Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ГРИНЕВИЧ АЛІНА АНДРІЇВНА

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ П'ЄЗОЕЛЕМЕНТІВ З ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМИ МІЖФАЗНИМИ ТРІЩИНАМИ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла, фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

________________ А.А. Гриневич

Науковий керівник: Лобода Володимир Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро – 2018

АНОТАЦІЯ

Гриневич А. А. Особливості деформування кусково-однорідних п'єзоелементів з електропровідними міжфазними тріщинами. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» (фізико-математичні науки). – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2018.

Елементи конструкцій, які виготовлені з п'єзоактивних матеріалів, знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Особливого розповсюдження набули п'єзоактивні композитні матеріали, які відзначаються легкістю, міцністю, надійністю та стійкістю до впливу навколишнього середовища. Широке застосування таких матеріалів обумовлює можливість дії на них різних видів навантажень: механічних, електричних, магнітних та ін. Але як правило, руйнування таких матеріалів зумовлене наявністю дефектів, зокрема тріщин, на межі поділу матеріалів, що мають різні властивості. Такі тріщини називаються міжфазними.

Побудові аналітичних методів розв'язання задач для міжфазних тріщин у п'єзоактивних матеріалах під дією механічних та електричних навантажень присвячено значну кількість робіт. Однак у більшості з них використовується модель «відкритої» тріщини (класична модель), яка приводить до фізично нереальної осцилюючої особливості поблизу її вершин. Більш близька до реальності контактна модель у зазначених біматеріалах під дією різних фізико-механічних полів вивчена поки що недостатньо, особливо коли тріщина є електрично зарядженою та електропровідною. Також особливу увагу слід звернути на появу нових п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів, для яких міжфазні тріщини у рамках контактної моделі практично не досліджено. Таким

чином, вивчення поведінки міжфазної тріщини в п’єзоелектричному та п’єзоелектричному/п’єзомагнітному біматеріалах під дією механічних, електричних і магнітних навантажень є актуальним і становить певний науковий і практичний інтерес.

Метою даної дисертаційної роботи є розвиток аналітичних методів розв’язку плоских задач для електродованої електрично зарядженої міжфазної тріщини з зонами контакту її берегів у п’єзоелектричних та п’єзоелектричних/п’єзомагнітних біматеріалах під дією механічних, електричних і магнітних навантажень. Для побудови математичних моделей використані відомі методи механіки деформівного твердого тіла п'єзоактивних матеріалів; аналітичні розв’язки будувалися за допомогою апарату кусково-голоморфних вектор-функцій і розв’язків задач лінійного спряження.

У роботі одержано низку нових результатів, серед яких слід відзначити наступні:

- розв’язано плоску задачу для електропровідної тріщини на межі поділу двох п’єзоелектричних матеріалів у рамках класичної моделі та моделі з контактною зоною біля однієї з вершин під дією віддаленого механічного навантаження та електричного потоку на нескінченності, а також електричного заряду, заданого на берегах тріщини. З використанням представлень компонентів електромеханічного стану через кусково-аналітичні функції сформульовано задачі лінійного спряження, для яких дано точні розв’язки. Сформульовано та розв’язано трансцендентне рівняння для визначення відносної довжини зони контакту, а також отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності (КІ) електромеханічних величин;

- уперше розв’язано задачу для електродованої магнітнопроникної тріщини з зоною контакту на межі поділу двох п’єзоелектричних/п’єзомагнітних матеріалів під дією елетро-магнітно-механічного навантаження на нескінченності з урахуванням електричного заряду на її берегах. Знайдено величини, необхідні для побудови всіх електромеханічних полів в околі тріщини, шляхом побудови та розв’язання задач лінійного спряження Гільберта та неоднорідної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана. Також отримано співвідношення для обчислення відносної довжини зони контакту, аналітичні вирази для напружень та електричного поля;

- уперше розглянуто електро- та магнітнопровідну міжфазну тріщину з зоною контакту в п'єзоелектричному/п'єзомагнітному біматеріалі. З цією метою було сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана, яку розв'язано аналітично. Досліджено залежності відносної довжини зони контакту та КІ від інтенсивностей механічного навантаження, магнітного та електричного полів, запропоновано підхід до визначення параметрів руйнування;

- проілюстровано суттєвий вплив електричного заряду тріщини на довжину зони контакту, електро-магнітно-механічні поля в околі тріщини та параметри її руйнування.

У першому розділі дисертації наведено огляд літератури, присвяченої дослідженню тріщин в однорідних тілах, міжфазних тріщин в ізотропних, п'єзоелектричних і п'єзоелектричних/п'єзомагнітних біматеріалах, визначено невирішені питання та зазначено необхідність проведення подальших досліджень з розвитку аналітичних методів розв'язку плоских задач для міжфазної тріщини із зонами контакту її берегів.

У другому розділі розглянута задача для класичної моделі тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією віддаленого електромеханічного навантаження. Тріщина вважалася електродованою, тобто її береги розглядались як електричнопровідні. Крім того, на тріщині був заданий сумарний заряд, а також задавалось електромеханічне навантаження на нескінченності. З застосуванням аналітичного підходу, що базується на представлені електромеханічних факторів через кусково-аналітичні функції, було отримано точний розв'язок цієї задачі у вигляді досить простих аналітичних формул. Тобто були знайдені компоненти напружень та електричного поля вздовж інтерфейсу, стрибок електричного зміщення на включенні, а також розкриття тріщини. З аналітичного розгляду результатів та візуалізації даних видно виникнення осцилюючої особливості шуканих факторів в вершинах тріщини. Ця особливість призводить до фізично нереального взаємного проникнення берегів тріщини. Для більшості варіантів електромеханічних полів зони проникнення є дуже малими та їх можна не враховувати, а для деяких видів навантаження вони є значними, і саме в таких випадках слід використовувати інші моделі тріщини. Тому в цьому розділі було розглянуто тріщину з контактною зоною. З аналітичного аналізу результатів і візуалізації даних видно, що як віддалене електричне поле, так і сумарний заряд тріщини суттєво впливають на довжину зони контакту та електромеханічні характеристики в околі тріщини. При цьому вказані фактори можуть привести до виникнення значних зон контакту берегів тріщини навіть при відсутності полів зовнішніх зсувних напружень.

У третьому розділі розглянута плоска задача для біматеріальної п’єзоелектромагнітної площини в припущенні, що на деякому відрізку границі розділу матеріалів порушено ідеальний зв’язок між матеріалами, тобто цей відрізок являє собою тріщину, частина якої може бути закрита, а частина відкрита. Біматеріальна площина навантажена на нескінченності рівномірними нормальним і дотичним напруженнями та електричним і магнітним полями, паралельними до берегів тріщини. Припускалося, що тріщина електропровідна та магнітнопроникна. Крім того, на ній заданий сумарний електричний заряд, тобто вважалося, що електродовані береги тріщини приєднані до деякого джерела живлення. Спочатку розглядалася відкрита тріщина, а далі припускалося, що береги тріщини можуть контактувати без тертя на деякій ділянці, що примикає до правої вершини тріщини. В останньому випадку сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана для моделі тріщини з зоною контакту та виписані точні аналітичні розв’язки. Також знайдені аналітичні розв’язки в рамках моделі відкритої тріщини, що призводить до появи осцилюючої особливості. З використанням цих розв’язків одержані аналітичні формули для шуканих електромеханічних факторів на межі поділу матеріалів. З використанням умов контактування берегів тріщини знайдено довжину зони контакту берегів тріщини та відповідні електромеханічні характеристики. Проведена чисельна ілюстрація одержаних розв’язків, яка, зокрема, вказує на можливість виникнення значних зон контакту берегів тріщини, які спричинені тільки електричними зовнішніми впливами.

У четвертому розділі проаналізовано міжфазну тріщину з контактною зоною в п'єзоелектричному/п'єзомагнітному біматеріалі під дією розтягуючих і зсувних напружень, електричних і магнітних полів, паралельних до берегів тріщини. Вважалося, що п'єзокерамічні матеріали поляризовані в напрямку, перпендикулярному до берегів тріщини, а ці береги покриті механічно м'якими електродами з сегнетоелектричного матеріалу та мають визначений сумарний електричний заряд і залишкову магнітну індукцію. У цьому випадку електричне та магнітне поля не змінюються вздовж берегів тріщини. Математична модель і її аналіз суттєво відрізняється від попереднього розділу, оскільки магнітна складова у цьому випадку не визначається тільки умовами на нескінченності, а входить як окрема складова в отримані в дисертаційній роботі представлення механічних, електричних і магнітних факторів через кусково-аналітичні функції. Спочатку припускалося, що тріщина повністю відкрита, і була сформульована відповідна задача Гільберта, яка розв’язана в точній аналітичній формі. В результаті були виявлені осцилюючі особливості, що і у цьому випадку призводить до фізично нереального взаємопроникнення берегів тріщини. Тому далі була розглянута модель з контактною зоною. Для довільної довжини контактної зони проаналізована задача зводиться в цьому випадку до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана та проблеми Гільберта, які розв’язані аналітично. Знайдено та розв’язано трансцендентне рівняння для визначення реальної довжини зони контакту. Довжина зони контакту та відповідні напруження, електричні та магнітні поля, коефіцієнти інтенсивності знайдені для різних комбінацій матеріалів і навантажень. Чисельні результати представлені для біматеріалу V_f5/V_f1. З них, зокрема, видно, що відносна довжина зони контакту в багатьох випадках досить велика та досягає чверті довжини тріщини, незважаючи на відсутність прикладених дотичних напружень. Спостерігається відчутний вплив зовнішнього магнітного поля на довжину контактної зони, напруження та коефіцієнт інтенсивності магнітного поля, а також на стрибок магнітного зміщення та магнітне поле, особливо в безпосередній близькості до вершини тріщини.

Ключові слова: механіка руйнування, п’єзоелектричний та п’єзоелектромагнітний біматеріали, електродована міжфазна тріщина, зона контакту, задача лінійного спряження, коефіцієнти інтенсивності напружень, електричного та магнітного полів.

Основні результати дисертації опубліковано у наукових працях:

1. Гриневич А. А. Аналітичне дослідження електродованої тріщини в п’єзоелектричному біматеріалі / А. А. Гриневич, П. Ю. Книш, В. В. Лобода // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наукових праць. – Дн.: Ліра. – 2014. – Вип. 22. – С. 80-95.

2. Гриневич А. А. Електрично заряджена електродована тріщина з зоною контакту між двома п’єзоелектричними матеріалами / А. А. Гриневич, А. Є. Шевельова, В. В. Лобода // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології: Науковий збірник. – Львів, 2015. – Вип. 21. – С. 67–78.

3. Гриневич А. А. Міжфазна тріщина з зоною контакту в п’єзоелектричному/п’єзомагнітному біматеріалі / А. А. Гриневич // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка.– 2015. – Т. 23, №5, вип. 19. – С. 86-95.

4. Гриневич А. А. Міжфазна електрично та магнітно провідна тріщина в п’єзоелектричному/п’єзомагнітному біматеріалі / А. А. Гриневич, В. В. Лобода // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. — 2016. – №1. – С. 57-69.

5. Grynevych A. A. An electroded electrically and magnetically charged interface crack in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial / A. A. Grynevych, V. V. Loboda // Acta Mechanica. – 2016. – Vol. 227, № 10. – P. 2861–2879.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Гриневич А. А. Особенности деформирования проводящей трещины между двумя пьезоэлектрическими материалами / А. А. Гриневич, В. В. Лобода, А. Е. Шевелёва // Тези доповідей міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь», 23 -26 серпня 2013 р., м. Одеса. – 2013. – С. 49-50.

2. Гриневич А. А. Контактна модель електрично заряджeної електродованої тріщини між двома п’єзоелектричними матеріалами / А. А. Гриневич, А. Є. Шевельова, В. В. Лобода // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: збірник наукових праць 5-ї Міжнародної конференції, 24-27 червня 2014 р., м. Львів. – 2014. – С. 249-254.

3. Гриневич А. А. Порівняльний аналіз тріщини в п’єзоелектричному/ п’єзомагнітному біматеріалі / А. А. Гриневич, В. В. Лобода // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2015»: матеріали конференції, 14-17 квітня 2015 р., м. Дніпродзержинськ. – 2015. – С. 63.

4. Grynevych A. A. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial / A. A. Grynevych, V. V. Loboda // 14th International Conference on Fracture, 18-23 June 2017, Rhodes, Greece. – 2017. – P.472-473.

ABSTRACT

Grynevych A. A. Features of deformation of piecewise homogeneous piezoelements with conducting interface cracks. – Qualification research paper, manuscript copyright.

Thesis for Science Candidate Degree in Physics and Mathematics by speciality 01.02.04 «Mechanics of the Deformable Solids» (Physics and Mathematics). – Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2018.

Elements of constructions made of piezo-active materials are widely used in various fields of modern technology. Piezo-active composite materials, which are characterized by lightness, durability, reliability and resistance to environmental influences, became especially popular. The widespread use of such materials makes it possible to subject them to various types of loads: mechanical, electrical, magnetic, etc. But as a rule, the destruction of such materials occurs due to the presence of defects, in particular cracks, in the area of the separation of materials having different properties. Such defects are called interface cracks.

A considerable amount of work is devoted to the construction of analytical methods for solving problems for interface cracks in piezo-active materials under the action of mechanical and electrical loads. However, most of them use the "open" crack model (classic model), which leads to a physically unrealistic oscillating singularity near its tips. The contact model, which is closer to reality, has not been studied sufficiently for such bimaterials under the influence of various physical and mechanical fields, especially when the crack is electrically charged and conductive. Also, special attention should be paid to the emergence of new piezoelectric/piezomagnetic materials, for which interface cracks within the framework of the contact zone model are practically unstudied. Thus, the study of the behaviour of interface cracks in piezoelectric and piezoelectric/ piezomagnetic bimaterials under the action of mechanical, electrical, and magnetic loads is relevant and has certain scientific and practical interest.

The purpose of this thesis is the developing of analytical methods for solving of plane problems for an electroded electrically charged interface crack with contact zones in piezoelectric and piezoelectric/piezomagnetic bimaterials under the action of mechanical, electrical and magnetic loads. The known methods of piezo-active materials solid mechanics have been used for the constructing of mathematical models; analytic solutions are constructed with use of piecewise-holomorphic vector-functions and the problems of linear relationship.

A number of new results were obtained in the work, among which the following should be mentioned:

- a plane problem for an electrically conducting crack at the interface between two piezoelectric materials is solved within the framework of a classical model and a model with a contact zone near one of its tips under the action of the remote mechanical load and the electric flux at infinity, as well as the electric charge prescribed on the crack faces. Using the representations of electromechanical components through the piecewise analytic functions, the problems of linear relationship are formulated and exact solutions of these problems are given. The transcendental equation for determining of the relative contact zone length is formulated and solved, as well as the expressions for the intensity factors of electromechanical values are obtained;

- for the first time, the problem of an electroded magnetically permeable crack with a contact zone in the area of separation of two piezoelectric/piezomagnetic materials under the action of electro-magneto-mechanical loading at infinity was solved taking into account the electric charge on its faces. The values which are necessary for the construction of all electromechanical fields in the vicinity of the crack are found by constructing and solving of Hilbert problem of linear relationship and the inhomogeneous combined Dirichlet-Riemann boundary value problem. The relations for calculating of the relative contact zone length, analytical expressions for stresses and electrical field are also obtained;

- an electrically and magnetically conducting interfacial crack with a contact area in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial is considered for the first time. For this purpose, the combined Dirichlet-Riemann boundary-value problem was formulated and solved analytically. The dependences of the contact zone length and the intensity factors on mechanical loading, magnetic and electric fluxes are investigated, an approach for mechanical, electric, and magnetic fracture parameters determination is proposed;

- the significant influence of the electrical charge of the crack on the contact area length, the electro-magnetic-mechanical fields in the vicinity of the crack is found out.

The first chapter of the PhD thesis gives an overview of the literature devoted to the study of cracks in homogeneous bodies, interface cracks in isotropic, piezoelectric and piezoelectric/piezomagnetic bimaterials. Besides, the need of further research on the development of analytical methods for the solution of plane problems of interface cracks with contact zones is identified.

In the second chapter, the problem for a classical model of a crack between two piezoelectric materials under the action of a remote electromechanical load is considered. The crack was assumed to be electroded, that is, its faces were considered as electrically conductive. In addition, the total charge was given on the crack, and the electromechanical load was prescribed at infinity. Using the analytical approach based on the presentation of electromechanical factors through sectionally-analytic functions, the exact solution of this problem in the form of relatively simple analytic formulas was obtained. That is, the components of stress and electric field along the interface, the jump of the electrical displacement, as well as the crack opening were found. From the analytical analysis of the results and data visualization the oscillating singularity at the the crack tips is observed. This phenomenon leads to a physically unrealistic mutual interpenetration of the crack faces. For most external electromechanical fields the penetration zones are very small and can not be taken into account, but for some types of load they are significant, and in these cases other models of the crack should be used. Therefore, a crack with a contact zone was considered further in this section. From the analytical analysis of the results and data visualization, it can be seen that both the remote electric field and the total charge of the crack significantly affect the contact area length and the electromechanical characteristics in the vicinity of the crack. At the same time, these factors may lead to significant areas of the crack faces contact, even in the absence of external shear stresses.

In the third chapter, a plane problem for a bimaterial piezoelectromagnetic plane is considered under the assumption that a certain part of the bonded material interface is cracked. Some part of this crack is closed and the other one is open. The bimaterial plane is loaded at infinity with uniform normal and tangential stresses and also with electric and magnetic fields parallel to the crack faces. It was assumed that the crack is electrically conductive and magnetically permeable. In addition, it was assumed that a total electric charge is prescribed, i.e. it was considered that the electrode crack faces are connected to some power source. Initially, an open crack was considered. Further it was assumed that the crack faces can contact without friction on a part adjacent to the right crack tip. In the latter case, the combined Dirichlet-Riemann boundary-value problem is formulated and exact analytical solutions are written out. Also analytical solutions in the framework of the open-crack model are found. It leads to the appearance of oscillating singularity at the crack tip. Using these solutions, the analytical formulas for the required electromechanical factors along the interface are obtained. Using the contact conditions of the cracks faces, the contact zone length and the corresponding electromechanical characteristics are found. A numerical illustration of the resulting solutions is carried out, which, in particular, indicates the possibility of occurrence of significant crack faces contact zones, which are caused by external electric field only.

In the fourth chapter, an interface crack with a contact zone in a piezoelectric/ piezomagnetic bimaterial under the action of tencile and shear stresses, electric and magnetic fields parallel to the crack faces is analyzed. It was considered that piezoceramic materials are polarized in the direction perpendicular to the crack faces, and these faces are coated with mechanically soft electrodes of ferroelectric material and have a definite total electric charge and residual magnetic induction. In this case, the electric and magnetic fields do not vary along the faces of the crack. The mathematical model and its analysis in this case differ significantly from the previous chapter, since the magnetic component in this case is not determined only by conditions at infinity, but is included in the presentation of the mechanical, electrical and magnetic factors through the piecewise-analytic functions as a separate component. Initially it was assumed that the crack was completely open. The corresponding Hilbert problem was formulated and solved in an exact analytical form. As a result, oscillating singularity was discovered, which also leads in this case to physically unrealistic interpenetration of the crack faces. Therefore, the model with the contact area was considered further. For an arbitrary contact zone length, the analysed problem is reduced in this case to the combined Dirichlet-Riemann boundary-value problem and the Hilbert problem. They were solved analytically. A transcendental equation has been found and solved to determine the real contact area length. The contact area length and the corresponding stresses, electric and magnetic fields, intensity factors are found for various combinations of materials and loads. Numerical results are presented for the piezoelectric/piezomagnetic bimaterial V_f5/V_f1. They particularly show that the relative contact zone length is quite large in many cases and reaches a quarter of the crack length, despite the absence of applied shear stresses. There is a noticeable influence of the external magnetic field on the contact area length, the intensity of electric and magnetic fields as well as on the jump of the magnetic displacement and the magnetic field, especially in the immediate proximity to the crack tip.

Keywords: fracture mechanics, piezoelectric and piezoelectromagnetic bimaterials, electroded interface crack, contact zone, problem of linear relationship, stress, electric and magnetic fields intensity factors.

Major results of the thesis are published in the scientific papers:

1. Grynevych A. A. An analytical study of an electroded crack in a piezoelectric bimaterial / A. A. Grynevych, P. Yu. Knish, V. V. Loboda // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures: Collection of Scientific Papers. – Dn.: Lira. – 2014. – № 22. – P. 80-95.

2. Grynevych A. A. Electrically charged electroded crack with a contact zone between two piezoelectric materials / A. A. Grynevych, A. E. Sheveleva, V. V. Loboda // Phys.-math. modeling and information technology: collection of scientific works. – Lviv, 2015. – № 21. – P. 67–78.

3. Grynevych A. A. An interphase crack with a contact area in piezoelectric/ piezomagnetic bimaterial / A. A. Grynevych // Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series: Mechanics. – 2015. – Vol. 23, №5 (19). – P. 86–95.

4. Grynevych A. A. An interphase electrically and magnetically conducting crack in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial / A. A. Grynevych, V. V. Loboda //

Bulletin of Zaporizhzhya National University. Physics and Mathematics Sciences. – 2016. – №1. – P. 57–69.

5. Grynevych A. A. An electroded electrically and magnetically charged interface crack in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial / A. A. Grynevych, V. V. Loboda // Acta Mechanica. – 2016. – Vol. 227, № 10. – P. 2861–2879.

Scientific papers proving validation of the materials of the thesis paper:

1. Grynevych A. A. Features of deformation of a conducting crack between two piezoelectric materials / A. A. Grynevych, V. V. Loboda, A. E. Sheveleva // Abstracts of the international scientific conference "Modern problems of mechanics of a deformable solid, differential and integral equations", 23 -26 August 2013, Odessa. – 2013. – P. 49-50.

2. Grynevych A. A. A contact model of an electrically charged electroded crack between two piezoelectric materials / A. A. Grynevych, A. E. Sheveleva, V. V. Loboda // Mechanics of material destruction and structural strength: collection of scientific works of 5th International Conference, 24-27 June 2014, Lviv. – 2014. – P. 249-254.

3. Grynevych A. A. Comparative analysis of a crack in a piezoelectric/ piezomagnetic bimaterial / A. A. Grynevych, V. V. Loboda // International Science Conference «Mathematical problems of technical mechanics – 2015»: conference materials, 14-17 April 2015, Dniprodzerzhinsk. – 2015. – P. 63.

4. Grynevych A. A. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial / A. A. Grynevych, V. V. Loboda // 14th International Conference on Fracture, 18-23 June 2017, Rhodes, Greece. – 2017. – P. 472-473.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. В останні десятиріччя розвиток авіа- та ракетобудування, машино- та приладобудування, радіотехніки та інформаційних технологій сприяє активній розробці та використанню нових матеріалів, у тому числі п’єзоактивних. Популярність п’єзоелектричних та п’єзоелектричних/ п’єзомагнітних матеріалів зумовлена своїми виключними властивостями, такими як унікальні плоско частотні характеристики, можливість перетворювати механічну, електричну та теплову енергії з одного стану в інший та ін. Такі матеріали широко використовуються для виготовлення різних електромеханічних перетворювачів, зокрема керамічних п’єзоприводів в конструкціях мікрохвильових двигунів і хвильових гіроскопів, елементів загоряння, п’єзотрансформаторів та ін. Композитні матеріали широко застосовуються як конструкційні елементи в силу своїх можливостей витримувати дію на них різних видів навантажень: механічних, електричних, магнітних та ін. На основі експериментів встановлено, що руйнування композитів зазвичай спричиняють розшарування (міжфазні тріщини), що знаходяться на межі поділу різнорідних складових. Побудові методів розв’язання задач для міжфазних тріщин в п'єзоактивних матеріалах присвячено значну кількість робіт. При цьому основна увага приділялась розгляду класичної (відкритої) моделі таких тріщин в припущені електропроникних та електроізольованих граничних умов на їх берегах. Менш активно досліджувалась модель тріщини зі скінченою електричною проникністю, а дослідження практично важливої моделі електрично зарядженої провідної тріщини практично відсутні як для відкритої, так і для контактної моделей. Враховуючи швидко зростаючу важливість п’єзоелектричних та п’єзоелектромагнітних матеріалів для розвитку мікро- та нанотехнологій та недостатній рівень досліджень контактної моделі електропровідної міжфазної тріщини у вказаних біматеріалах, вибрану тему досліджень можна вважати актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Вибраний напрямок досліджень виконувався у відповідності з індивідуальним планом підготовки аспіранта кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки та в рамках держбюджетних науково-дослідних тем, які виконувались науково-дослідною лабораторією механіки руйнування та пластичного деформування матеріалів кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара на протязі 2012-2017 рр. Отримані результати увійшли до звітів науково-дослідних робіт із тем: «Проблеми механіки руйнування кусково-однорідних п’єзоелектричних і п’єзоелектромагнітних тіл та незворотного деформування сплавів з пам’яттю форми», номер державної реєстрації №0112U000197, 2012-2014 рр.; «Розробка методик розв’язку фундаментальних задач міцності та руйнування кусково-однорідних тіл, скомпонованих з інтелектуальних матеріалів», номер державної реєстрації № 0115U002393, 2015–2017 рр.

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є розвиток аналітичних методів розв’язку плоских задач для електродованої електрично зарядженої міжфазної тріщини з зонами контакту її берегів в п’єзоелектричних та п’єзоелектричних/ п’єзомагнітних біматеріалах під дією механічних, електричних і магнітних навантажень.

Досягнення поставленої мети передбачає розв’язок наступних *задач*:

- сформулювати задачі лінійного спряження, що відповідають моделям електро- та магнітнопровідної відкритої тріщини та тріщини з зоною контакту з використанням представлень механічних і електромагнітних факторів через кусково-аналітичні функції та вектор-функції;

- побудувати точні аналітичні розв’язки вказаних задач для міжфазної тріщини в п’єзоелектричних і п’єзоелектричних/п’єзомагнітних біматеріалах. У замкнутій аналітичній формі отримати всі необхідні характеристики напружено-деформівного стану (НДС) в області тріщини;

- отримати співвідношення для обчислення відносної довжини зони контакту, а також коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричної та магнітної індукцій;

- вивчити вплив зовнішніх механічних, електричних та магнітних величин на відносну довжину зони контакту та коефіцієнти інтенсивності (КІ) напружень, електричного та магнітного полів.

Об'єкт дослідження – п'єзоелектричний, п'єзоелектричний/ п'єзомагнітний біматеріальний простір із електропровідною тріщиною на границі розділу матеріалів.

Предмет дослідження – розв'язок плоских задач для електродованої міжфазної тріщини в п'єзоелектричних і п'єзоелектричних/п'єзомагнітних біматеріалах під дією механічних навантажень, електричних і магнітних полів.

Методи дослідження. Для побудови математичних моделей використані відомі методи механіки деформівного твердого тіла п'єзоактивних матеріалів; аналітичні розв'язки будувались за допомогою апарату кусково-голоморфних вектор-функцій і розв'язків задач лінійного спряження.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- розв'язано плоску задачу для електропровідної тріщини на межі поділу п'єзоелектричних матеріалів в рамках класичної та контактної моделей під дією віддаленого механічного навантаження та електричного потоку на нескінченності, а також електричного заряду, заданого на берегах тріщини. З використанням представлень компонентів НДС через кусково-аналітичні функції сформульовано задачі лінійного спряження, для яких дані точні розв'язки. Сформульовано та розв'язано трансцендентне рівняння для визначення відносної довжини зони контакту, а також отримано вирази для КІ електромеханічних величин;

- уперше розв'язано задачу для електродованої магнітнопроникної тріщини з зоною контакту в області поділу двох п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів під дією електро-магніто-механічного навантаження на нескінченності з урахуванням електричного заряду на її берегах. Шляхом побудови та розв'язання задач лінійного спряження Гільберта та неоднорідної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана знайдені величини, необхідні для побудови всіх електромеханічних полів в околі тріщини. Також отримано співвідношення для обчислення відносної довжини зони контакту, аналітичні вирази для напружень та електричного поля;

- уперше розглянуто електро- та магнітнопровідну міжфазну тріщину з зоною контакту в п'єзоелектричному/п'єзомагнітному біматеріалі. Для цього було сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана, яку розв'язано аналітично. Досліджено залежності відносної довжини зони контакту та КІ від інтенсивностей механічного навантаження, магнітного та електричного полів;

- проілюстровано суттєвий вплив електричного заряду тріщини на довжину зони контакту, електро-магніто-механічні поля в околі тріщини та параметри її руйнування.

