнародної наукової конференції, листопад 2014., м. Дніпро. – 2014. – С. 68-70.
2. Гук Н. А. Обработка данных спостережень методом обернених задач при діагностуванні приповерхневих тріщин / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMS-2015): Матеріали XXI Всеукраїнської наукової конференції, 24-25 вересня 2015. – Львів. – С. 134-136.
3. Гук Н. А. Идентификация локального силового воздействия в тонкостенной системе методом обратных задач / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2015): Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції, 18-20 листопада 2015., м. Дніпро. – 2015. – С. 60- 61.
4. Гук Н. А. Моделирование поведения тонкостенной системы с повреждением как обратная задача / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Математическое моделирование и информационные технологии: Материалы 5-й международной конференции, 22-25 марта 2016, Кишинэу. – 2016. – Том 2.– С. 94-96.
5. Гук Н. А. Ідентифікація тріщин у пластинах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2016): Матеріали XIV Міжнародної наукової конференції, 18-20 листопада 2016., м. Дніпро. – 2016. – С. 57-59.

6. Гук Н. А. Ідентифікація зосереджених зовнішніх впливів методом обернених задач / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні: Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 27 – 29 березня 2018 року, м. Дніпро. – С. 62.
7. Гук Н. А. Імітація розрізу у тонкостінних системах / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Інформаційні технології в освіті, науці і техніці (ІТОНТ-2018): Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції, 17-18 травня 2018 р., м. Черкаси. – 2018. – С. 47-49.
8. Степанова Н. І. Вплив початкового наближення на результат ідентифікації пружних характеристик жорстких включень у тонкій пластині / Н. І. Степанова // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2018): Матеріали XVI Міжнародної наукової конференції, листопада 2018., м. Дніпро. – 2018. – С. 198-200.
9. Гук Н. А. Вибір точок спостереження в задачах ідентифікації дефектів в тонкостінній системі / Н. А. Гук, Н. І. Степанова // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання (ІТКМ-2019): Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 20-25 травня 2019, м. Івано-Франківськ. – 2019. – С. 305-308.