Достовірність наукових положень і висновків дисертаційної роботи. Достовірність отриманих автором результатів забезпечується коректністю постановок задач, використанням відомих моделей тріщин (класичної та контактної), застосуванням апробованих у літературі точних методів теорії функцій комплексної змінної. Проведено, де це можливо, порівняння отриманих результатів з уже відомими, опублікованими іншими авторами, та отримана їх добра узгодженість.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що вони дозволяють досліджувати механічні, електричні та магнітні поля в п'єзоелектричних і п'єзоелектромагнітних біматеріалах із міжфазними тріщинами. Отримані в явному виді співвідношення для параметрів руйнування дозволяють оцінити вплив механічних напружень, електричного та магнітного потоків на віддалені від тріщини на можливість її розвитку і тим самим сприяти підвищенню тріщиностійкості композитних конструкцій, виготовлених з п'єзоелектричних і п'єзоелектромагнітних матеріалів. Точні аналітичні розв'язки, отримані в роботі, можуть служити еталонними при розробці й апробації чисельних методів розв'язання задач указаного класу для тіл кінцевих розмірів.

Особистий вклад здобувача. Основні результати отримані автором самостійно. Постановка задач, вибір методів розв'язання, участь в обговоренні результатів належить науковому керівнику, професору В. В. Лободі. При написанні робіт [7, 8], у яких методика досліджень пов'язана з попередніми результатами співавторів, також аспірант П. Ю. Книш та професор А. Є. Шевельова брали участь в обговоренні постановки задач та одержаних результатів. В роботах [7, 8] здобувачем отримано загальний розв'язок задач в рамках класичної та контактної моделей в п'єзоелектричному матеріалі, отримані чисельні результати. В роботі [9] здобувач самостійно побудував та розв'язав задачу для електродованої та магнітнопроникної тріщини в п'єзоелектричному/ п'єзомагнітному біматеріалі, оцінив вплив магнітного потоку. В роботах [10, 96], здобувачу належать зведення поставлених задач до комбінованої задачі лінійного спряження Діріхле-Рімана та задачі Гільберта, їх розв'язання, отримання та інтерпретація чисельних результатів. Робота [9] опублікована без співавторів.

Апробація результатів дослідження. Основні положення та результати дисертації доповідались і обговорювались на:

- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь», Одеса, 23–26 серпня 2013 р.;
- 5-й Міжнародній конференції «Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій», Львів, 24–27 червня 2014 р.;
- Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2015», Дніпродзержинськ, 14–17 квітня 2015 р.;
- 14-й Міжнародній конференції з руйнування, Греція, Родос, 18–23 червня 2017 р.

В повному обсязі результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на розширеному науковому семінарі кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара та науковому семінарі кафедри вищої математики та системного аналізу Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут».

Публікації. Основні результати дисертації відображені в 9 наукових роботах, серед яких 4 статті [7, 8, 9, 10] опубліковані в спеціалізованих наукових виданнях, затверджених МОН України, та 4 – в тезах доповідей і матеріалах конференцій. Одна стаття [96] опублікована в міжнародному журналі «Acta Mechanica», імпакт-фактор якого складає 1,85.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний об’єм роботи складає 135 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Тріщини між двома ізотропними та анізотропними матеріалами

Основоположні методи розв'язання задач для тріщин і базові положення механіки руйнування тіл з тріщинами викладені у відомих монографіях В. Т. Грінченко, А. Ф. Улітко та М. О. Шульги [11], В. З. Партона та Б. А. Кудрявцева [50], О. М. Гузя [13, 14], А. О. Камінського [19, 24], Г. С. Кіта і О. В. Побережного [26], Г. С. Кіта і М. В. Хая [25], М. Ф. Морозова [38], В. В. Панасюка [48], В. В. Панасюка, М. П. Саврука та О. П. Дацишин [49], Г. Я. Попова [51], М. П. Саврука [52], Л. Й. Слепяна [56], Г. П. Черепанова [67, 68] та ін.

Особливу роль при дослiджені тріщин відіграють тріщини на межі поділу різних матеріалів, які є основною причиною руйнування композитів. Такі тріщини ще називають міжфазними. Їх дослідженню присвячена значна кількість публікацій, аналіз яких вказує на наступне.

Спочатку розвитку цього напрямку розглядалась так звана класична модель тріщини між ізотропними матеріалами, тобто вважалось, що тріщина повністю відкрита. В рамках цієї доволі розповсюдженої моделі отримано багато результатів, основні з яких викладені в роботах M. L. Williams [130], Г. П. Черепанова [69], В. І. Моссаковського та М. Т. Рибки [39], A. H. England [15], Д. В. Грилицького [6], Г. Т. Сулима та Д. В. Грилицького [60], Г. Т. Сулима, Д. В. Грилицького та І. П. Білокура [61], J. R. Rice [120] та ін.

Проте, розв'язання задач з використанням моделі відкритої тріщини має свої недоліки, так як в околі вершин тріщин виникає осцилюоча особливість, тобто має місце фізично нереальне явище взаємопроникнення її берегів один в одного. Усунути цю особливість в розв'язку вдалось введенням зон гладкого контакту берегів поблизу вершин тріщини, причому величини зон контакту вважались заздалегідь невідомими. Такий підхід було запропоновано в роботі M. Comninou [77] та далі розвинуто в дослідженнях M. Comninou, J. Dundurs

[78], J. Dundurs, A. K. Gautesen [80], C. Atkinson [73], І. В. Симонова [53, 54, 55, 124], A. K. Gautesen [89, 90], В. В. Лободи [32, 33], K. Hu, G. Li [101] та ін.

Слід відзначити, що в роботах M. Comninou [77], M. Comninou, J. Dundurs [78] задача для тріщини між різнорідними ізотропними півплощинами за наявності гладких зон контакту в околі вершин тріщин була зведена до інтегрального рівняння, яке досліджувалось чисельно. Довжина зони контакту однозначно визначалась з додаткових рівнянь, отриманих з умов для напружень та переміщень. Оскільки межі інтегрування та контактні напруження є невідомими, то виникла складна проблема розв’язання такої задачі. В роботах M. Comninou [77], M. Comninou, J. Dundurs [78] вона була вирішена шляхом чисельного підходу. Були також прийняті спроби отримання аналітичних розв’язків вказаної задачі. Наближений аналітичний розв’язок розшукувався в роботі C. Atkinson [73]. Задачу для тріщини, що знаходиться між двома ізотропними матеріалами, з урахуванням зон контакту вперше найбільш повно аналітично розв’язав І. В. Симонов [5553]. В цій роботі, зокрема, з використанням комплексних потенціалів було отримано трансцендентне рівняння, з якого визначалася довжина зони контакту берегів тріщин.

У подальшому аналітичні розв’язки для тріщин з однією та двома зонами контакту були одержані з використанням різних методів і при різному зовнішньому навантаженні у працях І. В. Симонова [53, 54], В. В. Лободи [33], A. K. Gautesen і J. Dundurs [91, 92], J. Dundurs і A. K. Gautesen [80], A. K. Gautesen [89, 90], V. V. Loboda [108], K. P. Herrmann, V. V. Loboda [98]. У цих роботах, зокрема, було показано, що знехтування однієї з зон контакту не призводить до суттєвих помилок в розв’язку. В дослідженнях А. Ф. Улітко [62], В. І. Острика та А. Ф. Улітко [43, 44, 45, 63], В. І. Острика [46] були побудовані аналітичні розв’язки без урахування та з урахуванням тертя в зоні контакту.

Задача для системи міжфазних тріщин з гладкими зонами контакту аналітично розв’язана в пружному випадку в роботі I. V. Kharun і V. V. Loboda [102]. Вплив довільно розташованого зосередженого навантаження на міжфазні тріщини в ізотропних матеріалах розглядався в роботі І. В. Харуна і

В. В. Лободи [66]. Питанням механіки багатокомпонентних тіл, зокрема зі сферичними розрізами на межах поділу матеріалів, присвячені роботи О. Г. Ніколаєва та Є. А. Танчіка [Ошибка! Неизвестный аргумент ключа.], С. О. Смирнова [58, 59] та їх учнів.

Різні моделі, що описують зони предруйнування, виникаючі на продовженні міжфазної тріщини, розглянуті в роботах А. А. Камінського, І. В. Дудик, Л. А. Кіпніс [21, 22, 23], А. А. Камінського, Л. А. Кіпніс, В. А. Колмакової [18, 20], А. Є. Шевельової [70, 71], В. В. Лободи, А. Є. Шевельової [34]. Контактні задачі для пружного тіла з щілинами, заповненими рідинами, вивчались в роботі С. С. Байдачного та В. І. Кузьменко [2].

В роботах В. О. Меншикова [35], В. О. Меншикова, О. В. Меншикова, І. О. Гузя [36, 113], А. Н. Гузя, І. О. Гузя, О. В. Меншикова, В. О. Меншикова [12] розглянуті динамічні задачі для тріщини на границі поділу пружних матеріалів під дією гармонічного навантаження. В цих працях також було досліджено вплив контакту берегів тріщини на характеристики напружено-деформівного стану в околі її вершин.

1.2. Дослідження міжфазних тріщин у п’єзоелектричних матеріалах

Завдяки великому різноманіттю своїх властивостей п’єзоелектрики використовуються в перетворювачах (в тому числі акустичних), випромінювачах, резонаторах, датчиках, хвильових фільтрах, лініях затримки, пристроях пам’яті та ін. Надійне функціонування більшості таких приладів забезпечується стабільністю та високим рівнем характеристик електромеханічного перетворення енергії в кераміці, тобто несуттєвим впливом на п’єзоефект, механічних та діелектричних властивостей матеріалів, робочих рівнів механічного та електричного напружень. П’єзоелектриками називають «розумні» кристалічні матеріали, які деформуються під дією електричного поля та навпаки. Кристалічні матеріали є крихкими без помітно виражених пластичних властивостей, тому їх руйнування проходить при малих рівнях деформації. Таким матеріалам притаманне явище п’єзоефекту (виникнення електричної поляризації при механічному впливі називають прямим п’єзоефектом, виникнення деформації в електричному полі – зворотнім). П’єзоелектричний ефект у визначеному діапазоні температур мають сегнетоелектрики, які в загальному випадку являються діелектриками. До п’єзоелектриків відносяться, наприклад, кераміки PZT, кварц (SiO_2), титанат барія ($BaTiO_3$) та багато інших.

Застосування таких матеріалів в сучасній техніці обумовило постановку широкого класу задач електропружності. В монографіях В. Т. Грінченко, А. Ф. Улітко, Н. А. Шульги [11] та В. З. Партона, Б. А. Кудрявцева [50] розглянуті основні співвідношення лінійної теорії деформування п’єзоелектричних середовищ, сформульовані та розв’язані конкретні задачі електропружності. Спеціальні розділи електропружності для однорідних та біматеріальних тіл з тріщинами розглянуті в монографіях С. О. Калоєрова, А. И. Баєвої , О. І. Бороненко [16] та В. Б. Говорухи, В. В. Лободи [5] відповідно. Ефективний підхід до розв’язку двовимірних задач електропружності запропоновано в роботі А. В. Павленко, Т. С. Кагадій, О. Д. Оноприєнка [47].

Розглянемо тепер детальніше роботи, присвячені різним моделям міжфазних тріщин у п’єзоелектричних матеріалах.

Дослідження тріщин в п’єзоелектричних біматеріалах в рамках класичної моделі.

В рамках моделі відкритої тріщини в роботі Б. А. Кудрявцева, В. З. Партона, В. І. Ракітіна [29] розв’язана задача електропружності для прямолінійної тунельної електропроникної тріщини на міжфазній границі з провідником, а електроізольована тріщина в рамках цієї ж моделі детально досліджена Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis [126]. Електрична проникність тріщини між двома п’єзоелектричними матеріалами врахована в роботі V. B. Govorukha, V. V. Loboda, M. Kamlah [95], Q. Li, Y. H. Chen [105]. R .M . McMeeking [112] розв’язав задачу визначення електричного поля навколо провідної тріщини в діелектриках. Ця ж електрична модель міжфазної тріщини розглядалась в роботі H. G. Beom, S. N. Atluri [76]. Задача для провідної тріщини в однорідних п'єзоелектричних матеріалах була також розглянута Z. Suo [127], C. Q. Ru, X. Mao [121] та T. Y. Zhang, C. F. Gao [131]. Для випадку електрострикційних матеріалів ця проблема була вивчена H. G. Beom [74, 75]. Функція Гріна для складеної п'єзокерамічної площини з міжфазною тріщиною побудована в роботі Л. А. Фільштинського, М. Л. Фільштинського [64] та розвинута в монографії Л. А. Фільштинського [65].

Дослідження тріщин в п'єзоелектричних біматеріалах в рамках контактної моделі.

Детальне аналітичне дослідження електропроникної та електроізольованої міжфазних тріщин з контактними зонами в п'єзоелектричному біматеріалі виконано відповідно в роботах K. P. Herrmann, V. V. Loboda [100] та K. P. Herrmann, V.B.Govorukha, V. V. Loboda [99]. Q.-H. Qin, Y.-W. Mai [118] провели вивчення термопружної задачі методом сингулярних інтегральних рівнянь в рамках тієї ж моделі. В роботі В. В. Лободи, О. С. Філіпової [31] проведено дослідження зовнішньої електропроникної тріщини в рамках контактної моделі. Моделі з контактною зоною для міжфазної тріщини зі скінченою електричною проникністю в п'єзоелектричному біматеріалі досліджено V. Govorukha, M. Kamlah [93, 94]. Періодична система міжфазних тріщин зі скінченою електричною проникністю з контактними зонами аналітично розглянуто в роботі S. Kozinov, V. Loboda, Y. Lapusta [104].

Дія зосереджених сил на береги рухомої тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі враховувалась в роботах О. В. Комарова, В. В. Лободи [28], а в роботі В. В. Лободи, О. С. Філіпової [31] ця ж проблема розв'язана для зовнішньої нерухомої тріщини на границі розділу двох п'єзоелектричних матеріалів. При цьому вважалось, що тріщина є або електропроникною або електроізольованою. Міжфазна тріщина без урахування та з урахуванням зон контакту в п'єзоелектричному біматеріалі в припущенні електропровідних граничних умов на її берегах вивчалась в роботі П. Ю. Книш, В. В. Лобода [27] і V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta [107] відповідно.

1.3. Тріщини в задачах електромагнітопружності

Діелектричні матеріали з яскраво вираженим як п’єзоелектричним, так і п’єзомагнітним ефектами останнім часом стали активно використовуватися в мікрохвильовій електроніці, оптоелектроніці та в інших електронних пристроях. П’єзомагнітні матеріали, по аналогії з п’єзоелектричними, мають виражений п’єзомагнітний ефект (виникнення намагніченості при механічному впливі – прямий ефект, виникнення деформації в магнітному полі – зворотній ефект). Ці матеріали називаються також феромагнетиками. В них власне (внутрішнє) магнітне поле може в сотню та тисячу разів перевищувати зовнішнє магнітне поле, яке його визвало. До таких матеріалів відносяться ферити (керамічні магніти з окису заліза, наприклад, $CoFe_2O_4$), магнітострикційні матеріали, жорсткі магнітні матеріали, мікрохвильові ферити [37]. Область їх використання також доволі широка. Це елементи пам’яті комп’ютерів, магнітострикційні перетворювачі, фільтри та ін.

В роботах Yu. N. Podilchuk, I. Yu. Podilchuk [115, 116], Yu. N. Podilchuk, L. N. Tereshchenko [117] отримані розв’язки задач магнітопружності для трансверсально-ізотропного феромагнітного тіла з еліптичними тріщинами та включеннями під дією однорідного магнітного поля, перпендикулярного до площини ізотропії.

Загальним питанням механіки багатокомпонентних, зокрема електромагнітних, суцільних середовищ та їх застосуванню в техніці присвячені роботи Ж. Можена [37], Д. Берлінкура, Д. Керрана, Г. Жаффе [3].

П’єзоелектрики/п’єзомагнетики (чи п’єзоелектромагнітні матеріали) – це матеріали, що мають виражені п’єзоелектричні та п’єзомагнітні властивості одночасно. Це двокомпонентні суміші п’єзоелектриків в п’єзомагнітних матрицях, що отримуються звичайно через спікання порошкоподібних компонент. Властивості п’єзоелетриків/п’єзомагнетиків залежать від властивостей складових їх речовин, об’ємного співвідношення компонент і способу отримання композиту. Здатність перетворювати один вид енергії в інший (магнітний, електричний, механічний) обумовлює їх застосування не тільки при виробництві датчиків і приводів, але також має важливе значення при використанні в таких областях сучасної техніки, як електричне та лазерне обладнання, надхвильова аеродинаміка, мікрохвильова, інфрачервона електроніка [119], а також при розробці магнітоелектричних елементів пам’яті, «розумних» датчиків і перетворювачів [106]. Типовим представником даних матеріалів являється $BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$. Вказані матеріали характеризуються різноманітними п’єзоелектричними, піроелектричними, п’єзомагнітними та іншими властивостями, які суттєвим чином впливають на параметри руйнування композитів з тріщинами. Враховуючи, що конструкційні елементи з подібного роду матеріалів функціонують в умовах як підвищених температур, так і впливу електричних і магнітних полів, актуальним представляється вивчення впливу різноманітних видів зовнішніх впливів – електричних, магнітних і механічних – на параметри руйнування таких матеріалів.

Вплив електричних і магнітних полів на тіла з тріщинами розглядались окремо один від одного досить давно. Так, в монографії С. О. Калоєрова, А. І. Баєвої, О. І. Бороненко [16] за допомогою методу комплексних потенціалів розв’язані задачі електропружності та магнітопружності для п’єзоелектричних і п’єзомагнітних тіл з отворами, тріщинами та включеннями. З використанням цього ж математичного апарату в роботі А. І. Баєвої, О. І. Бороненко [1] розв’язані двомірна та плоска задача для п’єзомагнітних напівпростору та напівплощини з еліптичними отворами та тріщинами при дії механічних зусиль і магнітних полів. В статті C.-F. Gao, Y.-W. Mai, B.-L. Wang [84] розглядалась двомірна задача магнітопружності для однорідного магнітно-м’якого матеріалу з тріщиною під дією магнітного потоку на нескінченності.

В останній час з’явився ряд статей, присвячених задачам про спільний вплив механічних, електричних і магнітних полів на п’єзоелектричні/

п'єзомагнітні тіла з тріщинами. Важливі результати отримані для тріщин в однорідних п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалах, частина яких викладена в монографії С. О. Калоєрова, А. В. Петренко [17].

В роботі C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke [86] отримано точний розв'язок для однорідного п'єзоелектромагнітного простору з еліптичним вирізом і, зокрема, тріщиною. При цьому показано, що особливості механічних і електромагнітних полів залежать від прикладеного механічного та електромагнітного навантаження відповідно. До подібного висновку прийшли і автори роботи C. F. Gao, P. Tong, T. Y. Zhang [85], розглядаючи антиплоску задачу про вплив віддаленого електромагнітного навантаження на еліптичний виріз, що вироджується в тріщину, з урахуванням електромагнітних полів всередині порожнини. В роботі Z.-G. Zhou, P.-W. Zhang, L.-Z. Wu [133] отримано точний розв'язок для тріщини в однорідному п'єзоелектромагнітному матеріалі в випадку рівномірного розтягуючого навантаження. В статті B. N. Rao, M. Kuna [119] знайдені вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричної та магнітної індукцій для тріщини в однорідному п'єзоелектромагнітному матеріалі, розташованої під кутом до осі поляризації. В роботі G. C. Sih, R. Jones, Z. F. Song [122] вивчена залежність параметрів руйнування тріщини в однорідному п'єзоелектромагнітному матеріалі від напрямів п'єзоелектричної та п'єзомагнітної поляризацій. Метод граничних інтегральних рівнянь розвинуто в роботі Ia. Pasternak, H. Sulym [114] стосовно дослідження двовимірних задач електромагнітопружності для тіл з тріщинами та включеннями. В роботі O. Viun, V. Loboda, Y. Lapusta [128] враховані електричні та магнітні напруження Максвелла в магнітоелектропружному середовищі з періодичною системою тріщин з обмеженою електричною проникністю. Зони передруйнування для тріщини з такими ж умовами на її берегах в однорідному п'єзоелектромагнітному матеріалі проаналізовано в роботі O. Viun, Y. Lapusta, V. Loboda [129].

Слід відзначити, що випадок тріщин між двома п’єзоелектромагнітними матеріалами досліджений в основному при використанні *класичної моделі* тріщини.

В роботі C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang [88] знайдено точний розв’язок для електропроникної тріщини, розташованої на границі розділу різноманітних п’єзоелектричних/п’єзомагнітних матеріалів у випадку прикладення однорідного електромагнітомеханічного навантаження на нескінченності. В дослідженні C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke [87] визначено загальний розв’язок для системи тріщин на границі розділу матеріалів у випадку довільного електромагнітомеханічного навантаження, а в роботі G. C. Sih, Z. F. Song [123] досліджена залежність можливості розповсюдження тріщини в композиті $BaTiO_3$–$CoFe_2O_4$ від напрямків дії магнітного та електричного полів, які можуть не співпадати між собою. В роботі Z.-G. Zhou, B. Wang, Yu-G. Sun [132] за допомогою перетворень Фур’є знайдено розв’язок для двох симетричних проникнених тріщин на границі розділу п’єзоелектричних/п’єзомагнітних матеріалів під дією антиплоского навантаження.

Контактна модель тріщини між двома різними магнітоелектропружними матеріалами почала вивчатись порівняно недавно. В роботі K. P. Herrmann, V. V. Loboda, T. V. Khodanen [97] вивчалась електро- та магнітнопроникна тріщина з безфрикційною контактною зоною в п’єзоелектричному/ п’єзомагнітному матеріалі під дією віддаленого механічного навантаження, магнітного та електричного потоків, а також зосереджених сил. Одержано прості аналітичні формули для визначення довжини зони контакту, коефіцієнтів інтенсивності напружень та електричного зміщення, а також швидкості звільнення енергії. В роботі P. Ma, W. J. Feng, R. K. L. Su [110] проаналізована контактна модель для міжфазної тріщини між двома різними магнітоелектропружними матеріалами під дією віддаленого механічного, електричного та магнітного навантажень в припущенні, що відкрита частина тріщини електроізольована та магнітнопроникна. Близька проблема, але з урахуванням теплового потоку та теплоізольованих берегів тріщини вивчалась в роботі W. J. Feng, P. Ma, R. K. L. Su [82]. Електропровідна міжфазна тріщина з контактною зоною в магнітоелектропружній біматеріальній системі розглядалась P. Ma, R. K. L. Su, W. J. Feng [111].

В роботі K. Hu и G. Li [101] методом інтегральних перетворень розв’язана задача про рухому електропроникну тріщину під дією віддаленого антиплоского механічного навантаження, електричного та магнітного потоків. Тривимірна задача для тріщини в п’єзоелектричному/п’єзомагнітному біматеріалі зведена до спільного розв’язку гіперсингулярних і граничних інтегральних рівнянь в роботі B. J. Zhu, T. Y. Qin [134].

1.4. Висновки

Таким чином, в літературі проблемі міжфазних тріщин приділено достатньо багато уваги. Розглянуті різні види навантажень на ізотропні, п’єзоелектричні, п’єзоелектричні/п’єзомагнітні біматеріали, що мають міжфазні тріщини. Проте, в основній частині досліджень використана класична модель електропроникної або електроізольованої тріщини, яка призводить до фізично нереального взаємопроникнення матеріалів. Електро- ж та магнітнопровідні тріщини як в п’єзоелектричних, так і в п’єзоелектричних/п’єзомагнітних біматеріалах практично не вивчались ні в рамках класичної, ні контактної моделей. Тому розвиток методів теорії функцій комплексної змінної для розв’язання плоских задач про міжфазну електропровідну тріщину з зонами контакту її берегів в п’єзоелектричному та п’єзоелектричному/п’єзомагнітному біматеріалах під дією різноманітних фізико-механічних полів й представляє особливий інтерес і є важливим для практичних застосувань. Розв’язанню таких проблем як раз і присвячена дана робота.

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕКТРИЧНО ЗАРЯДЖЕНА, ЕЛЕКТРОПРОВІДНА ТРІЩИНА В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ МАТЕРІАЛІ

В даному розділі вивчається електродована тріщина між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією механічного навантаження та електричного поля, паралельного до берегів тріщини.

2.1. Постановка задачі та формулювання основних співвідношень п'єзостатики

Розглянемо плоску деформацію біматеріалу, складеного з півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, поляризованих по напрямку осі x_3 і зчеплених по інтерфейсу $x_3 = 0$. На відрізку $x_1 \in (c,b)$ інтерфейсу розташована електродована тріщина (рис. 2.1), яка вважається електропровідною, тобто на її берегах

$$E_1^{(1)}(x_1,0) = E_1^{(2)}(x_1,0) = 0 . \tag{2.1}$$

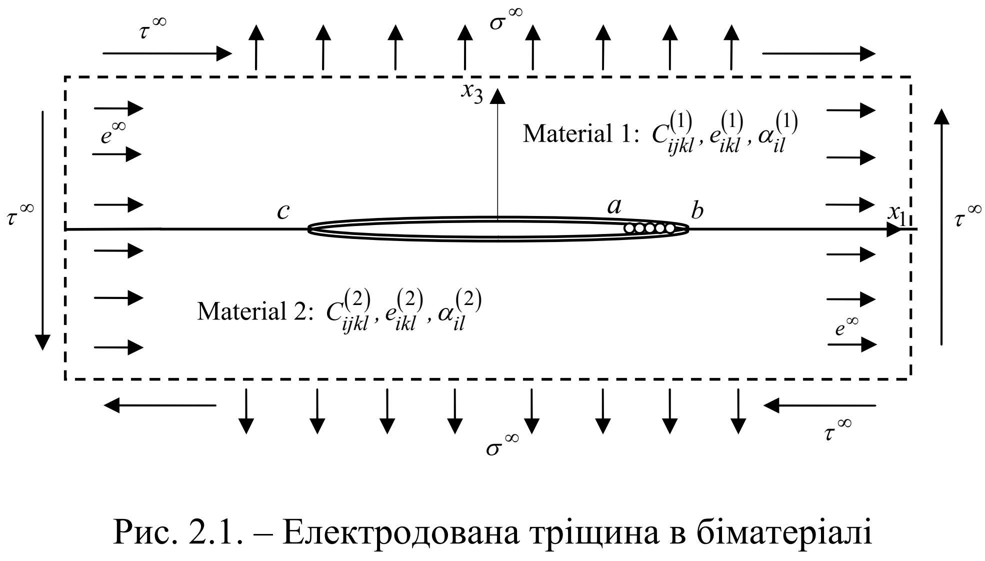


Рис. 2.1. – Електродована тріщина в біматеріалі

Крім того, на тріщині задано сумарний заряд величини D_0. Ця ситуація часто виникає на практиці в результаті розшарування механічно м'якого внутрішнього електроду, розміщеного на межі поділу матеріалів. Цей електрод може бути з'єднаний з позитивним чи негативним електричним джерелом живлення. В цьому випадку мають місце ненульові значення D_0. В частковому випадку заземлення електроду відповідне значення D_0 треба взяти рівними нулю.

Вважаємо, що задані також електромеханічні граничні умови на нескінченності:

$$\sigma_{13}^{\infty} = \tau^{\infty},\ \sigma_{33}^{\infty} = \sigma^{\infty},\ E_1^{\infty} = e^{\infty}. \tag{2.2}$$

Додатково до (2.1), інші умови на інтерфейсі для відкритої тріщини $x_1 \in (c,b)$ (рис. 2.1 для $a=b$) мають вигляд:

$$\sigma_{i3}^{(1)}(x_1,0) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1,0) \quad \text{для } x_1 \in L, \tag{2.3}$$

$$D_3^{(1)}(x_1,0) = D_3^{(2)}(x_1,0),\ u_i'^{(1)}(x_1,0) = u_i'^{(2)}(x_1,0) \quad \text{для } x_1 \in L, \tag{2.4}$$

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1,0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c,b), \tag{2.5}$$

де $m=1,2$, $i=\overline{1,3}$, $L = (-\infty,\infty) \setminus (c,b)$.

Буде розглядатись також міжфазна тріщина з контактною зоною. В цьому випадку припускається, що відрізок $x_1 \in [c,a) = L_1$ вільний від напружень, а береги тріщини знаходяться в умовах безфрикційного контакту на відрізку $x_1 \in [a,b] = L_2$ (рис. 2.1). Таким чином, умови на інтерфейсі складаються з (2.1), (2.3), (2.4) та наступних додаткових умов:

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1,0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \tag{2.6}$$

$$\langle u_3(x_1) \rangle = 0,\ \sigma_{13}^{(m)}(x_1,0) = 0,\ \langle \sigma_{33}(x_1) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2, \tag{2.7}$$

де $m=1,2$, $i=\overline{1,3}$, $\langle \mu(x_1) \rangle$ – стрибок функції на інтерфейсі. $\langle \mu(x_1) \rangle = \mu^+(x_1) - \mu^-(x_1)$, де $\mu^{\pm}(x_1) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left[\mu(x_1 \pm i\varepsilon) \right]$.

Розшукуються компоненти σ_{13}, σ_{33}, E_1 вздовж інтерфейсу, стрибок компоненти D_3 на тріщині, а також розкриття $\langle u_3 \rangle$ тріщини.

2.2. Загальний розв’язок основного рівняння

Замкнена система рівнянь п’єзостатики за відсутності масових сих і вільних зарядів описується рівняннями [50]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{kij}E_k, \tag{2.8}$$

$$D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \alpha_{ik}E_k, \tag{2.9}$$

$$\sigma_{ij,i} = 0,\ D_{i,i} = 0, \tag{2.10}$$

$$\gamma_{ij} = 0,5\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ E_i = -\varphi_{,i}, \tag{2.11}$$

де σ_{ij} , γ_{ij} – компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно; u_i – компоненти вектора переміщень; φ – електричний потенціал; E_i – компоненти електричного поля; D_i – компоненти електричної індукції; c_{ijkl} , e_{ijk} , α_{ij} – відповідно компоненти пружної, п’єзоелектричної та діелектричної матриць.

Підставляючи (2.11) до (2.8) та (2.9) та після цього до (2.10) отримуємо рівняння:

$$\left(c_{ijkl}u_k + e_{lij}\varphi\right)_{,li} = 0,\ \left(e_{ikl}u_k - \alpha_{il}\varphi\right)_{,li} = 0, \tag{2.12}$$

де кома означає похідні по відповідним координатним змінним.

Введемо вектори:

$$\mathbf{V} = \left\{u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \varphi\right\}^T,\ \mathbf{t} = \left\{\sigma_{31},\quad \sigma_{32},\quad \sigma_{33},\quad D_3\right\}^T. \tag{2.13}$$

Оскільки всі поля не залежать від координати x_2 , то розв’язок рівнянь (2.12) у відповідності з методом, запропонованим в [81, 30, 125] для анізотропного матеріалу, може бути представлено у вигляді:

$$\mathbf{V} = \mathbf{af}\left(z\right), \tag{2.14}$$

де $z = x_1 + px_3$, вектор $\mathbf{a} = \left[a_1, a_2, a_3, a_4\right]^T$ знаходиться з рівняння:

$$\left[\mathbf{Q} + p\left(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\right) + p^2\mathbf{T}\right]\mathbf{a} = 0, \tag{2.15}$$

а елементи матриць **Q**, **R** та **T** розмірності 4×4 визначаються як

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1121} & c_{1131} & e_{111} \\ c_{1211} & c_{1221} & c_{1231} & e_{121} \\ c_{1311} & c_{1321} & c_{1331} & e_{131} \\ e_{111} & e_{121} & e_{131} & -\alpha_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{1112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{211} \\ c_{1212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{221} \\ c_{1312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{231} \\ e_{112} & e_{122} & e_{132} & -\alpha_{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{2112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{212} \\ c_{2212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{222} \\ c_{2312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{232} \\ e_{212} & e_{222} & e_{232} & -\alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

Ненульовий розв’язок системи (2.15) існує, якщо p являється коренем рівняння:

$$\det\left[\mathbf{Q} + p\left(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\right) + p^2\mathbf{T}\right] = 0. \tag{2.16}$$

Так як рівняння (2.16) не має дійсних коренів [126], позначимо корені цього рівняння з додатною уявною частиною через p_α і відповідні власні вектори (2.16) через $\mathbf{a}_\alpha$ (нижній індекс α тут і далі приймає значення від 1 до 4). Загальний розв’язок рівнянь (2.12) може бути представлено в виді [126]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Af}\left(z\right) + \overline{\mathbf{Af}}\left(\bar{z}\right), \tag{2.17}$$

де $\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\right]$ – матриця, складена з власних векторів системи (2.15), $\mathbf{f}\left(z\right) = \left[f_1\left(z_1\right), f_2\left(z_2\right), f_3\left(z_3\right), f_4\left(z_4\right)\right]^T$ – довільна аналітична вектор-функція, $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$, а риска означає комплексно-спряжену величину.

З використанням рівнянь (2.8) та (2.9) вектор **t**, введений в (2.13), може бути представлений у вигляді:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Bf}'(z) + \overline{\mathbf{Bf}}'(\overline{z}), \qquad (2.18)$$

де матриця **B** розмірності 4×4 визначається як

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4],$$

$$\mathbf{b}_\alpha = \left(\mathbf{R}^T + p_\alpha \mathbf{T}\right)\mathbf{a}_\alpha \text{ (сумування по } \alpha \text{ не проводиться)},$$

$$\mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4}\right]^T.$$

Далі вводимо вектори $\mathbf{L}$ та $\mathbf{P}$ формулами

$$\mathbf{L} = \left[u_1', u_2', u_3', D_3\right]^T, \quad \mathbf{P} = \left[\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, E_1\right]^T,$$

де перша похідна означає диференціювання по x_1. На основі (2.17) та (2.18), будуємо представлення у формі [109]:

$$\mathbf{L} = \mathbf{Mf}'(z) + \overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{f}}'(\overline{z}), \qquad (2.19)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Nf}'(z) + \overline{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{f}}'(\overline{z}), \qquad (2.20)$$

де матриці $\mathbf{M}$ та $\mathbf{N}$ знаходяться за допомогою перетворення матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ і мають вигляд:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ b_{4j} \end{bmatrix}_{j=1,2,3,4}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ -a_{4j} \end{bmatrix}_{j=1,2,3,4}.$$

Розглянемо тепер матеріал, складений з двох різних п'єзоелектричних напівнескінченних просторів $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$, які характеризуються відповідно параметрами $c_{ijkl}^{(1)}$, $e_{ij}^{(1)}$, $\alpha_{ij}^{(1)}$ та $c_{ijkl}^{(2)}$, $e_{ij}^{(2)}$, $\alpha_{ij}^{(2)}$.

Для побудови представлень, які будуть прийнятними для розв'язання сформульованої задачі, запишемо рівняння виду (2.19) та (2.20) для верхньої та нижньої півплощин у вигляді

$$\mathbf{L}^{(m)} = \mathbf{M}^{(m)}\mathbf{f}'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{M}}^{(m)}\bar{\mathbf{f}}'^{(m)}(\bar{z}), \tag{2.21}$$

$$\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{N}^{(m)}\mathbf{f}'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{N}}^{(m)}\bar{\mathbf{f}}'^{(m)}(\bar{z}), \tag{2.22}$$

де індекс m приймає значення 1 і 2 для верхньої та нижньої півплощини відповідно.

Покладемо далі, що $\mathbf{P}^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{P}^{(2)}(x_1,0)$ вздовж всього інтерфейсу (про $\mathbf{L}^{(m)}$ цього стверджувати не можна, бо переміщення та електрична індукція можуть бути розривними). Враховуючи, що на інтерфейсі $z \equiv x_1$, на основі (2.22) маємо:

$$\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(x_1) - \bar{\mathbf{N}}^{(2)}\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1) = \mathbf{N}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(x_1) - \bar{\mathbf{N}}^{(1)}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1). \tag{2.23}$$

Можна вважати, що ліва частина (2.23) є граничним значенням певної аналітичної в верхній півплощині вектор-функції, а права частина – деякої іншої вектор-функції, аналітичної в нижній півплощині. Тому з (2.23) випливає, що існує вектор-функція $\mathbf{C}(z)$, яка продовжує обидві вказані вектор-функції на всю площину. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що граничні умови на нескінченності є обмеженими. Це означає обмеженість $\mathbf{C}(z)$ на нескінченності. Тобто $\mathbf{C}(z)$ є аналітичною та обмеженою у всій площині. Тоді за теоремою Ліувіля, вона є деякою постійною вектор-функцією $\mathbf{C}$. Це означає:

$$\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(x_1) - \bar{\mathbf{N}}^{(2)}\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1) = \mathbf{C}, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{N}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(x_1) - \bar{\mathbf{N}}^{(1)}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1) = \mathbf{C}. \tag{2.25}$$

З огляду на довільність $\mathbf{f}'(z)$ покладемо $\mathbf{C} = 0$. Тоді на основі (2.24), (2.25) будемо мати:

$$\overline{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1) = \left(\overline{\mathbf{N}}^{(2)}\right)^{-1} \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1), \tag{2.26}$$

$$\overline{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1) = \left(\overline{\mathbf{N}}^{(1)}\right)^{-1} \mathbf{N}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(x_1). \tag{2.27}$$

Розглянемо

$$\left\langle \mathbf{L}(x_1) \right\rangle = \mathbf{L}^{(1)}(x_1) - \mathbf{L}^{(2)}(x_1). \tag{2.28}$$

Перепишемо (2.28) з врахуванням (2.26) та (2.27):

$$\left\langle \mathbf{L}(x_1) \right\rangle = \mathbf{D}\mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1), \tag{2.29}$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \overline{\mathbf{M}}^{(2)} \left(\overline{\mathbf{N}}^{(2)}\right)^{-1} \mathbf{N}^{(1)}$.

При цьому:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1) = \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \overline{\mathbf{N}}^{(1)} \overline{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1). \tag{2.30}$$

Вводячи вектор-функцію:

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{f}'^{(1)}(z), & x_3 > 0 \\ -\overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{f}}'^{(1)}(z), & x_3 < 0 \end{cases}, \tag{2.31}$$

а також матрицю:

$$\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}, \tag{2.32}$$

приходимо до таких представлень:

$$\left\langle \mathbf{L}(x_1) \right\rangle = \mathbf{W}^{+}(x_1) - \mathbf{W}^{-}(x_1), \tag{2.33}$$

$$\mathbf{P}^{(1)}\left(x_1\right)=\mathbf{S}\mathbf{W}^{+}\left(x_1\right)-\overline{\mathbf{S}}\mathbf{W}^{-}\left(x_1\right). \tag{2.34}$$

Отримані представлення (2.33) та (2.34) являють собою важливі співвідношення, використання яких є ефективним при розв'язанні змішаних задач. В цих співвідношеннях $\mathbf{S}$ – матриця розмірності 4×4, компоненти якої визначаються через фізичні характеристики півпросторів, а $\mathbf{W}=\left[W_1,W_2,W_3,W_4\right]^T$ – невідома вектор-функція, що підлягає визначенню.

Вигляд граничних умов свідчить про розривність компонент W_1, W_3, W_4. Щодо компоненти W_2, то вона є аналітичною і обмеженою у всій площині і тому за теоремою Ліувіля є константою, величина якої визначається значенням на нескінченності. Оскільки в даному розділі зовнішні навантаження, що приводять до антиплоскої задачі, вважаються відсутніми, то очевидно, що $W_2=0$ у всій площині.

Матриця $\mathbf{S}$ для біматеріалів обраного класу, поляризованих вздовж осі x_3, має наступний вигляд:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} is_{11} & 0 & s_{13} & is_{14} \\ 0 & is_{22} & 0 & 0 \\ -s_{13} & 0 & is_{33} & s_{34} \\ is_{14} & 0 & -s_{34} & is_{44} \end{bmatrix},\quad s_{ij}\in R. \tag{2.35}$$

2.3. Класична модель тріщини

Співвідношення (2.20) в розгорнутому вигляді записуються так

$$\begin{cases} \sigma_{13}^{(1)}=is_{11}\left(W_1^{+}+W_1^{-}\right)+s_{13}\left(W_3^{+}-W_3^{-}\right)+is_{14}\left(W_4^{+}+W_4^{-}\right), \\ \sigma_{33}^{(1)}=-s_{13}\left(W_1^{+}-W_1^{-}\right)+is_{33}\left(W_3^{+}+W_3^{-}\right)+s_{34}\left(W_4^{+}-W_4^{-}\right), \\ E_1^{(1)}=is_{14}\left(W_1^{+}+W_1^{-}\right)-s_{34}\left(W_3^{+}-W_3^{-}\right)+is_{44}\left(W_4^{+}+W_4^{-}\right). \end{cases} \tag{2.36}$$

Розглянемо наступну комбінацію електромеханічних величин, яка випливає з (2.36):

$$\sigma_{33}^{(1)} + i\left(m\sigma_{13}^{(1)} + nE_1^{(1)}\right) = d_1\left\{W_1^+ + i\frac{s_{33}+\alpha_1}{d_1}W_3^+ + \frac{s_{34}-\alpha_2}{d_1}W_4^+\right\} + \\ + d_2\left\{W_1^- + i\frac{s_{33}-\alpha_1}{d_2}W_3^- + \frac{-s_{34}-\alpha_2}{d_2}W_4^-\right\}, \tag{2.37}$$

де $d_1 = -s_{13} - \left(s_{11}m + s_{14}n\right)$, $d_2 = s_{13} - \left(s_{11}m + s_{14}n\right)$, $\alpha_1 = s_{13}m - s_{34}n$, $\alpha_2 = s_{14}m + s_{44}n$, $m, n \in R$.

Будемо вимагати, щоб коефіцієнти перед $W_i^\pm$ у фігурних дужках співпадали. Це призводить до системи рівнянь відносно m, n:

$$\begin{cases} \dfrac{s_{33}+\alpha_1}{d_1} = \dfrac{s_{33}-\alpha_1}{d_2}, \\ \dfrac{s_{34}-\alpha_2}{d_1} = \dfrac{-s_{34}-\alpha_2}{d_2}, \end{cases}$$

яка має два розв'язки: $\left(m_1, n_1\right)$, $\left(m_2, n_2\right)$. Введемо позначення:

$$s_j = \frac{s_{33}+\alpha_1}{d_1},\ t_j = \frac{s_{34}-\alpha_2}{d_1},\ g_j = \frac{d_{2j}}{d_{1j}}, \quad j = 1,2.$$

Тоді співвідношення (2.37) можна записати у вигляді

$$\sigma_{33}^{(1)} + i\left(m_j\sigma_{13}^{(1)} + n_jE_1^{(1)}\right) = F_j^+(x_1) + g_jF_j^-(x_1), \tag{2.38}$$

де $F_j(z) = d_{1j}\left\{W_1(z) + is_jW_3(z) + t_jW_4(z)\right\}, \quad j = 1,2.$ (2.39)

Розглянемо ще одну комбінацію електромеханічних величин, яка випливає з (2.36):

$$\sigma_{13}^{(1)} + kE_1^{(1)} =$$

$$i\left(s_{11}+ks_{14}\right)\left(W_1^+ + W_1^-\right)+\left(s_{13}-ks_{34}\right)\left(W_3^+ - W_3^-\right)+i\left(s_{14}+ks_{44}\right)\left(W_4^+ + W_4^-\right),$$

де k – дійсне.

Обираючи $k = s_{13} / s_{34}$ і позначаючи

$$C_1 = s_{11} + \frac{s_{13}}{s_{34}} s_{14},\; C_2 = s_{14} + \frac{s_{13}}{s_{34}} s_{44},$$

одержуємо

$$\sigma_{13}^{(1)} + kE_1^{(1)} = i\left\{F^+(x_1) + F^-(x_1)\right\}, \tag{2.40}$$

де $F(z) = C_1 W_1(z) + C_2 W_4(z)$ (2.41)

Таким чином на основі (2.39) та (2.41) ми приходимо до системи рівнянь відносно компонент W_1, W_3, W_4:

$$\begin{cases} F_1 = W_1 + is_1 W_3 + t_1 W_4, \\ F_2 = W_1 + is_2 W_3 + t_2 W_4, \\ F = C_1 W_1 + C_2 W_4. \end{cases} \tag{2.42}$$

На основі рівнянь (2.19), (2.38), (2.39) та (2.19), (2.40), (2.41) справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right)+i\left[m_j\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+n_jE_1^{(1)}\left(x_1,0\right)\right]=F_j^+\left(x_1\right)+g_jF_j^-\left(x_1\right), \\ \quad d_{1j}\left\{\left\langle u_1'\left(x_1\right)\right\rangle + is_j\left\langle u_3'\left(x_1\right)\right\rangle + t_j\left\langle D_3\right\rangle\right\} = F_j^+\left(x_1\right)-F_j^-\left(x_1\right), \end{cases} \tag{2.43}$$

де $j = 1,2$.

та

$$\begin{cases} -i\left[\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+kE_1^{(1)}\left(x_1,0\right)\right]=F^+\left(x_1\right)+F^-\left(x_1\right), \\ \quad C_1\left\langle u_1'\left(x_1\right)\right\rangle + C_2\left\langle D_3\right\rangle = F^+\left(x_1\right)-F^-\left(x_1\right). \end{cases} \tag{2.44}$$

Задовольняючи за допомогою перших співвідношень (2.43) та (2.44) граничним умовам (2.1), (2.5) приходимо до наступних задач лінійного спряження

$$F_j^+(x_1) + g_j F_j^-(x_1) = 0, \quad j = 1,2 \quad \text{для } x_1 \in (c,b), \tag{2.45}$$

$$F^+\left(x_1\right) + F^+\left(x_1\right) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c,b). \tag{2.46}$$

Умови на нескінченості та додаткові умови для цих задач формулюються наступним чином. Враховуючи, що для $x_1 \notin (c,b)$ $F_j^+ = F_j^- = F_j(x_1)$ та $F^+ = F^- = F(x_1)$, перші рівняння з (2.43) та (2.44) приймають вигляд

$$\begin{cases} \sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) + i[m_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1,0) + n_j E_1^{(1)}(x_1,0)] = (1+g_j)F_j(x_1), \qquad j = 1,2, \\ -i\left[\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right) + kE_1^{(1)}\left(x_1,0\right)\right] = 2F(x_1). \end{cases} \tag{2.47}$$

Беручи до уваги, що функції $F_j(z)$ та $F(z)$ аналітичні у всій комплексній площині крім відрізка $x_1 \in (c,b)$, та використовуючи задані граничні умови на нескінченності, можемо записати:

$$F_j(z)\Big|_{z\to\infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \tag{2.48}$$

де $\tilde{\sigma}_j = \dfrac{\sigma^\infty}{\theta_j}$; $\tilde{\tau}_j = -\dfrac{1}{\theta_j}(m_j \tau^\infty + n_j e^\infty)$; $\theta_j = 1 + g_j$, $j = 1,2$

та

$$F(z)\Big|_{z\to\infty} = \frac{\tau^\infty + ke^\infty}{2}. \tag{2.49}$$

З других рівнянь (2.43) та (2.44) з урахуванням умов однозначності зміщень при обході контуру, співпадаючого з берегами тріщини, та теореми Гауса [57]

$$\int_c^b \langle D_3(x_1)\rangle dx_1 = D_0 ,$$

отримуємо

$$\int_c^b \{F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)\} dx_1 = t_j D_0 , \qquad (2.50)$$

$$\int_c^b \{F^+(x_1) - F^-(x_1)\} dx_1 = C_2 D_0 . \qquad (2.51)$$

Розв'язки задач лінійного спряження (2.45) та (2.46) розшукуємо у вигляді [40, 4]:

$$F_j(z) = \frac{c_{0j} + c_{1j} z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_j}, \quad j = 1,2 , \qquad (2.52)$$

$$F(z) = \frac{c_0 + c_1 z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} , \qquad (2.53)$$

де $\varepsilon_j = \dfrac{\ln(g_j)}{2\pi}$.

Комплексні константи c_{0j}, c_{1j}, в (2.52) та c_0, c_1, в (2.53) визначаються з умов на нескінченності (2.48) та (2.49), а також з умов (2.50) та (2.51). При цьому показано [76], що умови (2.50) та (2.51) буде виконано, якщо коефіцієнт при z^{-1} в розкладанні $F_j(z)$ та $F(z)$ на нескінченності дорівнює $it_j D_0 / (2\pi)$ та $iC_2 D_0 / (2\pi)$ відповідно. Після розкладання $F_j(z)$ та $F(z)$ на нескінченності та використання умов на нескінченності (2.48) та (2.49) знаходимо:

$$F_j(z) = i\frac{t_j D_0}{2\pi}\chi_j(z) + (z - ib\varepsilon_j - ic\varepsilon_j)(\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j)\chi_j(z), \quad j = 1,2 , \qquad (2.54)$$

$$F(z)=\frac{-\frac{1}{\pi}C_2D_0+i(\tau^{\infty}+ke^{\infty})z}{2\sqrt{(c-z)(b-z)}},\tag{2.55}$$

де $\chi_j(z)=(z-c)^{-\frac{1}{2}+i\varepsilon_j}(z-b)^{-\frac{1}{2}-i\varepsilon_j}$.

З першого рівняння (2.47) одержуємо наступну формулу для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=(1+g_1)\operatorname{Re}F_1(x_1).\tag{2.56}$$

Уявна частина системи рівнянь (2.47) формує систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для визначення $\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)$ та $E_1^{(1)}(x_1,0)$:

$$\begin{cases} m_1\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+n_1E_1^{(1)}(x_1,0)=(1+g_1)\operatorname{Im}F_1^{+}(x_1),\\ \sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+kE_1^{(1)}(x_1,0)=-2\operatorname{Im}F(x_1),\end{cases}$$

з якої одержуємо

$$E_1(x_1,0)=\frac{(1+g_1)\operatorname{Im}F_1(x_1)+2m_1\operatorname{Im}F(x_1)}{n_1-m_1k},\tag{2.57}$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)=\frac{-2n_1\operatorname{Im}F(x_1)-k(1+g_1)\operatorname{Im}F_1(x_1)}{n_1-m_1k}.\tag{2.58}$$

На основі других рівнянь (2.43), (2.44) та формул (2.45), (2.46) на $x_1\in(c,b)$ маємо:

$$\begin{cases} \langle u_1'(x_1)\rangle+is_1\langle u_3'(x_1)\rangle+t_1\langle D_3(x_1)\rangle=\dfrac{g_1+1}{g_1}F_1(x_1),\\ C_1\langle u_1'(x_1)\rangle+C_2\langle D_3(x_1)\rangle=2F(x_1).\end{cases}\tag{2.59}$$

З першого рівняння (2.59) похідна розкриття тріщини буде мати вид:

$$\langle u_3'(x_1)\rangle=\frac{g_1+1}{s_1g_1}\operatorname{Im}F_1(x_1),\tag{2.60}$$

тобто розкриття тріщини на основі (2.60) записується у формі

$$\langle u_3(x_1)\rangle = \frac{g_1+1}{s_1 g_1}\int_c^{x_1} \operatorname{Im} F_1(x_1)dx_1. \tag{2.61}$$

Зокрема, при $D_0 = 0$ формула (2.61) приймає вигляд

$$\langle u_3(x_1)\rangle = \frac{g_1+1}{s_1\sqrt{g_1}}\left(\tilde{\tau}_1 \sin\left(\varepsilon_1 \ln\left(\frac{c-x_1}{b-x_1}\right)\right) + \tilde{\sigma}_1 \cos\left(\varepsilon_1 \ln\left(\frac{c-x_1}{b-x_1}\right)\right)\right)\sqrt{(c-x_1)(b-x_1)}. \tag{2.62}$$

Дійсні частини системи рівнянь (2.59) формують СЛАР для визначення $\langle u_1'(x_1)\rangle$ та $\langle D_3(x_1)\rangle$:

$$\begin{cases} \langle u_1'(x_1)\rangle + t_1\langle D_3(x_1)\rangle = \dfrac{g_1+1}{g_1}\operatorname{Re} F_1(x_1), \\ C_1\langle u_1'(x_1)\rangle + C_2\langle D_3(x_1)\rangle = 2\operatorname{Re} F(x_1). \end{cases}$$

З цієї системи отримуємо

$$\langle D_3(x_1)\rangle = \frac{\dfrac{g_1+1}{g_1} C_1 \operatorname{Re} F_1(x_1) - 2\operatorname{Re} F(x_1)}{t_1 C_1 - C_2}, \tag{2.63}$$

$$\langle u_1'(x_1)\rangle = \frac{2t_1 \operatorname{Re} F(x_1) - \dfrac{g_1+1}{g_1} C_2 \operatorname{Re} F_1(x_1)}{t_1 C_1 - C_2}. \tag{2.64}$$

Тобто всі шукані компоненти σ_{13}, σ_{33}, E_1 вздовж інтерфейсу визначені відповідно формулами (2.58), (2.56), (2.57). Знайдені також стрибок компоненти $\langle D_3\rangle$ – формула (2.63), а також розкриття $\langle u_3\rangle$ тріщини – формула (2.61).

2.4. Контактна модель тріщини

При розгляді моделі тріщини з контактною зоною (рис. 2.1) припускається, що відрізок $x_1 \in L_1$ вільний від напруження, а в зоні $x_1 \in L_2$ береги тріщини знаходяться в умовах безфрикційного контакту. Можливість врахування тільки правої контактної зони підтверджується тим, що одна контактна зона, як правило, надзвичайна коротка та її вплив на довшу контактну зону дуже малий [80, 102]. Якщо ж довша контактна зона виникає біля лівої вершини тріщини, то її розгляд можна звести до тієї ж задачі простою транспозицією півплощин.

Розглядаючи задачу плоскої деформації виключаємо, як і раніше, з розгляду W_2 . Враховуючи, що $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1)$ при $x_1 \to \infty$, з (2.20) отримуємо $\mathbf{P}^\infty = (\mathbf{S} - \overline{\mathbf{S}})\mathbf{W}^\infty$ при $x_1 \to \infty$, де $\mathbf{P}^\infty = \left[\tau^\infty, 0, \sigma^\infty, e^\infty\right]$. Звідси

$$\mathbf{W}^\infty = \left(\mathbf{S} - \overline{\mathbf{S}}\right)^{-1} \mathbf{P}^\infty .$$

Задовольняючи граничним умовам на L_1, отримуємо:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = 0,$$

звідки

$$\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1$$

або

$$\mathbf{W}^+(x_1) - (\mathbf{S})^{-1}\overline{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1. \tag{2.65}$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (2.65) може бути отриманий аналогічно [126], але ми розглянемо інший підхід.

Розглянемо довільну однорядкову матрицю $\mathbf{R} = [R_1, R_3, R_4]$. На основі (2.20) маємо

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{R}\overline{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-(x_1). \tag{2.66}$$

Введемо функцію

$$F(z) = \mathbf{TW}(z), \tag{2.67}$$

де $\mathbf{T} = [T_1, T_3, T_4] = \mathbf{RS}$.

Покладаючи $\mathbf{R\overline{S}} = -\gamma\mathbf{RS}$, рівняння (2.66) запишемо у вигляді:

$$\mathbf{RP}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1), \tag{2.68}$$

де γ та $\mathbf{R}^T$ - власні значення та власні вектори системи:

$$\left(\gamma\mathbf{S}^T + \overline{\mathbf{S}}^T\right)\mathbf{R}^T = 0, \tag{2.69}$$

а матриця $\mathbf{S}$ має структуру (2.35).

Корені рівняння $\det\left(\gamma\mathbf{S}^T + \overline{\mathbf{S}}^T\right) = 0$ мають вид

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1, \tag{2.70}$$

де $\delta^2 = \dfrac{s_{13}s_{41}s_{34} + s_{31}s_{43}s_{14} - s_{31}s_{13}s_{44} - s_{11}s_{34}s_{43}}{s_{33}\left(s_{11}s_{44} - s_{41}s_{14}\right)}$. (2.71)

Власні вектори $\mathbf{R}_j^T = \left[R_{j1}, R_{j3}, R_{j4}\right]^T$, пов'язані з власними значеннями γ_j $(j = 1,3,4)$, можуть бути знайдені з системи (2.69). Аналіз показує, що для $\delta^2 > 0$ матриця $\mathbf{R}$, складена з власних векторів $\mathbf{R}_j^T$, має наступну структуру

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & ir_{14} \\ ir_{31} & 1 & ir_{34} \\ ir_{41} & 0 & i \end{bmatrix},$$

де $r_{11} = \dfrac{s_{31}s_{44} - s_{34}s_{41}}{\delta\left(s_{11}s_{44} - s_{14}s_{41}\right)}$, $r_{14} = \dfrac{s_{11}s_{34} - s_{14}s_{31}}{\delta\left(s_{11}s_{44} - s_{14}s_{41}\right)}$, $r_{31} = -r_{11}$, $r_{34} = -r_{14}$, $r_{41} = -\dfrac{s_{43}}{s_{13}}$ визначаються з системи (2.69) для γ_1 та γ_3 відповідно. При цьому всі коефіцієнти r_{jk} являються дійсними.

Чисельний аналіз показує, що для всіх п'єзоелектричних керамік поляризованих у напрямку x_3 , справедлива нерівність $\delta^2 > 0$. Компоненти матриці

$$\mathbf{T} = \mathbf{RS}, \tag{2.72}$$

сформованої з однострокових матриць $\mathbf{T}_j = \left[T_{j1}, T_{j3}, T_{j4}\right] = \mathbf{R}_j\mathbf{S}$ $\left(j = 1,3,4\right)$ для $\delta^2 > 0$, можуть бути представлені у формі $T_{j1} = t_{j1}$, $T_{j3} = i t_{j3}$, $T_{j4} = t_{j4}$, де всі t_{jk} $\left(j,k = 1,3,4\right)$ є дійсними та $t_{43} = 0$.

Використовуючи співвідношення (2.67) та (2.68), отримуємо

$$\mathbf{R}_j\mathbf{P}^{(1)}\left(x_1, 0\right) = F_j^{+}\left(x_1\right) + \gamma_j F_j^{-}\left(x_1\right), \tag{2.73}$$

де $F_j\left(z\right) = \mathbf{T}_j\mathbf{W}\left(z\right)$. (2.74)

З останнього співвідношення витікає, що функції $F_j\left(z\right)$ мають ті ж властивості, що і $\mathbf{W}\left(z\right)$. Зокрема, для граничних умов (2.3), (2.4) та (2.6), (2.7) вони аналітичні у всій площині за винятком $\left(-\infty, +\infty\right) \setminus L$. Тоді з (2.74) маємо

$$F_j\left(z\right) = t_{j1}W_1\left(z\right) + i t_{j3}W_3\left(z\right) + t_{j4}W_4\left(z\right).$$

Враховуючи представлення (2.33), з останнього рівняння отримуємо

$$t_{j1}\left\langle u_1'\left(x_1\right)\right\rangle + i t_{j3}\left\langle u_3'\left(x_1\right)\right\rangle + t_{j4}\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle = F_j^{+}\left(x_1\right) - F_j^{-}\left(x_1\right). \tag{2.75}$$

Розкриваючи далі ліву частину (2.73) та враховуючи структуру матриці $\mathbf{R}$ приходимо до співвідношення

$$i r_{j1}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1, 0\right) + r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1, 0\right) + i r_{j4}E_1^{(1)}\left(x_1, 0\right) = F_j^{+}\left(x_1\right) + \gamma_j F_j^{-}\left(x_1\right), \tag{2.76}$$

де r_{ij} та t_{ij} $\left(i,j=1,3,4\right)$ – компоненти відомих матриць, а γ_j константи, які визначаються фізичними характеристиками матеріалів, причому $r_{13}=r_{33}=r_{44}=1$ та $r_{43}=0$; $F_j\left(z\right)$– функції, аналітичні у всій площині за виключенням області тріщини.

2.4.1. Побудова розв'язку для довільної довжини області контакту

Задовольняючи за допомогою представлень (2.75) та (2.76) граничним умовам (2.6) та (2.7), приходимо до наступної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана

$$F_k^+\left(x_1\right)+\gamma_k F_k^-\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_1, \tag{2.77}$$

$$\mathrm{Im}F_k^{\pm}\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_2,\ k=\overline{1,3}, \tag{2.78}$$

і задачі Гілберта

$$F_4^+\left(x_1\right)+F_4^-\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_1\cup L_2, \tag{2.79}$$

з умовами на нескінченності

$$F_j\left(z\right)\Big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j, \tag{2.80}$$

де $\tilde{\sigma}_j=\dfrac{r_{j3}\sigma^\infty}{\theta_j}$, $\tilde{\tau}_j=-\dfrac{1}{\theta_j}\left(r_{j1}\tau^\infty+r_{j4}e^\infty\right)$, $\left(j=1,3,4\right)$, $\theta_k=1+\gamma_k$, $\left(k=\overline{1,3}\right)$, $\theta_4=2$.

На основі (2.75) з урахуванням умов однозначності зміщень при обході контуру тріщини

$$\int_c^b\left\langle u_k'\left(x_1\right)\right\rangle dx_1=0,\ k=\overline{1,3},$$

і теореми Гауса, застосованої для контуру, співпадаючого з берегами тріщини [57]

$$\int_c^b \left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle dx_1 = D_0 ,$$

отримуємо

$$\int_c^b \left\{ F_j^+\left(x_1\right) - F_j^-\left(x_1\right)\right\} dx_1 = t_{j4} D_0 . \tag{2.81}$$

Для $k=1$ та $j=1$ задача (2.77), (2.78) та (2.80), (2.81) приймає вид

$$F_1^+\left(x_1\right) + \gamma_1 F_1^-\left(x_1\right) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1 ,\ \mathrm{Im} F_1^{\pm}\left(x_1\right) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2 , \tag{2.82}$$

$$F_1\left(z\right)\Big|_{z\to\infty} = \tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1 ,\quad \int_c^b \left\{ F_1^+\left(x_1\right) - F_1^-\left(x_1\right)\right\} dx_1 = t_{14} D_0 . \tag{2.83}$$

Розв’язок задачі виду (2.82) стосовно штампу було запропоновано в роботі [41], а стосовно міжфазної тріщини – в [108]. Використовуючи цей розв’язок, маємо

$$F_1\left(z\right) = P\left(z\right) X_1\left(z\right) + Q\left(z\right) X_2\left(z\right), \tag{2.84}$$

де $P\left(z\right) = C_1 z + C_2$, $Q\left(z\right) = D_1 z + D_2$, C_1, C_2, D_1, D_2 – дійсні коефіцієнти,

$$X_1\left(z\right) = i e^{i\phi(z)} / \sqrt{\left(z-c\right)\left(z-b\right)} ,\ X_2\left(z\right) = e^{i\phi(z)} / \sqrt{\left(z-c\right)\left(z-a\right)} ,\ \ell = b - c ,$$

$$\varphi\left(z\right) = 2\varepsilon_1 \cdot ln \frac{\sqrt{\left(b-a\right)\left(z-c\right)}}{\sqrt{\ell\left(z-a\right)} + \sqrt{\left(a-c\right)\left(z-b\right)}} ,\ \varepsilon_1 = \frac{ln\gamma_1}{2\pi} ,\ \beta = \varepsilon_1 \, ln \frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}} ,$$

$$\beta_1 = \varepsilon_1 \sqrt{\left(a-c\right)\left(b-c\right)} ,\ \lambda = \frac{b-a}{\ell} . \tag{2.85}$$

Параметр λ, обчислений за формулою (2.85), буде грати важливу роль в подальшому аналізі, так як він визначає відносну довжину контактної зони.

З умов (2.83) одержуємо, що функція $F_1\left(z\right)$ при $z\to\infty$ повинна мати наступну поведінку

$$F_1\left(z\right)\Big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_1-i\tilde{\tau}_1+\frac{it_{14}D_0}{2\pi z}.$$

Тоді одержуємо такі вирази для коефіцієнтів C_1, C_2, D_1, D_2:

$$C_1=-\tilde{\tau}_1\cos\beta-\tilde{\sigma}_1\sin\beta,\quad D_1=\tilde{\sigma}_1\cos\beta-\tilde{\tau}_1\sin\beta, \tag{2.86}$$

$$C_2=-\frac{c+b}{2}C_1-\beta_1D_1+\frac{t_{14}D_0}{2\pi}\cos\beta,\quad D_2=\beta_1C_1-\frac{c+a}{2}D_1+\frac{t_{14}D_0}{2\pi}\sin\beta. \tag{2.87}$$

Для визначення всіх електромеханічних характеристик розглянемо тепер задачу (2.70)-(2.81) при $k=4$, яка приймає вид

$$F_4^+\left(x_1\right)+F_4^-\left(x_1\right)=0\quad \text{для } x_1\in L_1\cup L_2, \tag{2.88}$$

$$F_4\left(z\right)\Big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_4-i\tilde{\tau}_4,\ \int\limits_c^b\left\{F_4^+\left(x_1\right)-F_4^-\left(x_1\right)\right\}dx_1=t_{44}D_0. \tag{2.89}$$

Розв’язок цієї задачі за методикою [40] знаходиться в аналітичному виді:

$$F_4\left(z\right)=\frac{c_0+c_1z}{\sqrt{\left(z-c\right)\left(z-b\right)}}, \tag{2.90}$$

де c_0, c_1 – визначаються з умов (2.89), які приводять до співвідношень

$$c_1=\tilde{\sigma}_4-i\tilde{\tau}_4,\ c_0=-\frac{c+b}{2}c_1+\frac{it_{44}D_0}{2\pi}. \tag{2.91}$$

Але так як $r_{43}=0$, то $\tilde{\sigma}_4=0$, $\tilde{\tau}_4=-\frac{1}{2}\left(r_{41}\tau^\infty+r_{44}e^\infty\right)=-\frac{h_4}{2}$ і значить одержуємо такий вираз

$$F_4\left(z\right)=\frac{ih_4}{2}\left(z-\frac{c+b}{2}+\frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(z-c\right)\left(z-b\right)}}. \tag{2.92}$$

2.4.2. Знаходження електромеханічних факторів на інтерфейсі

Використовуючи розв'язок (2.84) разом з формулою (2.76), отримуємо:

$$ir_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+r_{13}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)+ir_{14}E_1^{(1)}(x_1,0)=$$

$$=\left[\frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1-a}}+\frac{iP(x_1)}{\sqrt{x_1-b}}\right]\frac{\vartheta_1 exp\left[i\varphi(x_1)\right]}{\sqrt{x_1-c}} \quad \text{для } x_1>b, \qquad (2.93)$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\frac{\vartheta_1 P(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}}\left[\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}cosh\varphi_0(x_1)+sinh\varphi_0(x_1)\right]+$$

$$+\frac{\vartheta_1 Q(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}\left[cosh\varphi_0(x_1)+\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}sinh\varphi_0(x_1)\right] \quad \text{для } x_1\in L_2, \qquad (2.94)$$

де $\varphi_0(x_1)=2\varepsilon\, tan^{-1}\sqrt{\dfrac{(b-x_1)(a-c)}{(x_1-a)(b-c)}}$.

При використанні розв'язку (2.92) разом з формулою (2.76) та рівняння $r_{43}=0$ отримаємо

$$ir_{41}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+ir_{44}E_1^{(1)}(x_1,0)=2F_4(x_1)=$$

$$=ih_4\left(x_1-\frac{c+b}{2}+\frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}} \quad \text{для } x_1>b. \qquad (2.95)$$

Із співвідношення (2.93) можемо записати вираз для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$ на $x_1>b$ у вигляді:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\frac{1}{r_{13}}\left[\frac{\vartheta_1 Q(x_1)cos\varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}}-\frac{\vartheta_1 P(x_1)sin\varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}}\right] \quad \text{для } x_1>b. \qquad (2.96)$$

З системи лінійних алгебраїчних рівнянь, скомпонованої з уявних частин рівнянь (2.93) та (2.95) на $x_1 > b$, можна легко визначити вирази для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$ та $E_1^{(1)}(x_1,0)$.

Підстановка розв'язку (2.84) у формулу (2.75) приводить до співвідношень:

$$t_{11}\langle u_1'(x_1)\rangle + it_{13}\langle u_3'(x_1)\rangle + t_{14}\langle D_3(x_1)\rangle =$$

$$= 2\sqrt{\alpha}\left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} - \frac{iQ(x_1)}{\sqrt{a-x_1}}\right]\frac{exp\left[i\varphi^*(x_1)\right]}{\sqrt{x_1-c}} \quad \text{для } x_1 \in L_1, \quad (2.97)$$

$$t_{11}\langle u_1'(x_1)\rangle + t_{14}\langle D_3(x_1)\rangle =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(x_1-c)}}\left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{(b-x_1)}}cosh\varphi_0(x_1) - \frac{Q(x_1)}{\sqrt{(x_1-a)}}sinh\varphi_0(x_1)\right] \quad \text{для } x_1 \in L_2, \quad (2.98)$$

де $\varphi^*(x_1) = 2\varepsilon\, ln\dfrac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{\ell(a-x_1)} - \sqrt{(a-c)(b-x_1)}}$, $\alpha = \dfrac{(\gamma_1+1)^2}{4\gamma_1}$.

Підставляючи рівняння (2.92) в (2.75) з $j=4$ та беручи до уваги $t_{43}=0$, отримуємо для $x_1 \in L_1 \cup L_2$:

$$t_{41}\langle u_1'(x_1)\rangle + t_{44}\langle D_3(x_1)\rangle = \left(x_1 - \frac{c+b}{2} + \frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{h_4}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}}. \quad (2.99)$$

З рівняння (2.97) похідна розкриття тріщини буде мати вид:

$$\langle u_3'(x_1)\rangle = \frac{2\sqrt{\alpha}}{t_{13}}\left[\frac{P(x_1)sin\varphi^*(x_1)}{\sqrt{(b-x_1)(x_1-c)}} - \frac{Q(x_1)cos\varphi^*(x_1)}{\sqrt{(a-x_1)(x_1-c)}}\right], \quad (2.100)$$

тобто розкриття тріщини на основі (2.100) для $x_1 \in L_1$ записується у формі

$$\left\langle u_3\left(x_1\right)\right\rangle = \frac{2\sqrt{\alpha}}{t_{13}} \int\limits_c^{x_1} \left[\frac{P\left(x_1\right) sin\,\varphi^*\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(b-x_1\right)\left(x_1-c\right)}} - \frac{Q\left(x_1\right) cos\,\varphi^*\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(a-x_1\right)\left(x_1-c\right)}} \right] dx_1 \text{ для } x_1 \in L_1 . \quad (2.101)$$

З системи лінійних алгебраїчних рівнянь, скомпонованих з дійсних частин рівнянь (2.97) та (2.99) на $x_1 \in L_1$ та рівнянь (2.98) та (2.99) на $x_1 \in L_2$, можна визначити вирази для $\left\langle u_3'\left(x_1\right)\right\rangle$ та $\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle$.

2.4.3. Коефіцієнти інтенсивності

Введемо коефіцієнти інтенсивності напружень та електричного поля так:

$$k_1 = lim_{x_1 \to a+0} \sqrt{2\pi\left(x_1 - a\right)} \sigma_{33}^{(1)}\left(x_1, 0\right), \; k_2 = lim_{x_1 \to b+0} \sqrt{2\pi\left(x_1 - b\right)} \sigma_{13}^{(1)}\left(x_1, 0\right),$$

$$k_E = lim_{x_1 \to b+0} \sqrt{2\pi\left(x_1 - b\right)} E_1^{(1)}\left(x_1, 0\right). \quad (2.102)$$

Використовуючи рівняння (2.94) для визначення k_1, та беручи до уваги, що $\varphi_0\left(a\right) = ln\sqrt{\gamma_1}$, можемо записати

$$k_1 = \vartheta_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\left(a-c\right)}} Q\left(a\right). \quad (2.103)$$

Для визначення k_2 та k_E помножимо ліву та праву частини рівнянь (2.93) та (2.95) на $\sqrt{2\pi\left(x_1 - b\right)}$ та розглянемо при $x_1 \to b$. Отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$r_{11}k_2 + r_{14}k_E = \theta_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\ell}} P\left(b\right), \quad r_{41}k_2 + r_{44}k_E = h_4 \sqrt{\frac{\ell\pi}{2}} + t_{44} D_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\ell}}, \quad (2.104)$$

де $P\left(b\right) = \dfrac{\ell h_5}{2\theta_1}$, $h_5 = \left(h_1 - 2\varepsilon\sqrt{1-\lambda}\sigma^\infty + \dfrac{t_{14}}{\pi\ell} D_0 \theta_1\right) cos\,\beta - \left(\sigma^\infty + 2\varepsilon\sqrt{1-\lambda} h_1\right) sin\,\beta$, $h_1 = r_{11}\tau^\infty + r_{14}e^\infty$.

Розв'язок системи (2.104) представлений наступними виразами для коефіцієнтів інтенсивності механічного напруження k_2 та електричного поля k_E:

$$k_2 = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \frac{r_{44}h_5 - r_{14}h_1}{r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}} - \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{r_{14}t_{44}D_0}{r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}},$$

$$k_E = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \frac{r_{11}h_4 - r_{41}h_5}{r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}} + \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{r_{11}t_{44}D_0}{r_{11}r_{44} - r_{14}r_{41}}. \qquad (2.105)$$

2.4.4. Знаходження дійсної довжини зони контакту

Розв'язок задачі для міжфазної тріщини, отриманий у попередньому розділі, математично справедливий для будь-якого значення точки a. Але, щоб зберегти фізичний сенс отриманих результатів, повинні задовольнятись наступні нерівності

$$\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right) \le 0 \text{ для } x_1 \in L_2, \ \left\langle u_3\left(x_1\right)\right\rangle \ge 0 \text{ для } x_1 \in L_1. \qquad (2.106)$$

Позицію точки a (або параметр λ) можна знайти з умови рівності нулю КІН k_1, що приводить до такого трансцендентного рівняння відносно λ:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sigma^{\infty}\sqrt{1-\lambda} + 2\varepsilon_1 h_1}{2\varepsilon_1\sigma^{\infty} - h_1\sqrt{1-\lambda} - s\left(\lambda\right)}, \qquad (2.107)$$

де $s\left(\lambda\right) = \dfrac{t_{14}D_0\left(1+\gamma_1\right)}{\pi\sqrt{\left(a-c\right)\left(b-c\right)}}$.

Вибір максимального кореня рівняння (2.107) з інтервалу $\left(0{,}1\right)$ забезпечує виконання обох нерівностей (2.106) за винятком дуже малої зони осциляції біля лівої вершини тріщини, якою нехтуємо. Розв'язок рівняння (2.107) знаходиться чисельно, а для малих значень λ – по асимптотичній формулі, яка легко отримується з (2.107):

$$\lambda_0 \approx \tilde{\lambda}_0 = 4exp\left\{\varepsilon_1^{-1}\left[arctg\left(\frac{\sigma^{\infty}+2\varepsilon_1 h_1}{-h_1+2\varepsilon_1\sigma^{\infty}-t_{13}D_0\left(1+\gamma_1\right)/\pi/l}\right)+\pi n\right]\right\}, \qquad (2.108)$$

де n – ціле число, яке вибирається для визначення максимального кореня на інтервалі (0, 1) рівняння (2.108).

2.5. Чисельна ілюстрація результатів та їх аналіз

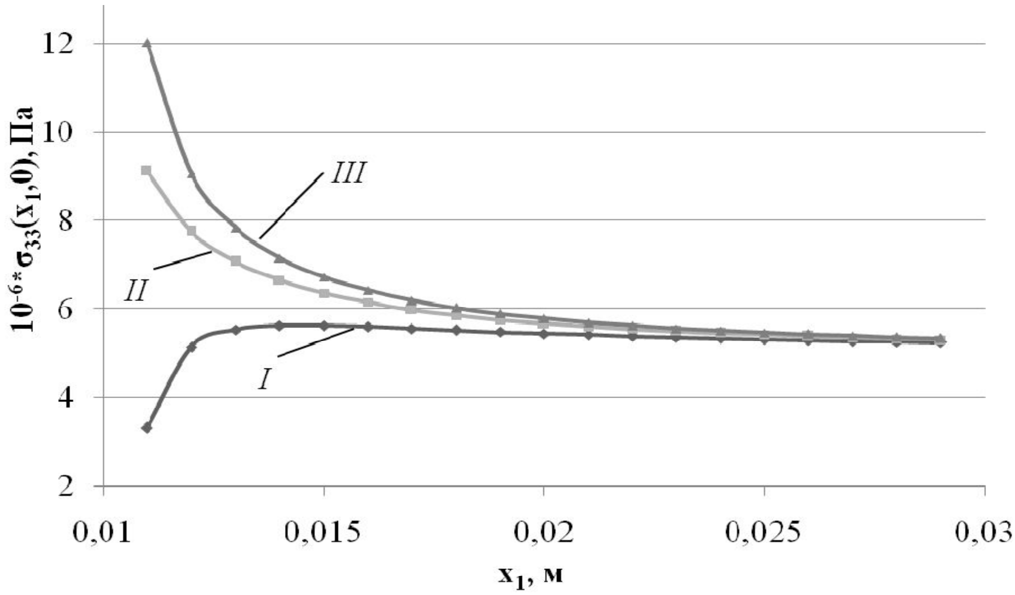
Виберемо матеріали PZT-4 (верхній матеріал) та PZT-5H (нижній). В таблиці 2.1 наведені матриці матеріалів PZT-4 та PZT-5H (пружних, п'єзоелектричних, діелектричних властивостей відповідно) у випадку, коли вісь поляризації співпадає з додатнім напрямом x_3.

Таблиця 2.1

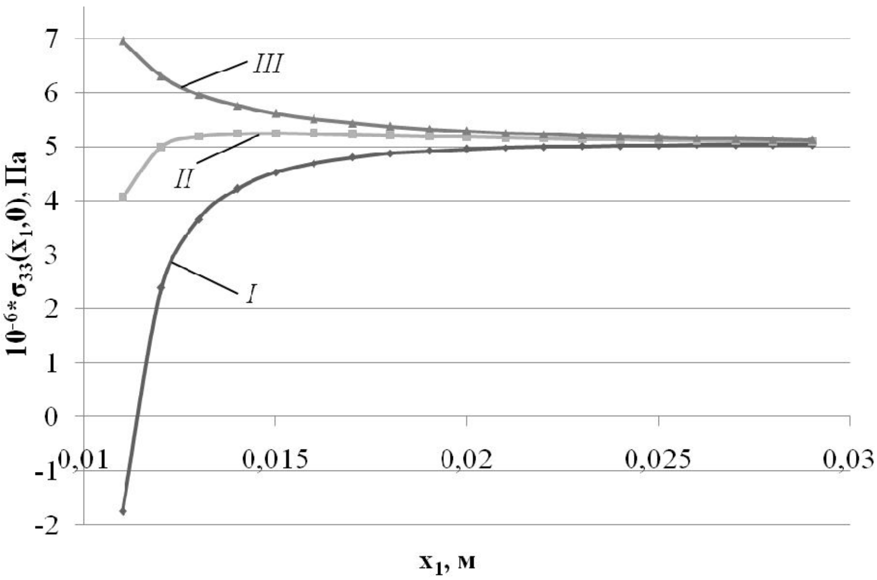
Характеристики п'єзокерамік

Матеріал	c_{11}	c_{33}	c_{13}	c_{44}	e_{31},	e_{15},	e_{33},	α_{11}	α_{33}
	$\times 10^{-10}$, Па				Кл/м^2			$\times 10^{10}$, Ф/м	
PZT-4	13,9	11,3	7,43	2,56	-6,98	13,4	13,8	60,0	54,7
PZT-5H	12,6	11,7	5,30	3,53	-6,50	17,0	23,3	151	130

Для розрахунків вибирались $c=-0,01$ м, $b=0,01$ м, $\sigma^{\infty}=0,5\times 10^{7}$ Па, $\tau^{\infty}=0$ Па, а величини D_0 і e^{∞} варіювались. Відповідні результати розрахунків для класичної моделі тріщини для різних D_0 і e^{∞} показані на рисунках 2.2 – 2.5.



а)

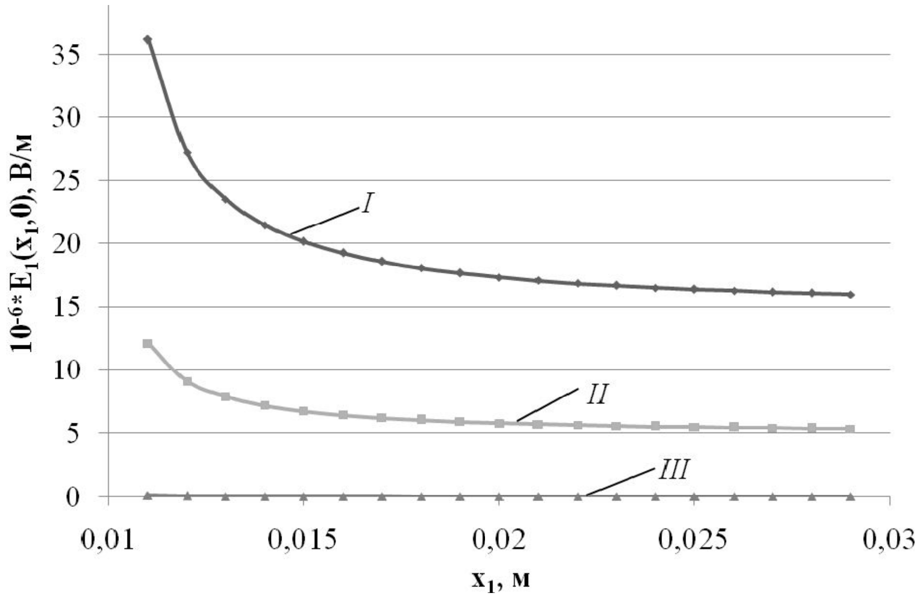


б)

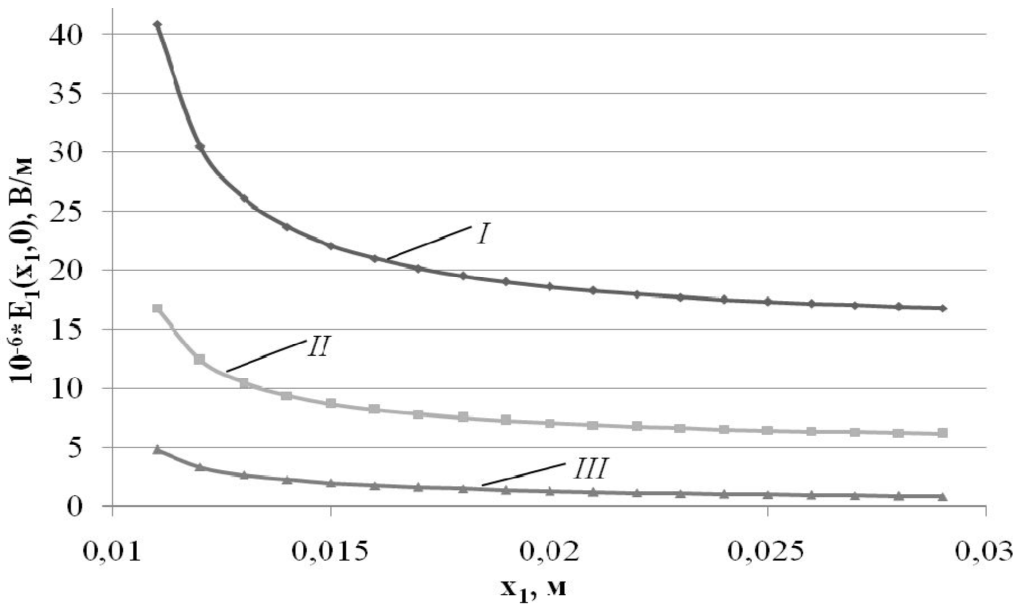
Рис. 2.2. – Розподіл $\sigma_{33}(x_1,0)$ по інтерфейсу на продовжені тріщини при

$\sigma^{\infty} = 0{,}5\times10^{7}$ Па : а) – для $D_0 = 0$; б) – для $D_0 = -0{,}002$ Кл/м

(I – для $e^{\infty} = 1{,}5\times10^{7}$ В/м, II – для $e^{\infty} = 0{,}5\times10^{7}$ В/м, III – для $e^{\infty} = 0$ В/м)

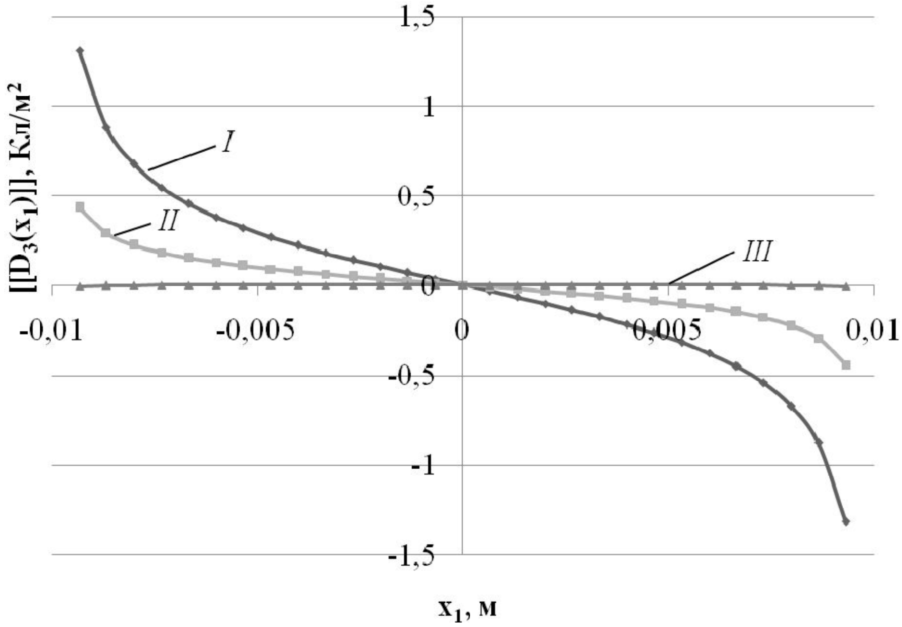


а)

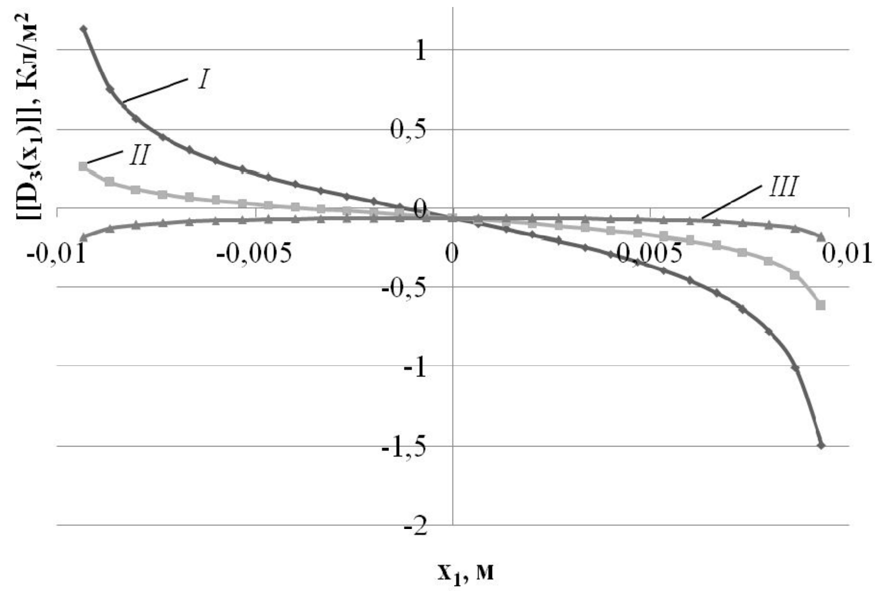


б)

Рис. 2.3. – Розподіл $E_1(x_1,0)$ по інтерфейсу на продовжені тріщини при $\sigma^\infty = 0{,}5\times10^7$ Па : а) – для $D_0 = 0$; б) – для $D_0 = -0{,}002$ Кл/м (I – для $e^\infty = 1{,}5\times10^7$ В/м, II – для $e^\infty = 0{,}5\times10^7$ В/м, III – для $e^\infty = 0$ В/м)



а)

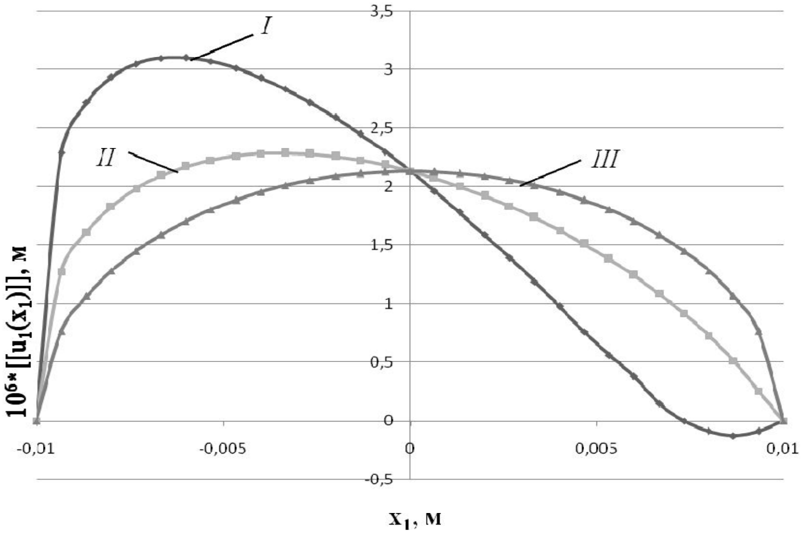


б)

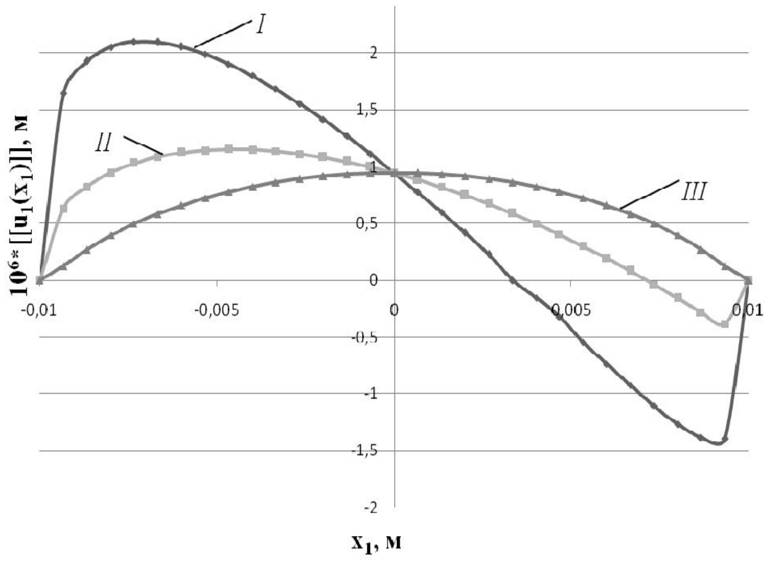
Рис. 2.4. – Розподіл $\left\langle D_3(x_1,0)\right\rangle$ вздовж тріщини при $\sigma^{\infty}=0,5\times10^{7}$ Па:

а) – для $D_0=0$; б) – для $D_0=-0,002$ Кл/м

(I – для $e^{\infty}=1,5\times10^{7}$ В/м, II – для $e^{\infty}=0,5\times10^{7}$ В/м, III – для $e^{\infty}=0$ В/м)



а)



б)

Рис. 2.5. – Розподіл $\langle u_3(x_1,0)\rangle$ вздовж тріщини при $\sigma^\infty = 0,5\times10^7$ Па :

а) – для $D_0 = 0$; б) – для $D_0 = -0,002$ Кл/м

(I – для $e^\infty = 1,5\times10^7$ В/м, II – для $e^\infty = 0,5\times10^7$ В/м, III – для $e^\infty = 0$ В/м)

Розглянемо тепер результати розрахунків, одержані при використанні контактної моделі тріщини.

В якості матеріалів знову виберемо PZT-4 (верхній матеріал) та PZT-5H (нижній). Для розрахунків вибирались $c=-0{,}01$ м, $b=0{,}01$ м, $\sigma^{\infty}=10^{6}$ Па, $\tau^{\infty}=0$ Па, а величини D_0 і e^{∞} варіювались.

В таблиці 2.2 наведено варіацію відносної довжини контактної зони λ_0, коефіцієнта інтенсивності дотичного напруження k_2 та коефіцієнта інтенсивності електричного поля k_E в залежності від нормального напруження σ^{∞} для біматеріалу PZT-4/PZT-5H та $e^{\infty}=-10^{7}$ В/м.

Таблиця 2.2

Залежність параметрів λ_0, k_2, k_E від нормального напруження σ^{∞} при $e^{\infty}=-10^{7}$ В/м, $\tau^{\infty}=0$ Па, $D_0=-0{,}001$ Кл/м

$\sigma^{\infty}\left(\text{МПа}\right)$	λ_0	$k_2\left(\text{Н/м}^{3/2}\right)$	$-k_E\left(\text{Кл/м}^{3/2}\right)$
0,5	0,3800	-1,43854×10^{8}	1,32023×10^{7}
1	0,3334	-1,43852×10^{8}	1,32023×10^{7}
2	0,2481	-1,43849×10^{7}	1,32024×10^{7}
3,5	0,1484	-1,43841×10^{7}	1,32026×10^{7}
6	0,0561	-1,43821×10^{7}	1,32031×10^{7}
10	0,0106	-1,43786×10^{7}	1,32043×10^{7}
20	0,0002	-1,43517×10^{7}	1,32103×10^{7}

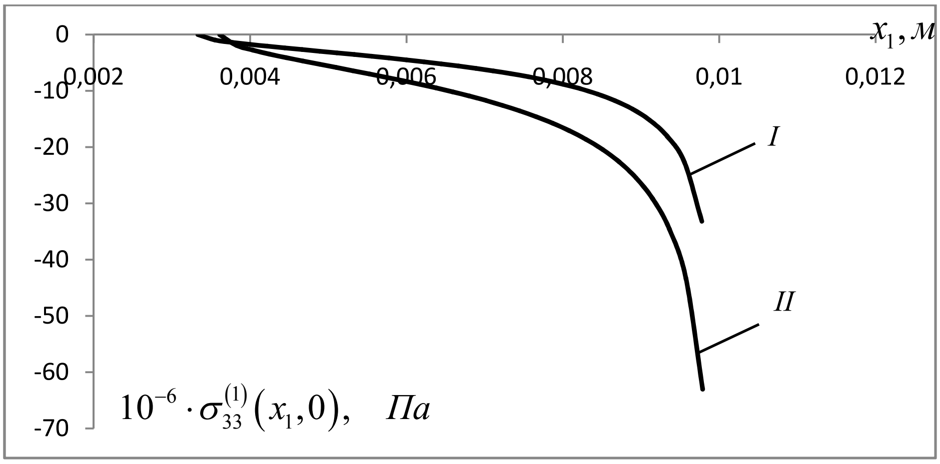
В таблиці 2.3 показана залежність довжини зони контакту від величини D_0 ($e^{\infty}=-10^{7}$ В/м, $\sigma^{\infty}=10^{6}$ Па, $\tau^{\infty}=0$ Па). Видно, що навіть при відсутності зсувного поля напружень зона контакту при вибраному електричному полі є досить значною і вона суттєво змінюється в залежності від D_0.

Таблиця 2.3

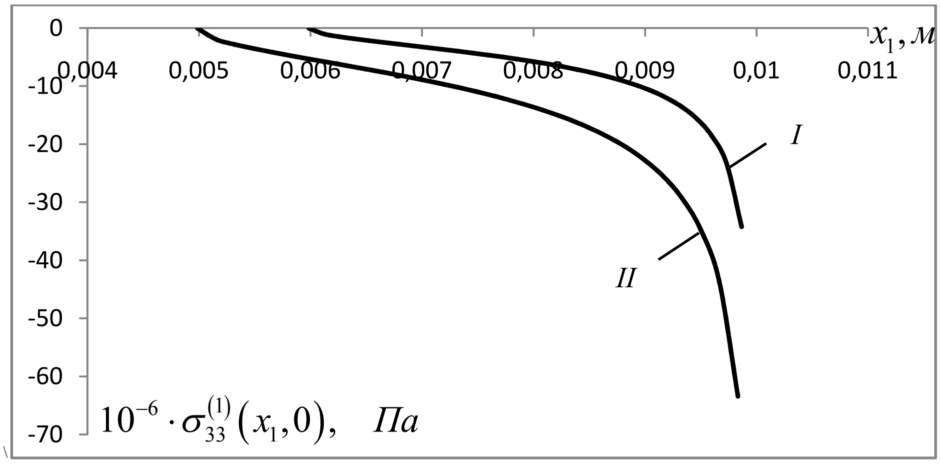
Залежність параметра λ від сумарного заряду тріщини D_0

$10^{4}D_0$, Кл/м	2	1	0	-1	-2	-5	-10
λ	0,201	0,211	0,221	0,232	0,243	0,276	0,333

На рис. 2.6 для різних D_0 і e^{∞} наведені графіки зміни нормального напруження в зоні контакту берегів тріщини (I – для $e^{\infty} = -10^7$ В/м, II – для $e^{\infty} = -2 \cdot 10^7$ В/м), а на рис. 2.7 – відповідні графіки зміни стрибка нормального переміщення в її відкритій частині (I – для $e^{\infty} = -0{,}5 \times 10^7$ В/м, II – для $e^{\infty} = -10^7$ В/м). Вказані графіки підтверджують виконання нерівностей (2.102) для знайдених значень $\lambda = \lambda_0$.



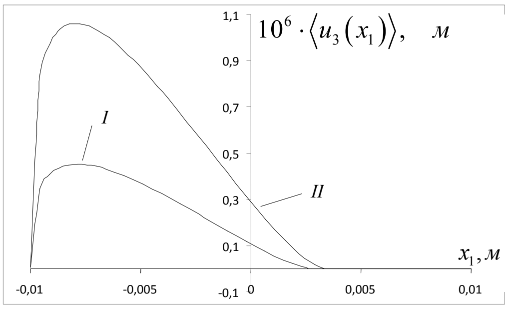
а)

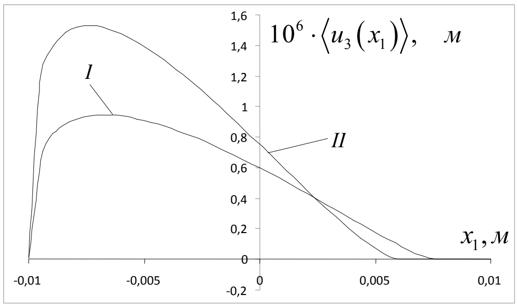


б)

Рис. 2.6. – Розподіл $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ вздовж зони контакту при $\sigma^{\infty} = 10^6$ Па:

а) – для $D_0 = -0{,}001$ Кл/м; б) – для $D_0 = 0{,}0002$ Кл/м

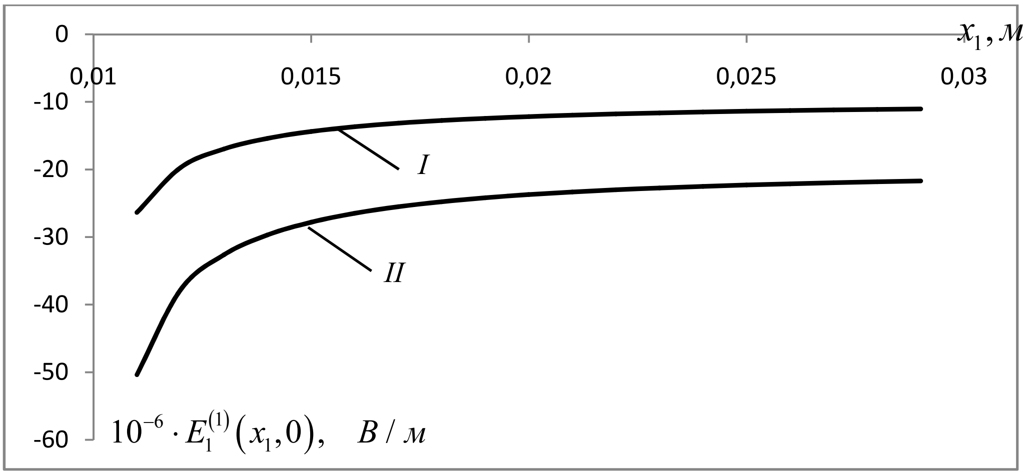




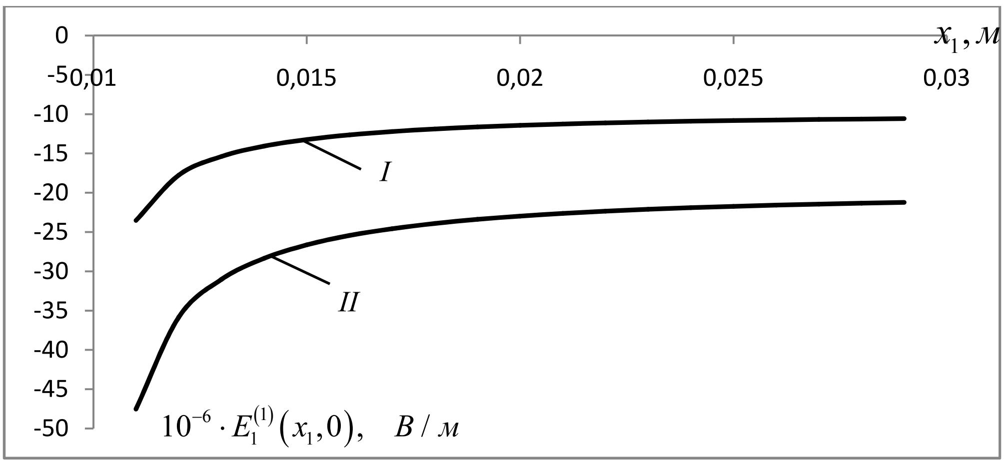
а) б)

Рис. 2.7. – Розподіл $\langle u_3(x_1,0) \rangle$ вздовж тріщини при $\sigma^\infty = 10^6$ Па

а) – для $D_0 = -0{,}001$ Кл/м, б) - для $D_0 = 0{,}0002$ Кл/м



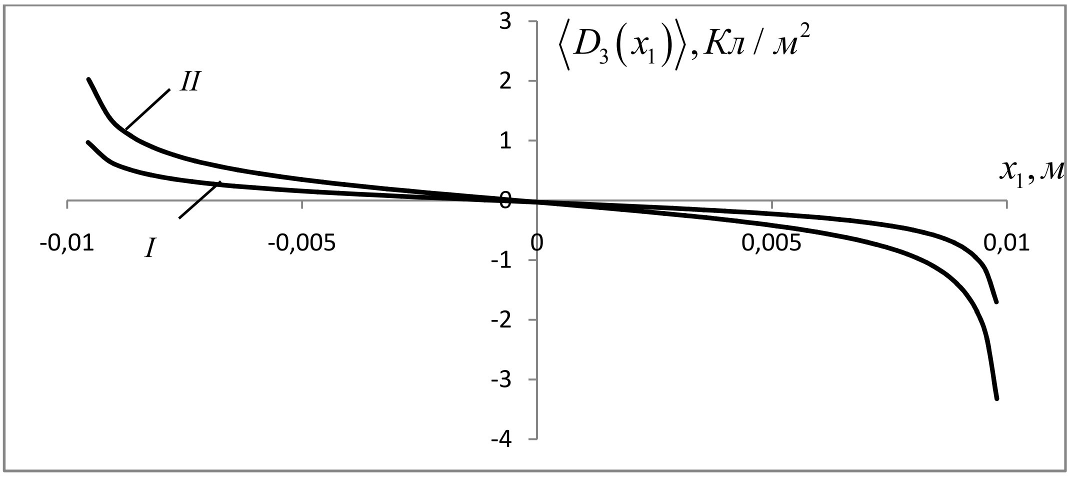
а)



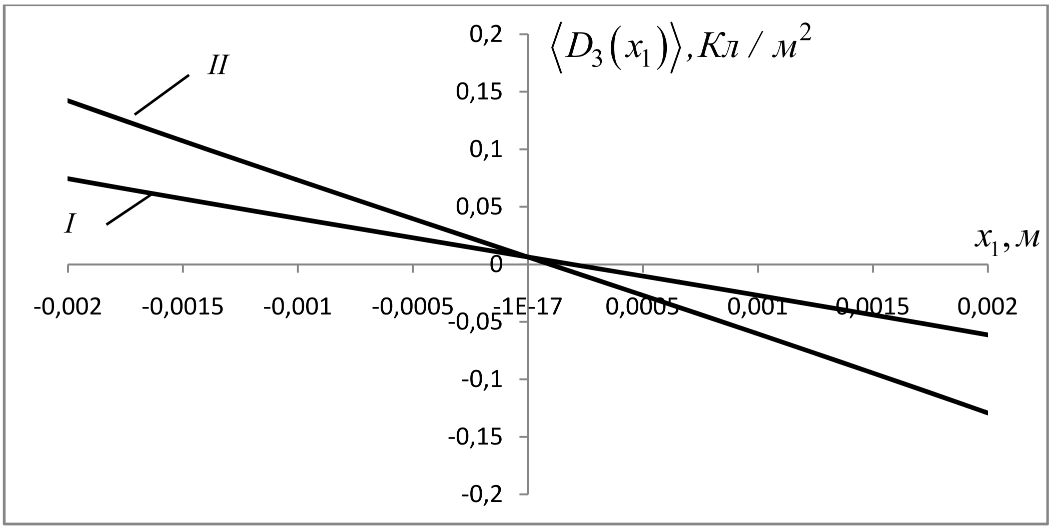
б)

Рис. 2.8. – Розподіл $E_1^{(1)}(x_1,0)$ на продовженні тріщини при $\sigma^\infty = 10^6$ Па:

а) – для $D_0 = -0{,}001$ Кл/м; б) - для $D_0 = 0{,}0002$ Кл/м



а)



б)

Рис.2.9. – Розподіл $\langle D_3(x_1)\rangle$ вздовж тріщини при $\sigma^\infty = 10^6$ Па:

а) – для $D_0 = -0{,}001$ Кл/м; б) – для $D_0 = 0{,}0002$ Кл/м

На рис. 2.8 для різних значень D_0 і e^∞ наведені графіки зміни електричного поля на продовженні тріщини (I – для $e^\infty = -10^7$ В/м, II – для $e^\infty = -2\cdot 10^7$ В/м). Видно, що при від'ємному e^∞ це поле стрімко зменшується при підході до вершини тріщини, а потім зростає до своїх номінальних значень при віддаленні від неї. Якщо ж e^∞ задавати додатними, то графіки будуть симетричні до наведених на рис. 2.8 відносно осі x_1. Очевидно також, що електричне поле суттєво залежить як від e^{∞}, так і від D_0.

На рис. 2.9 наведені відповідні графіки зміни стрибка $\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle$ вздовж області тріщини (I – для $e^{\infty}=-10^7$ В/м, II – для $e^{\infty}=-2\cdot 10^7$ В/м). Оскільки для усього проміжку (-0,01; 0,01) криві 2.9 (б) візуально практично не відрізняються від відповідних кривих 2.9 (а), то графіки 2.9 (б) побудовані для проміжку (-0,002; 0,002). Це дає можливість продемонструвати несиметрію $\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle$, яка пов'язана з наявністю заряду D_0.

2.6. Висновки

У даному розділі розглянута задача для класичної моделі тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією віддаленого електромеханічного навантаження. Тріщина вважалася електродованою, тобто її береги розглядались як електропровідні. На тріщині крім того був заданий сумарний заряд, а також задавалось електромеханічне навантаження на нескінченності.

З застосуванням аналітичного підходу, що базується на представлені електромеханічних факторів через кусково-аналітичні функції, було отримано точний розв'язок цієї задачі у виді досить простих аналітичних формул. Тобто були знайдені компоненти напружень σ_{13}, σ_{33} та електричного поля E_1 вздовж інтерфейсу, стрибок компоненти $\left\langle D_3\right\rangle$ на включенні, а також розкриття $\left\langle u_3\right\rangle$ тріщини.

З аналітичного аналізу результатів та візуалізації даних видно виникнення осцилюючої особливості шуканих факторів в вершинах тріщини. Ця особливість може призводити до фізично нереального взаємного проникнення берегів тріщини. Для більшості варіантів електромеханічних полів зони проникнення є дуже малими та їх можна не враховувати, а для деяких видів навантаження вони є значними, і саме в таких випадках слід використовувати інші моделі тріщини.

Цікаво також відзначити, що інтенсивність електричного поля і навіть величина сумарного заряду на тріщині досить суттєво впливає на електромеханічні поля в околі тріщини та на її розкриття.

Також було розглянуто тріщину з контактною зоною. З аналітичного аналізу результатів та візуалізації даних видно, що як віддалене електричне поле, так і сумарний заряд тріщини суттєво впливають на довжину зони контакту (a,b) та електромеханічні характеристики в околі тріщини. При цьому вказані фактори можуть привести до виникнення значних областей контакту берегів тріщини навіть при відсутності полів зовнішніх зсувних напружень.

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРИЧНО ЗАРЯДЖЕНА, ЕЛЕКТРОПРОВІДНА ТА МАГНІТНОПРОНИКНА ТРІЩИНА В П’ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ/П’ЄЗОМАГНІТНОМУ МАТЕРІАЛІ

Даний розділ присвячений задачі знаходження електромеханічних факторів та відносної довжини зони контакту для біматеріального п’єзоелектромагнітного простору з електродованою електрично зарядженою магнітнопроникною тріщиною на межі поділу матеріалів під дією електричного, магнітного полів та механічного навантаження на нескінченності.

3.1. Загальний розв’язок основних рівнянь електромагнітопружності

Визначальні співвідношення електромагнітопружності для п’єзоелектромагнітного матеріалу в прямокутній системі координат x_j $\left(j=1,2,3\right)$ можуть бути записані в виді [123]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijks}\gamma_{ks} - e_{sij}E_s - h_{sij}H_s \ , \\ D_i = e_{iks}\gamma_{ks} + \alpha_{is}E_s + d_{is}H_s \ , \\ B_i = h_{iks}\gamma_{ks} + d_{is}E_s + \mu_{is}H_s \ , \end{cases} \tag{3.1}$$

де σ_{ij}, γ_{ij} – компоненти тензорів напружень і деформацій; D_i, B_i – компоненти векторів електричної та магнітної індукцій; E_i, H_i – компоненти напруженості електричного та магнітного полів; i, j, k, l набувають значень $\{1,2,3\}$ і проходять підсумування за індексами, що повторюються.

Рівняння рівноваги за відсутності в середовищі масових сил і вільних зарядів такі:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \ D_{i,i} = 0, \ B_{i,i} = 0, \tag{3.2}$$

де $,j$ означає диференціювання за x_j. Вирази для деформацій, напруженості електричного та магнітного полів мають вид:

$$\gamma_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ E_i = -\varphi_{,i},\ H_i = -\psi_{,i}, \tag{3.3}$$

де u_i – компоненти поля переміщень; φ , ψ – відповідно електричний і магнітний потенціали.

З (3.1), (3.2), (3.3) витікають рівняння:

$$\begin{cases} (c_{ijks}u_k + e_{sij}\varphi + h_{sij}\psi)_{,si} = 0, \\ (e_{iks}u_k - \alpha_{is}\varphi - d_{is}\psi)_{,si} = 0, \\ (h_{iks}u_k - d_{is}\varphi - \mu_{is}\psi)_{,si} = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Для найбільш важливого для практики трансверсально-ізотропного матеріалу з віссю симетрії x_3 в умовах плоскої деформації в площині (x_1, x_3) рівняння (3.1) можна представити в виді:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & h_{31} \\ 0 & h_{33} \\ h_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{15} \\ h_{31} & h_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 \\ 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{Bmatrix}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Із співвідношень (3.5) витікає, що для розглянутого випадку, який є трансверсально-ізотропним, більша частина коефіцієнтів в співвідношеннях (3.1) дорівнює 0. При переході від співвідношень (3.4) до (3.5) використовується загальноприйнята перенумерація індексів, аналогічна [50]. Слід відмітити, що до вказаних матеріалів відносяться п’єзоелектричні/п’єзомагнітні кераміки.

Введемо вектори:

$$\mathrm{V} = \{u_1,\ \ u_2,\ \ u_3,\ \ \varphi,\ \ \psi\}^T,\ \mathbf{t} = \{\sigma_{31},\ \ \sigma_{32},\ \ \sigma_{33},\ \ D_3,\ \ B_3\}^T. \tag{3.6}$$

Оскільки всі поля не залежать від координати x_2, то розв’язок рівнянь (3.4) відповідно з методом, запропонованого в [81] для анізотропного матеріалу, може бути представлено в виді:

$$\mathbf{V} = \mathbf{af}(z), \tag{3.7}$$

де $z = x_1 + px_3$, вектор $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T$ знаходять з рівняння:

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}]\,\mathbf{a} = 0, \tag{3.8}$$

а елементи матриць **Q**, **R** та **T** розмірності 5×5 визначають як

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1121} & c_{1131} & e_{111} & h_{111} \\ c_{1211} & c_{1221} & c_{1231} & e_{121} & h_{121} \\ c_{1311} & c_{1321} & c_{1331} & e_{131} & h_{131} \\ e_{111} & e_{121} & e_{131} & -\alpha_{11} & -d_{11} \\ h_{111} & h_{121} & h_{131} & -d_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{1112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{211} & h_{211} \\ c_{1212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{221} & h_{221} \\ c_{1312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{231} & h_{231} \\ e_{112} & e_{122} & e_{132} & -\alpha_{12} & -d_{12} \\ h_{112} & h_{122} & h_{132} & -d_{12} & -\mu_{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{2112} & c_{1122} & c_{1132} & e_{212} & h_{212} \\ c_{2212} & c_{1222} & c_{1232} & e_{222} & h_{222} \\ c_{2312} & c_{1322} & c_{1332} & e_{232} & h_{232} \\ e_{212} & e_{222} & e_{232} & -\alpha_{22} & -d_{22} \\ h_{212} & h_{222} & h_{232} & -d_{22} & -\mu_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Ненульовий розв’язок системи (3.8) існує, якщо p являє собою корінь рівняння:

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}] = 0. \tag{3.10}$$

Так як рівняння (3.10) не має дійсних коренів [126], позначимо корені цього рівняння з додатною уявною частиною через p_α, а відповідні власні вектори (3.7) через $\mathbf{a}_\alpha$ (нижній індекс α тут і далі набуває значень від 1 до 5). Загальний розв’язок рівнянь (3.1), (3.2) може бути представлено в вигляді [126]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Af}(z) + \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{f}}(\bar{z}), \qquad (3.11)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$ – матриця, складена з власних векторів системи (3.8), $\mathbf{f}(z) = [\ f_1(z_1), f_2(z_2),\ f_3(z_3), f_4(z_4), f_5(z_5)\ ]^{\mathrm{T}}$ – довільна аналітична вектор-функція, $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$, а риска означає комплексно-спряжену величину.

З використанням рівнянь (3.1) вектор **t**, введений в (3.6), може бути представлений у вигляді:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Bf}'(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \qquad (3.12)$$

де матриця **B** розмірності 5×5 визначається як

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5],$$

$\mathbf{b}_\alpha = (\mathbf{R}^T + p_\alpha \mathbf{T})\mathbf{a}_\alpha$ (підсумування за α не проводиться),

$$\mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4}, \frac{df_5(z_5)}{dz_5} \right]^T.$$

Далі, вводячи вектори **L** та **P** формулами $\mathbf{L} = \left[u_1', u_2', u_3', D_3, B_3\right]^T$, $\mathbf{P} = \left[\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, E_1, H_1\right]^T$, на основі (3.11) та (3.12), будуємо вирази:

$$\mathbf{L} = \mathbf{Mf}'(z) + \overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \qquad (3.13)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Nf}'(z) + \overline{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \qquad (3.14)$$

де матриці $\mathbf{M}$ та $\mathbf{N}$ знаходимо перетворенням матриць $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ b_{4j} \\ b_{5j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ -a_{4j} \\ -a_{5j} \end{bmatrix}.$$

У результаті аналізу аналогічно до попереднього розділу отримуємо

$$\left\langle \mathbf{L}(x_1) \right\rangle = \mathbf{W}^{+}(x_1) - \mathbf{W}^{-}(x_1), \tag{3.15}$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S}\mathbf{W}^{+}(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^{-}(x_1), \tag{3.16}$$

де $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{N}}^{(2)}\right)^{-1}\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{L} = \left[u_1', u_2', u_3', D_3, B_3\right]^T$, $\mathbf{P} = \left[\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, E_1, H_1\right]^T$.

3.2. Постановка задачі

Розглядається електродована тріщина на проміжку (c, b) між двома напівнескінченими п'єзоелектромагнітними півпросторами $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, поляризованими за напрямком x_3 і зчеплених на інтерфейсі $x_3 = 0$, під дією зовнішніх механічного навантаження, електричного та магнітного полів (рис. 3.1).

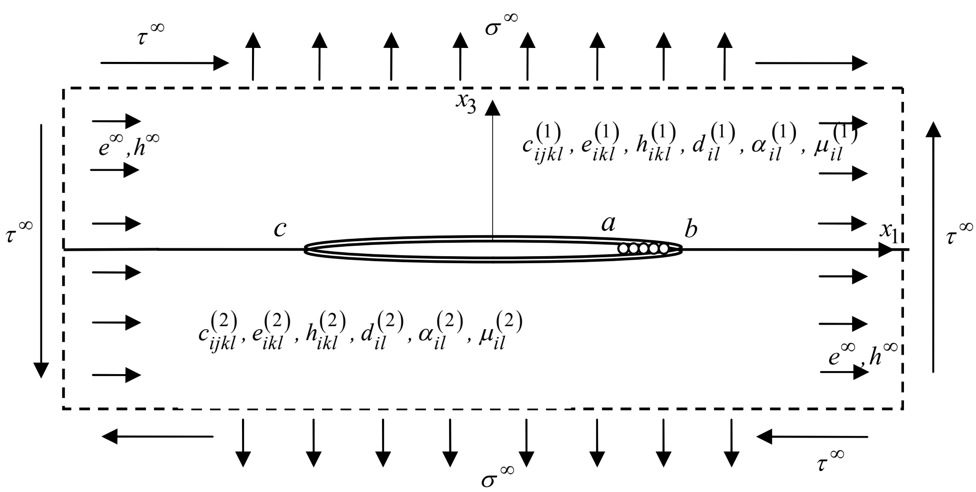


Рис. 3.1

Тут $\sigma^\infty, \tau^\infty$ – рівномірно розподілені нормальне та дотичне напруження відповідно, прикладені на нескінченності; e^∞, h^∞ – відповідно електричне та магнітне поля, діючі на нескінченності; c_{ijks} – пружні, e_{iks} – п'єзоелектричні, h_{iks}

– п'єзомагніті, d_{is} – електромагнітні константи, α_{is}, μ_{is} – діелектричні і магнітні проникності відповідно. Для випадку біматеріала вони використовуються з верхніми індексами (1) і (2) для верхнього та нижнього півпросторів відповідно. Всі поля припускаються незалежними від координати x_2.

Електродована тріщина (рис. 3.1) вважається електропровідною, тобто на її берегах $E_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=E_1^{(2)}\left(x_1,0\right)=0.$ Припускаємо також, що тріщина магнітнопроникна, тобто, з урахуванням умов на інтерфейсі поза тріщиною, маємо:

$$H_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=H_1^{(2)}\left(x_1,0\right),\ B_3^{(1)}\left(x_1,0\right)=B_3^{(2)}\left(x_1,0\right) \quad \text{для } x_1\in\left(-\infty,\infty\right). \tag{3.17}$$

Крім того, на тріщині задано сумарний електричний заряд величини D_0, а на нескінченності – електричне та магнітне поля:

$$\sigma_{13}^{\infty}=\tau^{\infty},\ \sigma_{33}^{\infty}=\sigma^{\infty},\ E_1^{\infty}=e^{\infty},\ H_1^{\infty}=h^{\infty}. \tag{3.18}$$

В доповнення до (3.17), інші умови на інтерфейсі для відкритої тріщини $x_1\in\left(c,b\right)$ (Рис. 3.1 при a=b) набувають вигляду

$$\sigma_{i3}^{(1)}\left(x_1,0\right)=\sigma_{i3}^{(2)}\left(x_1,0\right),\ E_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=E_1^{(2)}\left(x_1,0\right) \quad \text{для } x_1\in L, \tag{3.19}$$

$$D_3^{(1)}\left(x_1,0\right)=D_3^{(2)}\left(x_1,0\right),\ u_i'^{(1)}\left(x_1,0\right)=u_i'^{(2)}\left(x_1,0\right) \quad \text{для } x_1\in L, \tag{3.20}$$

$$\sigma_{i3}^{(m)}\left(x_1,0\right)=0,\ E_1^{(m)}\left(x_1,0\right)=0 \quad \text{для } x_1\in\left(c,b\right), \tag{3.21}$$

де $m=1,2$, $i,j=\overline{1,3}$, $L=\left(-\infty,\infty\right)\setminus\left(c,b\right)$.

Розглядаючи другий випадок тріщини з контактною зоною (рис. 3.1) припускаємо, що відрізок $x_1\in\left[c,a\right)=L_1$ вільний від напруження, а в зоні $x_1\in\left[a,b\right]=L_2$ береги тріщини знаходяться в умовах безфрикційного контакту. В результаті умови на інтерфейсі разом з (3.17), (3.18) та (3.19), (3.20) мають вигляд

$$\sigma_{i3}^{(m)}\left(x_1,0\right)=0,\ E_1^{(m)}\left(x_1,0\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_1, \tag{3.22}$$

$$\left\langle u_3\left(x_1\right)\right\rangle=0,\ \sigma_{13}^{(m)}\left(x_1,0\right)=0,\ E_1^{(m)}\left(x_1,0\right)=0,\ \left\langle \sigma_{33}\left(x_1\right)\right\rangle=0 \quad \text{для } x_1\in L_2, \tag{3.23}$$

де $m=1,2$, $i,j=\overline{1,3}$, $L=\left(-\infty,\infty\right)\setminus L_1\cup L_2$.

Матриця $\mathbf{S}$ для п'єзоелектромагнітних біматеріалів, поляризованих вздовж осі x_3, має наступний вигляд:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} is_{11} & s_{13} & is_{14} & is_{15} \\ s_{31} & is_{33} & s_{34} & s_{35} \\ is_{41} & s_{43} & is_{44} & is_{45} \\ is_{51} & s_{53} & is_{54} & is_{55} \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

де всі s_{jk} - дійсні та $s_{31}=-s_{13}$, $s_{14}=-s_{41}$, $s_{43}=s_{34}$, $s_{51}=-s_{15}$, $s_{45}=s_{54}$, $s_{35}=s_{53}$.

3.3. Одержання основних співвідношень

Враховуючи, що $\mathbf{W}^+\left(x_1\right)=\mathbf{W}^-\left(x_1\right)=\mathbf{W}\left(x_1\right)$ при $x_1\to\infty$, з (3.18) отримуємо $\mathbf{P}^\infty=\left(\mathbf{S}-\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{W}^\infty$ при $x_1\to\infty$, де $\mathbf{P}^\infty=\left[\tau^\infty,0,\sigma^\infty,e^\infty,h^\infty\right]$.

Звідси $\mathbf{W}^\infty=\left(\mathbf{S}-\overline{\mathbf{S}}\right)^{-1}\mathbf{P}^\infty$, тобто

$$W_5^\infty=\left\{\left(\mathbf{S}-\overline{\mathbf{S}}\right)^{-1}\mathbf{P}^\infty\right\}_5 .$$

Але, з огляду на умови (3.17), з (3.15) слідує: $W_5^+\left(x_1\right)-W_5^-\left(x_1\right)=0$ для $\left|x_1\right|<\infty$. Це означає, що $W_5\left(z\right)$ аналітична у всій площині, і тому $W_5\left(z\right)\equiv W_5^\infty\left(z\right)$ для будь-якого *z*. Тоді, залишаючи в (3.15), (3.16) тільки 1-й, 3-й та 4-й рядки, отримуємо

$$\left\langle \mathbf{L}\left(x_1\right)\right\rangle=\mathbf{W}^+\left(x_1\right)-\mathbf{W}^-\left(x_1\right), \tag{3.25}$$

$$\mathbf{P}^{(1)}\left(x_1,0\right)=\mathbf{S}\mathbf{W}^+\left(x_1\right)-\overline{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-\left(x_1\right)+\mathbf{Q}, \tag{3.26}$$

де $\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} s_{15} - \bar{s}_{15} \\ s_{35} - \bar{s}_{35} \\ s_{45} - \bar{s}_{45} \end{Bmatrix} W_5^{\infty}$ – трикомпонентний вектор.

Співвідношення (3.25) та (3.26) подібні (3.15) та (3.16) за винятком розмірності та наявності $\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$, тому проведемо аналіз, аналогічний [107].

Задовольняючи за допомогою (3.26) граничним умовам на $x_1 \in (c,b)$ для відкритої тріщини та на L_1 для тріщини з контактною зоною, отримуємо:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1,0) = 0,$$

звідки

$$\mathbf{S}\mathbf{W}^{+}(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^{-}(x_1) = -\mathbf{Q} \quad \text{для } x_1 \in (c,b) \text{ або } x_1 \in L_1$$

або

$$\mathbf{W}^{+}(x_1) - (\mathbf{S})^{-1}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^{-}(x_1) = -(\mathbf{S})^{-1}\mathbf{Q} \quad \text{для } x_1 \in (c,b) \text{ або } x_1 \in L_1 \tag{3.27}$$

Розв’язок задачі лінійного спряження (3.27) може бути отриманий аналогічно [126], але ми розглянемо інший підхід.

Розглянемо довільну одно рядкову матрицю $\mathbf{R} = [R_1, R_3, R_4]$. На основі (3.26) маємо

$$\mathbf{R}\mathbf{P}^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{W}^{+}(x_1) - \mathbf{R}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^{-}(x_1) + \mathbf{R}\mathbf{Q}. \tag{3.28}$$

Введемо функцію

$$F(z) = \mathbf{T}\mathbf{W}(z), \tag{3.29}$$

де $\mathbf{T} = [T_1, T_3, T_4] = \mathbf{R}\mathbf{S}$.

Покладаючи $\mathbf{R}\overline{\mathbf{S}} = -\gamma \mathbf{RS}$, рівняння (3.28) запишемо у вигляді:

$$\mathbf{RP}^{(1)}\left(x_1, 0\right) = F^{+}\left(x_1\right) + \gamma F^{-}\left(x_1\right) + \mathbf{RQ}, \tag{3.30}$$

де γ та $\mathbf{R}^T$ - власні значення та власні вектори системи:

$$\left(\gamma \mathbf{S}^T + \overline{\mathbf{S}}^T\right)\mathbf{R}^T = 0, \tag{3.31}$$

а матриця $\mathbf{S}$ має структуру (3.24).

Корені рівняння $\det\left(\gamma \mathbf{S}^T + \overline{\mathbf{S}}^T\right) = 0$ мають вид

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1, \tag{3.32}$$

де $$\delta^2 = \frac{s_{13}s_{41}s_{34} + s_{31}s_{43}s_{14} - s_{31}s_{13}s_{44} - s_{11}s_{34}s_{43}}{s_{33}\left(s_{11}s_{44} - s_{41}s_{14}\right)}. \tag{3.33}$$

Власні вектори $\mathbf{R}_j^T = \left[R_{j1}, R_{j3}, R_{j4}\right]^T$, пов'язані з власним значенням γ_j $\left(j = 1,3,4\right)$, можуть бути знайдені з системи (3.31). Аналіз показує, що для $\delta^2 > 0$ матриця $\mathbf{R}$, складена з власних векторів $\mathbf{R}_j^T$, має наступну структуру

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & ir_{14} \\ ir_{31} & 1 & ir_{34} \\ ir_{41} & 0 & i \end{bmatrix},$$

де $r_{11} = \dfrac{s_{31}s_{44} - s_{34}s_{41}}{\delta\left(s_{11}s_{44} - s_{14}s_{41}\right)}$, $r_{14} = \dfrac{s_{11}s_{34} - s_{14}s_{31}}{\delta\left(s_{11}s_{44} - s_{14}s_{41}\right)}$, $r_{31} = -r_{11}$, $r_{34} = -r_{14}$, $r_{41} = -\dfrac{s_{43}}{s_{13}}$ визначаються з системи (3.31) для γ_1 та γ_3 відповідно. При цьому всі коефіцієнти r_{jk} є дійсними.

Чисельний аналіз показує, що для всіх п'єзоелектричних керамік поляризованих у напрямку x_3, справедлива нерівність $\delta^2 > 0$. Компоненти матриці

$$\mathbf{T}=\mathbf{RS}, \tag{3.34}$$

сформованої з однострокових матриць $\mathbf{T}_j=\left[T_{j1},T_{j3},T_{j4}\right]=\mathbf{R}_j\mathbf{S}$ $\left(j=1,3,4\right)$ для $\delta^2>0$, можуть бути представлені у формі $T_{j1}=t_{j1}$, $T_{j3}=it_{j3}$, $T_{j4}=t_{j4}$, де всі t_{jk} $\left(j,k=1,3,4\right)$ є дійсними та $t_{43}=0$.

Використовуючи співвідношення (3.29) та (3.30), отримуємо

$$\mathbf{R}_j\mathbf{P}^{(1)}\left(x_1,0\right)=F_j^+\left(x_1\right)+\gamma_jF_j^-\left(x_1\right)+\mathbf{R}_j\mathbf{Q}, \tag{3.35}$$

де $F_j\left(z\right)=\mathbf{T}_j\mathbf{W}\left(z\right)$. (3.36)

З останнього співвідношення витікає, що функції $F_j\left(z\right)$ мають ті ж властивості, що і $\mathbf{W}\left(z\right)$. Зокрема, для граничних умов (3.19) та (3.20) вони аналітичні у всій площині за винятком $\left(-\infty,+\infty\right)\backslash L$. Тоді з (3.36) маємо

$$F_j\left(z\right)=t_{j1}W_1\left(z\right)+it_{j3}W_3\left(z\right)+t_{j4}W_4\left(z\right).$$

Враховуючи представлення (3.25), з останнього рівняння отримуємо

$$t_{j1}\left\langle u_1'\left(x_1\right)\right\rangle+it_{j3}\left\langle u_3'\left(x_1\right)\right\rangle+t_{j4}\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle=F_j^+\left(x_1\right)-F_j^-\left(x_1\right). \tag{3.37}$$

Розкриваючи далі ліву частину (3.35) та враховуючи структуру матриці $\mathbf{R}$ приходимо до співвідношення

$$ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right)+ir_{j4}E_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=F_j^+\left(x_1\right)+\gamma_jF_j^-\left(x_1\right)+\theta_j, \tag{3.38}$$

де $\theta_j=ir_{j1}Q_1+r_{j3}Q_3+ir_{j4}Q_4$; r_{ij} та t_{ij} $\left(i,j=1,3,4\right)$ – компоненти відомих матриць, а γ_j константи, які визначаються фізичними характеристиками матеріалів, причому $r_{13}=r_{33}=r_{44}=1$ та $r_{43}=0$; $F_j\left(z\right)$– функції, аналітичні у всій площині за виключенням області тріщини.

3.4. Розв’язок для п’єзоелектричного/п’єзомагнітного біматеріалу для відкритої тріщини

Задовольняючи за допомогою виразу (3.38) граничні умови (3.21), приходимо до наступних задач лінійного спряження:

$$F_1^+(x_1)+\gamma_1 F_1^-(x_1)=-\theta_1 \quad \text{для } x_1\in(c,b), \tag{3.39}$$

$$F_4^+(x_1)+F_4^-(x_1)=-\theta_4 \quad \text{для } x_1\in(c,b). \tag{3.40}$$

Застосовуючи задані граничні умови на нескінченності (3.18), можемо записати

$$F_j(z)\big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j-\frac{\theta_j}{1+\gamma_j}, \tag{3.41}$$

де $\tilde{\sigma}_j=\dfrac{r_{j3}\sigma^\infty}{\vartheta_j}$, $\tilde{\tau}_j=-\dfrac{1}{\vartheta_j}\left(r_{j1}\tau^\infty+r_{j4}e^\infty\right)$, $\left(j=1,3,4\right)$, $\vartheta_k=1+\gamma_k$, $\left(k=1,3\right)$, $\vartheta_4=2$.

Для розв’язку задач (3.39), (3.41) та (3.40), (2.41) вводимо заміни

$$F_1(z)=\Phi_1(z)-\frac{\theta_1}{1+\gamma_1},\quad F_4(z)=\Phi_4(z)-\frac{\theta_4}{2}, \tag{3.42}$$

тоді отримуємо однорідні задачі:

$$\Phi_1^+(x_1)+\gamma_1\Phi_1^-(x_1)=0 \quad \text{для } x_1\in(c,b),$$

$$\Phi_4^+(x_1)+\Phi_4^-(x_1)=0 \quad \text{для } x_1\in(c,b)$$

за наступних умов на нескінченності

$$\Phi_j(z)\big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j,\quad j=1,3,4.$$

Розв’язки останніх задач відомі [40] та мають вигляд

$$\Phi_1(z) = \frac{c_{01} + c_{11}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left(\frac{z-c}{z-b} \right)^{i\varepsilon_1},$$

$$\Phi_4(z) = \frac{c_{04} + c_{14}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}.$$

Переходячи до $F_j(z)$ за допомогою (3.42), маємо:

$$F_1(z) = \frac{c_{01} + c_{11}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left(\frac{z-c}{z-b} \right)^{i\varepsilon_1} - \frac{\theta_1}{1+\gamma_1}, \qquad (3.43)$$

$$F_4(z) = \frac{c_{04} + c_{14}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} - \frac{\theta_4}{2}. \qquad (3.44)$$

Довільні константи $c_{01}, c_{11}, c_{04}, c_{14}$ знаходяться на основі умов на нескінченності (3.41), однозначності переміщень та теореми Гауса у вигляді:

$$c_{01} = \frac{i}{2\pi} t_{14} D_0, \quad c_{11} = \frac{i}{2\pi} t_{14} D_0 + (z - i\varepsilon_1 b - i\varepsilon_1 c)(\tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1),$$

$$c_{04} = \frac{i}{2\pi} t_{44} D_0, \quad c_{14} = \frac{\tau^{\infty} + r_{44} e^{\infty}}{2}.$$

Розглядаючи розв'язки (3.43) та (3.44) разом з формулами (3.37) та (3.38), одержуємо вирази для електромеханічних факторів для $x_1 > b$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = (1+\gamma_1) \mathrm{Re} \left\{ F_1(x_1) + \frac{\theta_1}{1+\gamma_1} \right\}. \qquad (3.45)$$

З останньої формули видно, що магнітний потік впливає на $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ через доданок θ_1, але він не вносить сингулярних складових у це напруження.

Уявна частина системи рівнянь (3.38) формує СЛАР для визначення $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$ та $E_1^{(1)}(x_1, 0)$ для $x_1 \notin (c; b)$:

$$\begin{cases} r_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+r_{14}E_1^{(1)}(x_1,0)=(1+\gamma_1)\operatorname{Im}\left\{F_1\ (x_1)+\dfrac{\theta_1}{1+\gamma_1}\right\}, \\ \sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+r_{44}E_1^{(1)}(x_1,0)=2\operatorname{Im}\left\{F_4(x_1)+\dfrac{\theta_4}{2}\right\}, \end{cases}$$

з якої одержуємо

$$E_1(x_1,0)=\frac{(1+\gamma_1)r_{41}\operatorname{Im}\left\{F_1(x_1)+\dfrac{\theta_1}{1+\gamma_1}\right\}-2r_{11}\operatorname{Im}\left\{F_4(x_1)+\dfrac{\theta_4}{2}\right\}}{r_{14}r_{41}-r_{11}r_{44}}, \tag{3.46}$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)=\frac{r_{44}(1+\gamma_1)\operatorname{Im}\left\{F_1(x_1)+\dfrac{\theta_1}{1+\gamma_1}\right\}-2r_{14}\operatorname{Im}\left\{F_4(x_1)+\dfrac{\theta_4}{2}\right\}}{r_{44}r_{11}-r_{14}r_{41}}. \tag{3.47}$$

На основі рівнянь (3.37) та формул (3.43), (3.44) на $x_1\in(c,b)$ маємо:

$$\begin{cases} \left\langle u_1'(x_1)\right\rangle+it_{13}\left\langle u_3'(x_1)\right\rangle+t_{14}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle=\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_1}F_1(x_1), \\ t_{41}\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle+t_{44}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle=2F_4(x_1). \end{cases} \tag{3.48}$$

З першого рівняння (3.48) похідна розкриття тріщини буде мати вид:

$$\left\langle u_3'(x_1)\right\rangle=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1 t_{13}}\operatorname{Im}\left\{F_1(x_1)+\frac{\theta_1}{1+\gamma_1}\right\}, \tag{3.49}$$

тобто розкриття тріщини на основі (3.49) записується у формі

$$\left\langle u_3(x_1)\right\rangle=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1 t_{13}}\int_c^{x_1}\operatorname{Im}\left\{F_1(x_1)+\frac{\theta_1}{1+\gamma_1}\right\}dx_1. \tag{3.50}$$

Зокрема, при $D_0=0$ формула (3.50) приймає вигляд

$$\left\langle u_3(x_1)\right\rangle = \frac{\gamma_1+1}{t_{13}\sqrt{\gamma_1}}\left(\tilde{\tau}_1 \sin\left(\varepsilon_1 \ln\left(\frac{c-x_1}{b-x_1}\right)\right)+\tilde{\sigma}_1 \cos\left(\varepsilon_1 \ln\left(\frac{c-x_1}{b-x_1}\right)\right)\right)\sqrt{(c-x_1)(b-x_1)}. \tag{3.51}$$

Дійсні частини системи рівнянь (3.48) формують СЛАР для визначення $\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle$ та $\left\langle D_3(x_1)\right\rangle$ на проміжку $x_1 \in (c,b)$:

$$\begin{cases} \left\langle u_1'(x_1)\right\rangle + t_{14}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle = \dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\operatorname{Re}F_1(x_1), \\ t_{41}\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle + t_{44}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle = 2\operatorname{Re}F_4(x_1). \end{cases}$$

З цієї системи отримуємо

$$\left\langle D_3(x_1)\right\rangle = \frac{\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_1}t_{41}\operatorname{Re}\left\{F_1(x_1)+\dfrac{\theta_1}{\gamma_1+1}\right\} - 2t_{11}\operatorname{Re}\left\{F_4(x_1)+\dfrac{\theta_4}{2}\right\}}{t_{41}t_{14}-t_{11}t_{44}}. \tag{3.52}$$

Тобто всі шукані компоненти σ_{13}, σ_{33}, E_1 вздовж інтерфейсу визначені відповідно в (3.47), (3.45), (3.46), стрибок компоненти $\left\langle D_3\right\rangle$ в (3.52), а також розкриття тріщини $\left\langle u_3\right\rangle$ в (3.50) знайдені в області тріщини.

3.5. Розв’язок для п’єзоелектричного/п’єзомагнітного біматеріалу для тріщини з контактною зоною

Задовольняючи за допомогою виразів (3.37), (3.38) граничні умови (3.21), (3.22), приходимо до наступної комбінованої крайової задачі Діріхле – Рімана:

$$F_1^+(x_1)+\gamma_1 F_1^-(x_1) = -\theta_1 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \tag{3.53}$$

$$\operatorname{Im}F_1^{\pm}(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2 \tag{3.54}$$

і задачі Гілберта

$$F_4^+\left(x_1\right)+F_4^-\left(x_1\right)=-\theta_4 \quad \text{для } x_1\in L_1\cup L_2 \tag{3.55}$$

з умовами на нескінченності

$$F_j\left(z\right)\Big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j-\frac{\theta_j}{1+\gamma_j}, \tag{3.56}$$

де $\tilde{\sigma}_j=\dfrac{r_{j3}\sigma^\infty}{\vartheta_j}$, $\tilde{\tau}_j=-\dfrac{1}{\vartheta_j}\left(r_{j1}\tau^\infty+r_{j4}e^\infty\right)$, $\left(j=1,3,4\right)$, $\vartheta_k=1+\gamma_k$, $\left(k=1,3\right)$, $\vartheta_4=2$.

Для розв’язку задач (3.53), (3.54), (3.56) та (3.55), (3.56) вводимо заміну, аналогічну (3.42), і тоді отримуємо однорідні задачу Діріхле – Рімана

$$\Phi_k^+\left(x_1\right)+\gamma_k\Phi_k^-\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_1,$$

$$\operatorname{Im}\Phi_k^\pm\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_2,\ k=\overline{1,3},$$

і задачу Гілберта

$$\Phi_4^+\left(x_1\right)+\Phi_4^-\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_1\cup L_2,$$

а також умови на нескінченності

$$\Phi_j\left(z\right)\Big|_{z\to\infty}=\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j.$$

Розв’язки одержаних задач знайдено за аналогією до [41, 33] і мають вигляд

$$\Phi_1\left(z\right)=P\left(z\right)X_1\left(z\right)+Q\left(z\right)X_2\left(z\right),$$

$$\Phi_4\left(z\right)=\frac{ih_4}{2}\left(z-\frac{c+b}{2}+\frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(z-c\right)\left(z-b\right)}}.$$

Переходячи до $F_j\left(z\right)$ за допомогою (3.42), маємо:

$$F_1\left(z\right)=P\left(z\right)X_1\left(z\right)+Q\left(z\right)X_2\left(z\right)-\frac{\theta_1}{1+\gamma_1}, \tag{3.57}$$

$$F_4(z) = \frac{ih_4}{2}\left(z - \frac{c+b}{2} + \frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{1}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} - \frac{\theta_4}{2}, \tag{3.58}$$

де $P(z) = C_1 z + C_2$, $Q(z) = D_1 z + D_2$,

$X_1(z) = ie^{i\phi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-b)}$, $X_2(z) = e^{i\phi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)}$, $\ell = b - c$,

$C_1 = -\tilde{\tau}_1 cos\,\beta - \tilde{\sigma}_1 sin\,\beta$, $D_1 = \tilde{\sigma}_1 cos\,\beta - \tilde{\tau}_1 sin\,\beta$,

$C_2 = -\dfrac{c+b}{2}C_1 - \beta_1 D_1 + \dfrac{t_{14}D_0}{2\pi}cos\,\beta$, $D_2 = \beta_1 C_1 - \dfrac{c+a}{2}D_1 + \dfrac{t_{14}D_0}{2\pi}sin\,\beta$,

$\varphi(z) = 2\varepsilon \cdot ln\dfrac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{\ell(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}$, $\varepsilon_j = \dfrac{ln\gamma_j}{2\pi}$, $\beta = \varepsilon\, ln\dfrac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}}$,

$$\beta_1 = \varepsilon\sqrt{(a-c)(b-c)}, \quad \lambda = \frac{b-a}{\ell}, \quad h_4 = r_{41}\tau^\infty + r_{44}e^\infty. \tag{3.59}$$

Параметр λ, обчислений за формулою (3.59), буде грати важливу роль в подальшому аналізі, так як він визначає відносну довжину контактної зони.

Розглядаючи розв'язки (3.57) та (3.58) і формули (3.37) та (3.38), одержуємо вирази для напружень та напруженість електричного поля у вигляді:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) = \frac{1}{r_{13}}\left[\frac{\vartheta_1 Q(x_1)\cos\varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} - \frac{\vartheta_1 P(x_1)\sin\varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}}\right] \quad \text{для } x_1 > b, \tag{3.60}$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0) = \frac{r_{14}}{r_{14}r_{41} - r_{44}r_{11}}\left\{h_4\left(x_1 - \frac{c+b}{2} + \frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{r_{44}}{r_{14}}\left[\frac{\vartheta_1 Q(x_1)\sin\varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} + \frac{\vartheta_1 P(x_1)\cos\varphi(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-b)}}\right]\right\} \quad \text{для } x_1 > b, \tag{3.61}$$

$$E_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=-\frac{r_{11}}{r_{14}r_{41}-r_{44}r_{11}}\left\{h_4\left(x_1-\frac{c+b}{2}+\frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-b\right)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{r_{41}}{r_{11}}\left[\frac{\vartheta_1 Q\left(x_1\right)\sin\varphi\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-a\right)}}+\frac{\vartheta_1 P\left(x_1\right)\cos\varphi\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-b\right)}}\right]\right\} \quad \text{для } x_1>b, \tag{3.62}$$

а також наступні вирази для стрибка переміщень та електричної індукції:

$$\left\langle u_3\left(x_1\right)\right\rangle=\frac{2\sqrt{\alpha}}{t_{13}}\int_c^{x_1}\left[\frac{P\left(x_1\right)\sin\varphi^*\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(b-x_1\right)\left(x_1-c\right)}}-\frac{Q\left(x_1\right)\cos\varphi^*\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(a-x_1\right)\left(x_1-c\right)}}\right]dx_1 \quad \text{для } x_1\in L_1, \tag{3.63}$$

$$\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle=\frac{t_{11}}{t_{11}t_{44}-t_{14}t_{41}}\left\{h_4\left(x_1-\frac{c+b}{2}+\frac{t_{44}D_0}{\pi h_4}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-b\right)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{2t_{41}\sqrt{\alpha}}{t_{11}}\left[\frac{P\left(x_1\right)\cos\varphi^*\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(b-x_1\right)\left(x_1-c\right)}}+\frac{Q\left(x_1\right)\sin\varphi^*\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(a-x_1\right)\left(x_1-c\right)}}\right]\right\} \quad \text{для } x_1\in L_1. \tag{3.64}$$

3.6. Знаходження довжини зони контакту

Положення точки a, що визначає величину зони контакту, знаходимо з наступних нерівностей:

$$\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right)\le 0 \quad \text{для } x_1\in L_2, \quad \left\langle u_3\left(x_1\right)\right\rangle\ge 0 \quad \text{для } x_1\in L_1, \tag{3.65}$$

виконання яких приводить до такого трансцендентного рівняння відносно λ:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sigma^{\infty}\sqrt{1-\lambda}+2\varepsilon h_1}{2\varepsilon\sigma^{\infty}-h_1\sqrt{1-\lambda}-s\left(\lambda\right)}, \tag{3.66}$$

де $s\left(\lambda\right)=\dfrac{t_{14}D_0\left(1+\gamma_1\right)}{\pi\sqrt{\left(a-c\right)\left(b-c\right)}}$, $h_1=r_{11}\tau^{\infty}+r_{14}e^{\infty}$.

Вибір максимального кореня рівняння (3.65) з інтервалу $(0,1)$ забезпечує виконання обох нерівностей (3.65) за винятком дуже малої зони осциляції біля лівої вершини тріщини, якою нехтуємо. Розв'язок рівняння (3.66) можна знайти чисельно. Якщо ж λ мале порівняно з 1, то можна використати асимптотичну формулу, що випливає з (3.66) при $\sqrt{1-\lambda} \approx 1$:

$$\lambda_0 = 4\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(\arctan\left[\frac{\sigma^{\infty} + 2\varepsilon h_1}{-h_1 + 2\varepsilon\sigma^{\infty} - \dfrac{t_{14}D_0\left(1+\gamma_1\right)}{\pi l}}\right] + \pi n\right)\right\}. \qquad (3.67)$$

3.7. Чисельна ілюстрація результатів та їх аналіз

В якості матеріалів виберемо біматеріал, складений з $BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$ композитів з об'ємним вмістом (V_f) п'єзоелектрика $BaTiO_3$ рівним 0,5 (верхній матеріал) та 0,1 (нижній матеріал) [123]. Відповідні значення фізичних констант наведені в таблиці 3.1. Для розрахунків вибиралось $c = -0{,}01$ м, $b = 0{,}01$ м, $\sigma^{\infty} = 10^7$ Па, $\tau^{\infty} = 0$ Па, $D_0 = 0{,}0003$ Кл/м, а величина e^{∞} варіювалась.

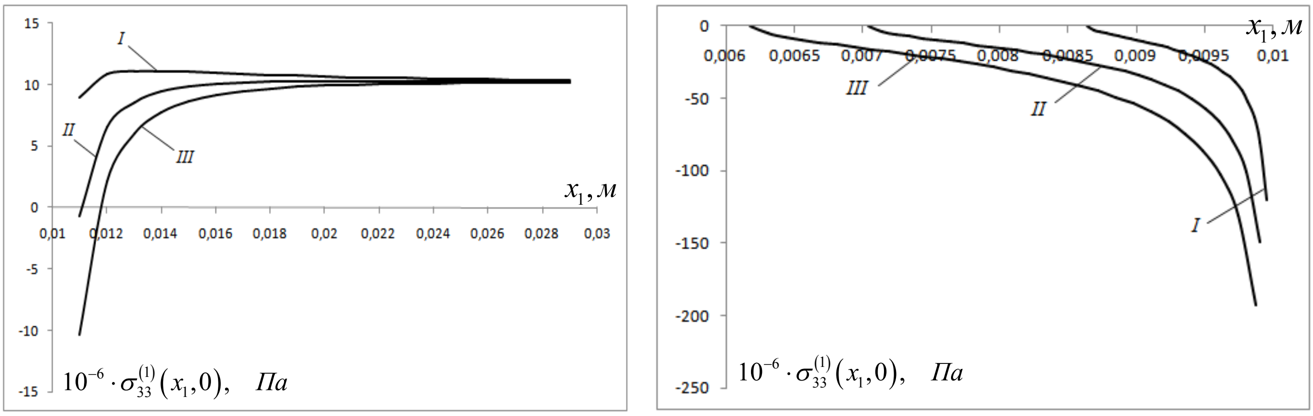
Таблиця 3.1

Ефективні властивості $BaTiO_3$ - $CoFe_2O_4$ композиту для різних V_f

Властивості	V_f=0,1	V_f=0,5
c_{11} (ГПа)	274	226
c_{33} (ГПа)	161	124
c_{13} (ГПа)	259	216
c_{44} (ГПа)	45	44
e_{31} (Кл/м^2)	-4,4	-2,2
e_{15} (Кл/м^2)	1,86	9,3
e_{33} (Кл/м^2)	1,16	5,8
$\alpha_{11}\left(\times 10^{-10}\,\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2\right)$	11,9	56,4
$\alpha_{33}\left(\times 10^{-10}\,\text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2\right)$	13,4	63,5
$h_{31}\left(\text{Н/А}\cdot\text{м}\right)$	522,3	290,2

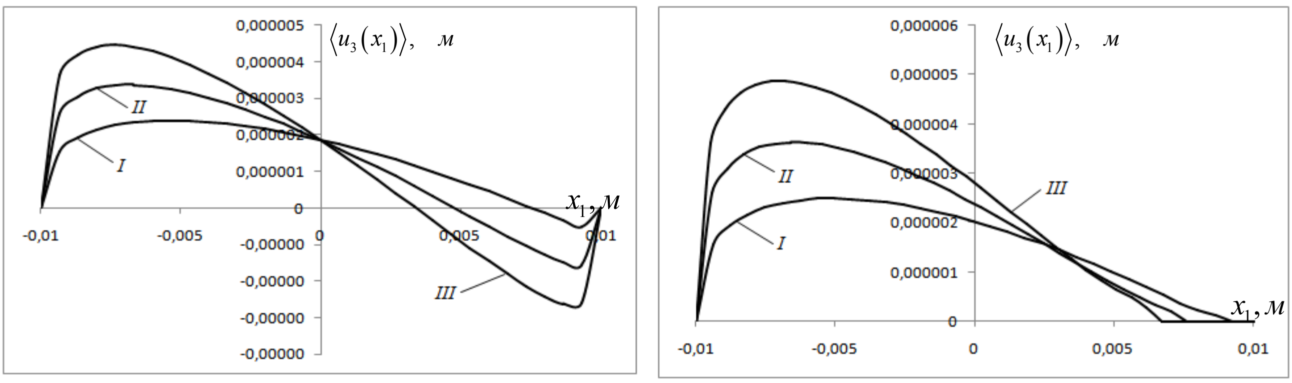
h_{33} (Н/А·м)	629,7	350,0
h_{15} (Н/А·м)	495,0	275,0
$\mu_{11}\left(\times10^{-6}\,\text{Н}\cdot\text{с}^2/\text{Кл}^2\right)$	531,5	297,0
$\mu_{33}\left(\times10^{-6}\,\text{Н}\cdot\text{с}^2/\text{Кл}^2\right)$	142,3	83,5

На рис. 3.2 для різних e^{∞} зображено графіки зміни нормального напруження для відкритої тріщини на її продовженні та в зоні контакту берегів тріщини для контактної моделі (*I* – для $e^{\infty}=0{,}5\cdot10^{7}$ В/м, *II* – для $e^{\infty}=1\cdot10^{7}$ В/м, *III* – для $e^{\infty}=1{,}5\cdot10^{7}$ В/м), а на рис. 3.3 – відповідні графіки зміни стрибка нормального переміщення в її відкритій частині (*I* – для $e^{\infty}=0{,}5\cdot10^{7}$ В/м, *II* – для $e^{\infty}=1\cdot10^{7}$ В/м, *III* – для $e^{\infty}=1{,}5\cdot10^{7}$ В/м).



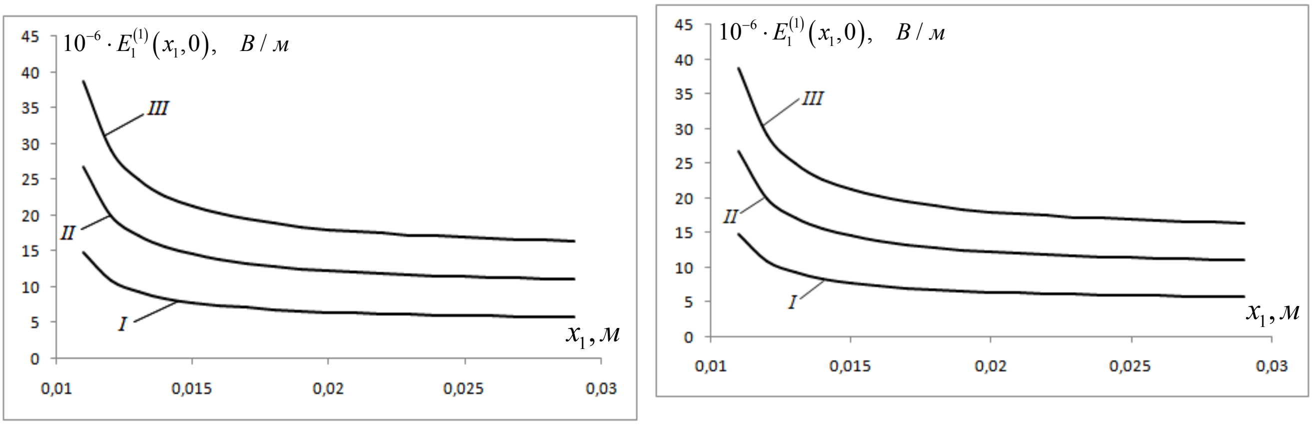
а) *б)*

Рис. 3.2. Розподіл $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$ при $\sigma^{\infty}=10^{7}$ Па, $D_0=0{,}0003$ Кл/м: *а)* – для відкритої тріщини на її продовженні; *б)* – для тріщини з контактною зоною



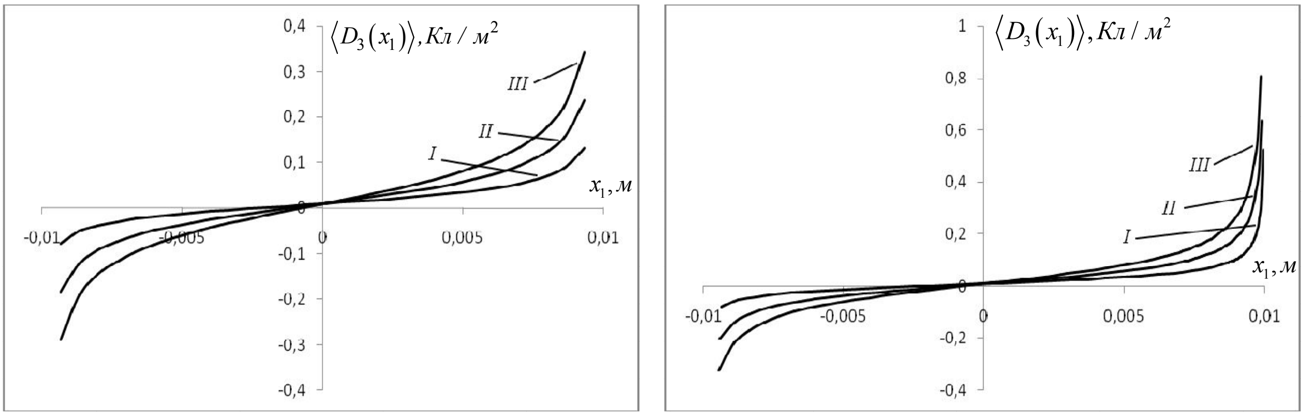
а) *б)*

Рис. 3.3. Розподіл $\langle u_3(x_1,0)\rangle$ уздовж тріщини при $\sigma^{\infty}=10^{7}$ Па, $D_0=0{,}0003$ Кл/м: *а)* – для відкритої тріщини; *б)* – для тріщини з контактною зоною



а) *б)*

Рис. 3.4. Розподіл $E_1^{(1)}(x_1,0)$ на продовженні тріщини при $\sigma^{\infty}=10^7$ Па, $D_0=0{,}0003$ Кл/м: *а)* – для відкритої тріщини; *б)* – для тріщини з контактною зоною



а) *б)*

Рис. 3.5. Розподіл $\langle D_3(x_1)\rangle$ уздовж тріщини при $\sigma^{\infty}=10^7$ Па, $D_0=0{,}0003$ Кл/м: *а)* – для відкритої тріщини; *б)* – для тріщини з контактною зоною

3.8. Висновки

У даному розділі була розглянута плоска задача для п'єзоелектромагнітної біматеріальної площини в припущенні, що на границі розділу матеріалів вздовж відрізку $c \le x_1 \le b$, $x_3=0$ довжиною $l=b-c$ порушено ідеальний зв'язок між матеріалами, тобто цей відрізок являє собою розріз, частина якого може бути закрита, а частина відкрита. Півплощини $x_3>0$ та $x_3<0$ навантажені на нескінченості рівномірним нормальними і дотичними напруженнями та електричним і магнітним полями, паралельними до берегів тріщини. Припускалось, що тріщина електропровідна та магнітнопроникна. Крім того, на ній заданий сумарний заряд, тобто вважалось, що електродовані береги тріщини приєднані до деякого джерела живлення.

Спочатку розглядалась відкрита тріщина, а далі припускалось, що береги тріщини можуть контактувати без тертя на деякій ділянці $x_1 \in (a,b)$, що примикає до правої вершини тріщини. Положення точки a вважалось заздалегідь невідомим. Таке формулювання є справедливим для випадку, коли більша зона контакту виникає в околі правої вершини тріщини. Якщо навантаження викликає більшу контактну зону біля лівої вершини тріщини, то це може бути враховано простою перестановкою півплощин.

Отримані представлення електромеханічних характеристик через кусково-аналітичні функції. З використанням цих представлень, задовольняючи граничним умовам на берегах тріщини, сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана для моделі тріщини з зоною контакту та виписані точні аналітичні розв'язки. Також знайдені аналітичні розв'язки в рамках моделі відкритої тріщини, що призводить до появи осцилюючої особливості. З використанням цих розв'язків одержані аналітичні формули для шуканих електромеханічних факторів в області поділу матеріалів. З використанням умов контактування берегів тріщини знайдено довжину зони контакту та відповідні електромеханічні характеристики.

Проведена чисельна ілюстрація одержаних розв'язків. З аналітичного аналізу результатів та візуалізації даних видно, що як віддалене електричне поле, так і сумарний заряд тріщини суттєво впливають на довжину зони контакту (a,b) та електромеханічні характеристики в околі тріщини, а вплив магнітного потоку на вказані характеристики не вносить в них додаткових сингулярних складових. При цьому вказані фактори можуть привести до виникнення значних областей контакту берегів тріщини навіть при відсутності полів зовнішніх зсувних напружень.

РОЗДІЛ 4. ЕЛЕКТРО- ТА МАГНІТНОПРОВІДНА МІЖФАЗНА ТРІЩИНА В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ/П'ЄЗОМАГНІТНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Даний розділ присвячений задачі знаходження електромеханічних факторів та відносної довжини зони контакту для біматеріального п'єзоелектромагнітного простору з електро- та магнітнопровідною тріщиною на межі поділу матеріалів під дією механічного навантаження та електричного і магнітного полів на нескінченності.

4.1. Постановка задачі та формулювання основних співвідношень електромагнітопружності

В прямокутній декартовій системі координат x_j $\left(j=1,2,3\right)$ загальні співвідношення для пружного п'єзоелектромагнітного матеріалу, враховуючи властивості п'єзоелектричних і п'єзомагнітних компонент можна записати у наступній формі [123]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{lij}E_l - h_{lij}H_l, \\ D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \alpha_{il}E_l + d_{il}H_l, \\ B_i = h_{ikl}\gamma_{kl} + d_{il}E_l + \mu_{il}H_l, \end{cases} \tag{4.1}$$

де σ_{ij}, γ_{ij} - компоненти напружень та механічних деформацій відповідно; D_i, B_i - компоненти електричного зміщення та магнітної індукції відповідно; E_i, H_i - компоненти електричного та магнітного полів відповідно. Також c_{ijkl}, e_{ikl}, h_{ikl}, d_{il} - пружні, п'єзоелектричні, п'єзомагнітні та електромагнітні константи відповідно; α_{il}, μ_{il} - діелектрична та магнітна проникності; i,j,k,l набувають значень $\{1,2,3\}$ і мається на увазі підсумування за індексами, що повторюються.

Рівняння рівноваги, електростатики та магнітостатики за відсутності масових сил та вільних зарядів наступні:

$$\sigma_{ij,i} = 0,\ D_{i,i} = 0,\ B_{i,i} = 0, \tag{4.2}$$

де кома ставиться для диференціювання по відповідній координатній змінній.

Вирази для механічних деформацій, електричного та магнітного полів мають наступну форму:

$$\gamma_{ij} = 0,5\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ E_i = -\varphi_{,i},\ H_i = -\psi_{,i}, \tag{4.3}$$

де u_i - компоненти механічного переміщення, φ, ψ - електричний та магнітний потенціали відповідно.

З рівнянь (1) – (3) отримуємо наступні загальні рівняння:

$$\begin{cases} \left(c_{ijkl}u_k + e_{lij}\varphi + h_{lij}\psi\right)_{,li} = 0, \\ \left(e_{ikl}u_k - \alpha_{il}\varphi - d_{il}\psi\right)_{,li} = 0, \\ \left(h_{ikl}u_k - d_{il}\varphi - \mu_{il}\psi\right)_{,li} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Введемо наступні вектори:

$$\mathbf{V} = \{u_1,\ \ u_2,\ \ u_3,\ \ \varphi,\ \ \psi\}^T,\ \mathbf{t} = \{\sigma_{31},\ \ \sigma_{32},\ \ \sigma_{33},\ \ D_3,\ \ B_3\}^T. \tag{4.5}$$

Розглядаючи далі біматеріальний п’єзоелектромагнітний простір і проводячи аналіз аналогічний до попереднього розділу, отримуємо співвідношення (3.15), (3.16), які для зручності тут перепишемо у вигляді

$$\left\langle \mathbf{L}\left(x_1\right)\right\rangle = \mathbf{W}^+\left(x_1\right) - \mathbf{W}^-\left(x_1\right), \tag{4.6}$$

$$\mathbf{P}^{(1)}\left(x_1,0\right) = \mathbf{S}\mathbf{W}^+\left(x_1\right) - \bar{\mathbf{S}}\mathbf{W}^-\left(x_1\right), \tag{4.7}$$

де $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)}\left(\bar{\mathbf{N}}^{(2)}\right)^{-1}\mathbf{N}^{(1)}$,

$$\mathbf{M}^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{1j}^{(i)} \\ a_{2j}^{(i)} \\ a_{3j}^{(i)} \\ b_{4j}^{(i)} \\ b_{5j}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(i)} = \begin{bmatrix} b_{1j}^{(i)} \\ b_{2j}^{(i)} \\ b_{3j}^{(i)} \\ -a_{4j}^{(i)} \\ -a_{5j}^{(i)} \end{bmatrix},$$

причому коефіцієнти $a_{kj}^{(i)}$, $b_{kj}^{(i)}$ є елементами матриць $\mathbf{A}^{(i)}$ та $\mathbf{B}^{(i)}$ (i=1, 2).

4.2. Формулювання задачі

Розглянемо плоску задачу для біматеріалу, складеного з двох п'єзоелектромагнітних напівнескінчених просторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$ з напрямком поляризації x_3, зчеплених вздовж інтерфейсу $x_3 = 0$. Електродована тріщина розташована на відрізку $x_1 \in (c,b)$ інтерфейсу (рис. 4.1). Припускається, що вона є електропровідною, та має рівномірно розподілений магнітний потенціал вздовж електродів, тобто електричне та магнітне поля по напрямку осі x_1 на берегах тріщини рівні нулю:

$$E_1^{(1)}(x_1,0) = E_1^{(2)}(x_1,0) = 0 \text{ та } H_1^{(1)}(x_1,0) = H_1^{(2)}(x_1,0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c,b). \quad (4.8)$$

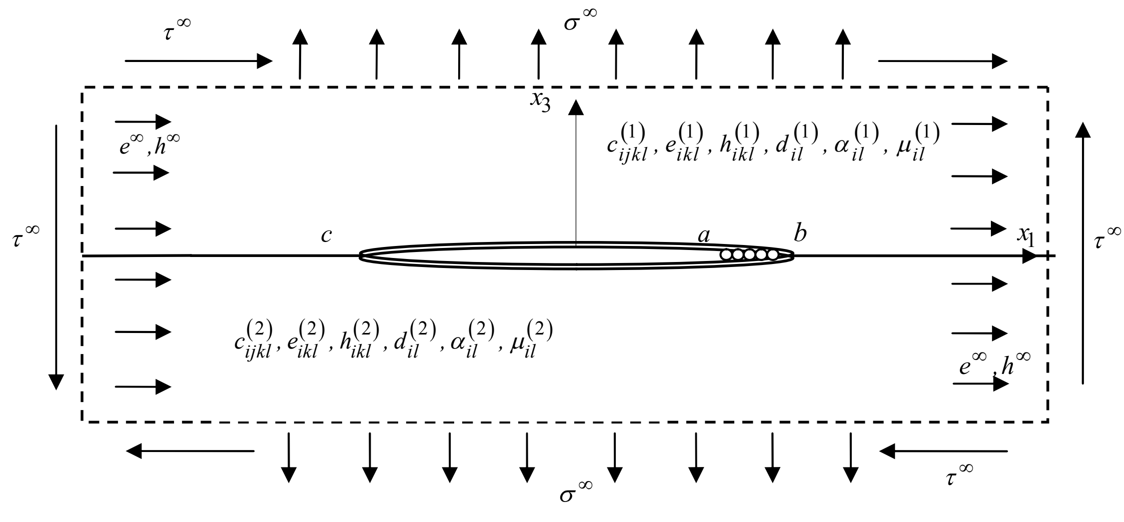


Рис. 4.1. Електродована електро- та магнітнопровідна тріщина з контактною зоною в біматеріальному п'єзоелектромагнітному композиті

Додатково припускається, що на тріщині задано електричний заряд загальною величиною D_0 та магнітна індукція загальною величиною B_0. Ця ситуація часто виникає на практиці в результаті розшарування механічно м'якого внутрішнього електроду, зробленого з феромагнітного матеріалу. Цей електрод може бути попередньо намагніченим та з'єднаний з позитивним чи негативним електричним джерелом живлення. В цьому випадку має місце ненульове значення D_0. В частковому випадку заземлення електроду значення D_0 треба взяти рівним нулю. На практиці значення B_0, як правило, рівне 0, але без додаткових ускладнень аналітичних перетворень і з метою загальності проведемо аналіз з його урахуванням.

Також припускається, що на нескінченності задані рівномірно розподілені механічні напруження, електричні та магнітні поля

$$\sigma_{13}^{\infty} = \tau^{\infty}, \ \sigma_{33}^{\infty} = \sigma^{\infty}, \ E_1^{\infty} = e^{\infty}, \ H_1^{\infty} = h^{\infty}. \tag{4.9}$$

Додатково до (4.8), інші умови на інтерфейсі для відкритої тріщини $x_1 \in (c,b)$ (рис. 4.1 для a=b) приймають форму:

$$\sigma_{i3}^{(1)}(x_1,0) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1,0), \ E_1^{(1)}(x_1,0) = E_1^{(2)}(x_1,0),$$

$$H_1^{(1)}(x_1,0) = H_1^{(2)}(x_1,0) \text{ для } x_1 \in L, \tag{4.10}$$

$$D_3^{(1)}(x_1,0) = D_3^{(2)}(x_1,0), \ u_i'^{(1)}(x_1,0) = u_i'^{(2)}(x_1,0),$$

$$B_3^{(1)}(x_1,0) = B_3^{(2)}(x_1,0) \text{ для } x_1 \in L, \tag{4.11}$$

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1,0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c,b), \tag{4.12}$$

де $m = 1,2$, $i,j = 1,3$, $L = (-\infty,\infty) \setminus (c,b)$.

Аналогічним чином далі буде розглянута модель міжфазної тріщини з контактною зоною. В цьому випадку припускається, що відрізок $x_1 \in [c,a) = L_1$

вільний від напружень, а береги тріщини знаходяться в умовах безфрикційного контакту на відрізку $x_1 \in [a,b] = L_2$ (рис. 4.1). В цьому випадку умови на інтерфейсі складаються з (4.8), (4.10), (4.11) та наступних додаткових умов:

$$\sigma_{i3}^{(m)}(x_1,0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \tag{4.13}$$

$$\langle u_3(x_1) \rangle = 0,\ \sigma_{13}^{(m)}(x_1,0) = 0,\ \langle \sigma_{33}(x_1) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2, \tag{4.14}$$

де m=1,2, $i = 1,3$.

Можливість врахування тільки правої контактної зони підтверджується тим, що одна контактна зона, як правило, надзвичайно коротка та її вплив на довшу контактну зону дуже малий [80, 102]. Якщо ж довша контактна зона виникає біля лівої вершини тріщини, то її розгляд можна звести до тієї ж задачі простою транспозицією півплощин.

4.3. Виведення основних рівнянь

Так як ми розглядаємо задачу плоскої деформації, то компонента W_2 може бути виключена із розгляду. З цієї причини в подальшому аналізі другі рядки та стовпці в розглянутих матрицях будуть виключені із розгляду.

Враховуючи, що $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1)$ для $x_1 \in L$, з рівнянь (4.7) та (4.9) для $x_1 \to \infty$ маємо

$$\mathbf{P}^\infty = (\mathbf{S} - \overline{\mathbf{S}})\mathbf{W}^\infty, \tag{4.15}$$

де $\mathbf{P}^\infty = [\tau^\infty, \sigma^\infty, e^\infty, h^\infty]$, та $\mathbf{W}^\infty = \mathbf{W}(z)$ для $z \to \infty$.

З рівняння (4.15) отримуємо

$$\mathbf{W}^\infty = (\mathbf{S} - \overline{\mathbf{S}})^{-1} \mathbf{P}^\infty.$$

Розглянемо довільну однорядкову матрицю $\mathbf{R} = \left[R_1, R_{3,} R_{4,} R_5 \right]$. Використовуючи (4.7), маємо

$$\mathbf{RP}^{(1)}\left(x_1, 0\right) = \mathbf{RSW}^{+}\left(x_1\right) - \mathbf{R\bar{S}W}^{-}\left(x_1\right). \tag{4.16}$$

Далі введемо функцію

$$F\left(z\right) = \mathbf{TW}\left(z\right), \tag{4.17}$$

де $\mathbf{T} = \left[T_1, T_3, T_4, T_5 \right] = \mathbf{RS}$.

Припускаючи, що $\mathbf{R\bar{S}} = -\gamma \mathbf{RS}$, рівняння (4.16) може бути записано у вигляді:

$$\mathbf{RP}^{(1)}\left(x_1, 0\right) = F^{+}\left(x_1\right) + \gamma F^{-}\left(x_1\right), \tag{4.18}$$

де γ та $\mathbf{R}^T$ - власні значення та власні вектори системи:

$$\left(\gamma \mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T\right)\mathbf{R}^T = 0. \tag{4.19}$$

Для найбільш важливого п’єзоелектричного/п’єзомагнітного матеріалу $BaTiO_3$ - $CoFe_2O_4$ матриця $\mathbf{S}$ має наступну структуру

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} is_{11} & s_{13} & is_{14} & is_{15} \\ s_{31} & is_{33} & s_{34} & s_{35} \\ is_{41} & s_{43} & is_{44} & is_{45} \\ is_{51} & s_{53} & is_{54} & is_{55} \end{bmatrix},$$

де всі s_{jk} - дійсні та $s_{31} = -s_{13}$, $s_{14} = -s_{41}$, $s_{43} = s_{34}$, $s_{51} = -s_{15}$, $s_{45} = s_{54}$, $s_{35} = s_{53}$. В цьому випадку корені рівняння $\det\left(\gamma \mathbf{S}^T + \bar{\mathbf{S}}^T\right) = 0$ можуть бути представлені у виді

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1, \quad \gamma_5 = 1, \tag{4.20}$$

де $\delta^2 = \dfrac{-s_{51}t_1 + s_{53}t_3 - s_{54}t_5 + s_{55}t_7}{s_{51}t_2 + s_{54}t_4 - s_{55}t_6}$,

$t_1 = s_{13}s_{34}s_{45} + s_{14}s_{35}s_{43} - s_{15}s_{34}s_{43} - s_{13}s_{35}s_{44}$, $\quad t_2 = -s_{15}s_{33}s_{44} + s_{14}s_{33}s_{45}$,

$t_3 = s_{11}s_{34}s_{45} + s_{14}s_{35}s_{41} + s_{15}s_{31}s_{44} - s_{15}s_{34}s_{41} - s_{14}s_{31}s_{45} - s_{35}s_{44}s_{11}$, $\quad t_4 = -s_{11}s_{33}s_{45} - s_{15}s_{33}s_{41}$,

$t_5 = s_{13}s_{35}s_{41} + s_{15}s_{31}s_{43} - s_{11}s_{35}s_{43} - s_{45}s_{13}s_{31}$, $\quad t_6 = -s_{11}s_{33}s_{44} + s_{41}s_{33}s_{14}$,

$t_7 = s_{13}s_{41}s_{34} + s_{31}s_{43}s_{14} - s_{31}s_{13}s_{44} - s_{11}s_{34}s_{43}$. (4.21)

Власні вектори $\mathbf{R}_j^T = \left[R_{j1}, R_{j3}, R_{j4}, R_{j5}\right]^T$, пов'язані з власними значеннями $\gamma_j\left(j = 1,3,4,5\right)$, можуть бути знайдені з системи (4.19). Аналіз показує, що для $\delta^2 > 0$ матриця $\mathbf{R}$, складена з власних векторів R_j^T, має наступну структуру

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & ir_{14} & ir_{15} \\ ir_{31} & 1 & ir_{34} & ir_{35} \\ ir_{41} & 0 & i & 0 \\ ir_{51} & 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$

де всі r_{jk} - дійсні та $r_{41} = -\dfrac{s_{43}}{s_{13}}$, $r_{51} = -\dfrac{s_{53}}{s_{13}}$; r_{11}, r_{14}, r_{15} та r_{31}, r_{34}, r_{35} визначаються з системи (4.19) для γ_1 та γ_3 відповідно.

Числовий аналіз показує, що для п'єзоелектричного/п'єзомагнітного матеріалу $BaTiO_3$ - $CoFe_2O_4$ справедлива нерівність $\delta^2 > 0$. Компоненти матриці

$$\mathbf{T} = \mathbf{RS}, \tag{4.22}$$

складені з однорядкових матриць $\mathbf{T}_j = \left[T_{j1}, T_{j3}, T_{j4}, T_{j5}\right] = \mathbf{R}_j\mathbf{S}$ $\left(j = 1,3,4,5\right)$ для $\delta^2 > 0$, можуть бути представлені в формі $T_{j1} = t_{j1}$, $T_{j3} = i\,t_{j3}$, $T_{j4} = t_{j4}$, $T_{j5} = t_{j5}$, де всі t_{jk} $\left(j,k = 1,3,4,5\right)$ дійсні та $t_{43} = 0$, $t_{53} = 0$.

Використовуючи вирази (4.17) та (4.18), отримуємо

$$\mathbf{R}_j\mathbf{P}^{(1)}\left(x_1, 0\right) = F_j^+\left(x_1\right) + \gamma_j F_j^-\left(x_1\right), \tag{4.23}$$

де $F_j(z) = \mathbf{T}_j \mathbf{W}(z)$. (4.24)

З останнього представлення слідує, що функції $F_j(z)$ мають такі ж властивості як і $\mathbf{W}(z)$. Зокрема, граничні умови (4.10) – (4.12) для $a = b$ або (4.10), (4.11), (4.13), (4.14) для $a \neq b$ показують, що вони аналітичні в усій площині окрім відрізка тріщини (c,b). Таким чином з (4.24) маємо

$$F_j(z) = t_{j1}W_1(z) + it_{j3}W_3(z) + t_{j4}W_4(z) + t_{j5}W(z).$$

Враховуючи представлення (4.11), з останнього рівняння отримуємо

$$t_{j1}\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle + it_{j3}\left\langle u_3'(x_1)\right\rangle + t_{j4}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle + t_{j5}\left\langle B_3(x_1)\right\rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1). \quad (4.25)$$

Розкриваючи далі ліву частину (4.28) та враховуючи структуру матриці $\mathbf{R}$, отримуємо

$$ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0) + r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0) + ir_{j4}E_1^{(1)}(x_1,0) + ir_{j5}H_1^{(1)}(x_1,0) =$$
$$= F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (4.26)$$

де r_{ij} та t_{ij} $(i, j = 1,3,4,5)$ - компоненти відомих дійсних матриць, а γ_j - константи, що визначаються фізичними характеристиками матеріалів, $r_{13} = r_{33} = r_{44} = r_{55} = 1$ та $r_{43} = r_{45} = r_{53} = r_{54} = 0$.

4.4. Розв’язок задачі для моделі відкритої тріщини

Припустимо спочатку, що тріщина повністю відкрита, тобто справедливі граничні умови (4.10) – (4.12). Задоволення граничних умов (4.12) завдяки представленням (4.26) приводить до наступної задачі лінійного спряження:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (c,b). \quad (4.27)$$

Використовуючи задані граничні умови на нескінченності (4.9), на основі (4.26) можна записати:

$$F_j\left(z\right)\Big|_{z\to\infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j\,, \tag{4.28}$$

де $\tilde{\sigma}_j = \dfrac{r_{j3}\sigma^{\infty}}{\vartheta_j}$, $\tilde{\tau}_j = -\dfrac{1}{\vartheta_j}\left(r_{j1}\tau^{\infty} + r_{j4}e^{\infty} + r_{j5}h^{\infty}\right)$, $\left(j = 1,3,4,5\right)$, $\vartheta_k = 1 + \gamma_k$, $\left(k = 1,3\right)$, $\vartheta_4 = \vartheta_5 = 2$.

Використовуючи представлення (4.25) та беручи до уваги умови однозначності зміщень при обході контуру тріщини

$$\int_c^b \left\langle u_k'(x_1)\right\rangle dx_1 = 0\,, \quad k = 1,3\,,$$

та умови, що визначають сумарну електричну та магнітну індукції на берегах тріщини

$$\int_c^b \left\langle D_3(x_1)\right\rangle dx_1 = D_0\,, \quad \int_c^b \left\langle B_3(x_1)\right\rangle dx_1 = B_0\,, \tag{4.29}$$

отримуємо

$$\int_c^b \{F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)\}dx_1 = t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0\,, \quad j = 1,3,4,5\,. \tag{4.30}$$

На основі [40, 4] розв’язок задачі (4.27) розшукуємо у вигляді:

$$F_j\left(z\right) = \frac{c_{0j} + c_{1j}z}{\sqrt{\left(z-c\right)\left(z-b\right)}}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_j}, \tag{4.31}$$

де $\varepsilon_j = \dfrac{\ln(\gamma_j)}{2\pi}$, $j = 1,3,4,5$.

Довільні константи c_{0j}, c_{1j} $\left(j = 1,3,4,5\right)$ визначаються з умов на нескінченності (4.28) та додаткових умов (4.30). Відомо [103], що умови (4.30) задовольняються, якщо коефіцієнт перед z^{-1} функції $F_j\left(z\right)$, розкладеної в ряд на нескінченності, є $i\left(t_{j4}D_0+t_{j5}B_0\right)/(2\pi)$. Після розкладання $F_j\left(z\right)$ на нескінченності та використання рівнянь (4.28) та (4.30), отримуємо:

$$F_j(z)=i\frac{t_{j4}D_0+t_{j5}B_0}{2\pi}\chi_j(z)+(z-2ib\varepsilon_j)(\tilde{\sigma}_j-i\tilde{\tau}_j)\chi_j(z), \qquad (4.32)$$

де $\chi_j(z)=(z-c)^{-\frac{1}{2}+i\varepsilon_j}(z-b)^{-\frac{1}{2}-i\varepsilon_j}$, $\left(j=1,3,4,5\right)$.

В силу того, що $F_j^+(x_1)=F_j^-(x_1)=F_j\,(x_1)$ $\left(j=1,3,4,5\right)$ для $x_1>b$, з рівняння (4.26) отримуємо наступну формулу для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)$:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1,0)=\frac{1+\gamma_1}{r_{13}}\operatorname{Re}F_1(x_1) \quad \text{для } x_1>b. \qquad (4.33)$$

Уявні частини системи рівнянь (4.26) формують систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення $\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)$, $E_1^{(1)}(x_1,0)$ та $H_1^{(1)}(x_1,0)$:

$$\begin{cases} r_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+r_{14}E_1^{(1)}(x_1,0)+r_{15}H_1^{(1)}(x_1,0)=(1+\gamma_1)\operatorname{Im}F_1\,(x_1), \\ r_{41}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+r_{44}E_1^{(1)}(x_1,0)+r_{45}H_1^{(1)}(x_1,0)=2\operatorname{Im}F_4\,(x_1), \\ r_{51}\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)+r_{54}E_1^{(1)}(x_1,0)+r_{55}H_1^{(1)}(x_1,0)=2\operatorname{Im}F_5\,(x_1) \end{cases} \quad \text{для } x_1>b. \qquad (4.34)$$

Невідомі фактори $\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)$, $E_1^{(1)}(x_1,0)$ та $H_1^{(1)}(x_1,0)$ можуть бути легко визначені з останньої системи для $x_1>b$, але ми їх тут не приводимо, щоб уникнути громіздкості.

Беручи до уваги, що $F_j^-(x_1)=-\dfrac{1}{\gamma_j}F_j^+(x_1)$ $\left(j=1,3,4,5\right)$ для $x_1\in\left(c,b\right)$ та використовуючи рівняння (4.25), отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення переміщення, стрибків електричної та магнітної індукцій вздовж відрізку тріщини:

$$\begin{cases} t_{11}\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle + it_{13}\left\langle u_3'(x_1)\right\rangle + t_{14}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle + t_{15}\left\langle B_3(x_1)\right\rangle = \dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_1}F_1(x_1), \\ t_{41}\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle + t_{44}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle + t_{45}\left\langle B_3(x_1)\right\rangle = 2F_4(x_1), \\ t_{51}\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle + t_{54}\left\langle D_3(x_1)\right\rangle + t_{55}\left\langle B_3(x_1)\right\rangle = 2F_5(x_1) \end{cases} \quad \text{для } x_1 \in (c,b). \quad (4.35)$$

З першого рівняння (4.35) похідна розкриття тріщини приймає вид:

$$\left\langle u_3'(x_1)\right\rangle = \frac{\gamma_1+1}{t_{13}\gamma_1}\operatorname{Im}F_1(x_1), \quad (4.36)$$

а розкриття тріщини може бути записано в вигляді

$$\left\langle u_3(x_1)\right\rangle = \frac{\gamma_1+1}{t_{13}\gamma_1}\int_c^{x_1}\operatorname{Im}F_1(x_1)dx_1 \quad \text{для } x_1 \in (c,b). \quad (4.37)$$

Дійсні частини системи рівнянь (4.35) формують систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з яких можна легко знайти $\left\langle u_1'(x_1)\right\rangle$, $\left\langle D_3(x_1)\right\rangle$ та $\left\langle B_3(x_1)\right\rangle$.

Як можна побачити з (4.32) та підтверджено на рис. 4.2 та 4.3 отриманий розв’язок для “відкритої” тріщини приводить до осцилюючої сингулярності та фізично нереального проникнення берегів тріщини. Тому основна увага в наступній частині розділу буде приділена моделі з контактною зоною, яка вільна від зазначених недоліків.

4.5. Розв’язок задачі для тріщини з контактною тріщиною

Задовольняючи граничним умовам (4.13) за допомогою виразів (4.26), приходимо до рівняння

$$F_j^+\left(x_1\right) + \gamma_j F_j^-\left(x_1\right) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \quad \left(j = 1,3,4,5\right), \quad (4.38)$$

а граничні умови (4.14) з використанням виразів (4.25) та (4.26) дають наступні співвідношення

$$\operatorname{Im}\left[F_j^+\left(x_1\right)+\gamma_j F_j^-\left(x_1\right)\right]=0,\quad \operatorname{Im}\left[F_j^+\left(x_1\right)-F_j^-\left(x_1\right)\right]=0 \quad \left(j=1,3\right), \tag{4.39}$$

$$F_4^+\left(x_1\right)+F_4^-\left(x_1\right)=0,\quad F_5^+\left(x_1\right)+F_5^-\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_2. \tag{4.40}$$

Рівняння (4.38) $\left(j=1,3\right)$ та (4.39) приводять до наступної комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана:

$$F_j^+\left(x_1\right)+\gamma_j F_j^-\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_1, \tag{4.41}$$

$$\operatorname{Im}F_j^\pm\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_2,\quad \left(j=1,3\right), \tag{4.42}$$

в той же час представлення (4.38) для $\left(j=4,5\right)$ та (4.40) приводить до задач Гільберта

$$F_4^+\left(x_1\right)+F_4^-\left(x_1\right)=0,\ F_5^+\left(x_1\right)+F_5^-\left(x_1\right)=0 \quad \text{для } x_1\in L_1\cup L_2 \tag{4.43}$$

для аналітичних функцій $F_4\left(z\right)$ та $F_5\left(z\right)$ у всій площині за винятком відрізка $L_1\cup L_2$.

Враховуючи, що для $x_1\in L$ справедливі вирази $F_j^+(x_1)=F_j^-(x_1)=F_j\,(x_1)$, функції $F_j\left(z\right)$ аналітичні у всій площині за винятком відрізка $L_1\cup L_2$ та, використовуючи умови на нескінченності, приходимо до рівняння (4.28), яке визначає поведінку функцій $F_j\left(z\right)$ на нескінченності.

Використовуючи умови однозначності зміщень при обході контуру тріщини та умови, що визначають сумарну електричну та магнітну індукції для контуру, що лежить на нижній і верхній берегах тріщини, отримуємо рівняння (4.30).

З аналізу слідує, що розв’язок задач (4.41), (4.42), (4.28) та (4.30) для $k=3$ та $j=3$ може бути отриманий з розв’язку цих задач для $k=1$ та $j=1$. Тому далі розглядається розв’язок задачі (4.41), (4.42), (4.28) та (4.30) тільки для $k=1$ та $j=1$.

Розв’язок комбінованої граничної задачі Діріхле-Рімана (4.41), (4.42) знайдений та застосований до аналізу жорсткого штампу в роботі [41]. Стосовно проблеми міжфазної тріщини, ця задача була досліджена [108]. Використовуючи ці результати, точний розв’язок задачі (4.41), (4.42) для $k=1$, що задовольняє умові на нескінченності (4.28) та додатковим умовам (4.30), можна записати у вигляді

`

$$F_1(z) = P(z)X_1(z) + Q(z)X_2(z), \tag{4.44}$$

де $P(z) = C_1 z + C_2$, $Q(z) = D_1 z + D_2$,

$X_1(z) = ie^{i\varphi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-b)}$, $X_2(z) = e^{i\varphi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)}$,

$\varphi(z) = 2\varepsilon \ln \dfrac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{l(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}$, $\varepsilon = \dfrac{\ln\gamma_1}{2\pi}$, $l = b-c$,

$C_1 = -\tilde{\tau}_1 \cos\beta - \tilde{\sigma}_1 \sin\beta,\ D_1 = \tilde{\sigma}_1 \cos\beta - \tilde{\tau}_1 \sin\beta,$

$C_2 = -\dfrac{c+b}{2} C_1 - \beta_1 D_1 + \left(\dfrac{t_{14} D_0}{2\pi} + \dfrac{t_{15} B_0}{2\pi} \right) \cos\beta,$

$D_2 = \beta_1 C_1 - \dfrac{c+a}{2} D_1 + \left(\dfrac{t_{14} D_0}{2\pi} + \dfrac{t_{15} B_0}{2\pi} \right) \sin\beta$,

$$\beta = \varepsilon \ln \frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}},\ \beta_1 = \varepsilon \sqrt{(a-c)(b-c)},\ \lambda = \frac{b-a}{l}. \tag{4.45}$$

Розв’язки задач Гільберта (4.43) отримано з використанням результатів [40] у вигляді

$$F_4(z) = \frac{c_{04} + c_{14} z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}, \quad F_5(z) = \frac{c_{05} + c_{15} z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}. \tag{4.46}$$

Довільні константи $c_{04}, c_{14}, c_{05}, c_{15}$ визначаються з умов на нескінченності (4.28) для $j = 4,5$ та рівнянь (4.30). Це приводить до наступного розв'язку

$$F_j\left(z\right) = \frac{is_j(z)}{2\sqrt{\left(z-c\right)\left(z-b\right)}}, \tag{4.47}$$

де $s_j\left(z\right) = h_j\left(z - \dfrac{c+b}{2}\right) + \dfrac{t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0}{\pi}$, $\left(j = 4,5\right)$, $h_4 = r_{41}\tau^{\infty} + e^{\infty}$, $h_5 = r_{51}\tau^{\infty} + h^{\infty}$.

Підстановка розв'язку (4.44) до представлення (4.26) приводить до наступних рівнянь

$$ir_{11}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right) + r_{13}\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right) + ir_{14}E_1^{(1)}\left(x_1,0\right) + ir_{15}H_1^{(1)}\left(x_1,0\right) =$$

$$= \left[\frac{Q\left(x_1\right)}{\sqrt{x_1-a}} + \frac{iP\left(x_1\right)}{\sqrt{x_1-b}}\right]\frac{\vartheta_1 \exp\left[i\varphi\left(x_1\right)\right]}{\sqrt{x_1-c}} \quad \text{для } x_1 > b, \tag{4.48}$$

$$\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right) = \frac{\vartheta_1 P\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(b-x_1\right)}}\left[\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}\cosh\varphi_0\left(x_1\right) + \sinh\varphi_0\left(x_1\right)\right] +$$

$$+ \frac{\vartheta_1 Q\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-a\right)}}\left[\cosh\varphi_0\left(x_1\right) + \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}\sinh\varphi_0\left(x_1\right)\right] \quad \text{для } x_1 \in L_2, \tag{4.49}$$

де $\varphi_0\left(x_1\right) = 2\varepsilon \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{\left(b-x_1\right)\left(a-c\right)}{\left(x_1-a\right)\left(b-c\right)}}$.

З рівняння (4.48) отримуємо наступний вираз $\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right)$ для $x_1 > b$:

$$\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right) = \frac{\vartheta_1}{r_{13}}\left\{\frac{Q\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-a\right)\left(x_1-c\right)}} cos\,\varphi\left(x_1\right) - \frac{P\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-b\right)\left(x_1-c\right)}} sin\,\varphi\left(x_1\right)\right\}. \tag{4.50}$$

З рівняння (4.26) з урахуванням $r_{43} = 0$, $r_{45} = 0$, $r_{53} = 0$, $r_{54} = 0$ та (4.47) слідує, що

$$r_{41}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{44}E_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=\frac{2}{i}F_4\left(x_1\right)=\frac{s_4\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-b\right)}} \quad \text{для } x_1>b, \qquad (4.51)$$

$$r_{51}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{55}H_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=\frac{2}{i}F_5\left(x_1\right)=\frac{s_5\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-b\right)}} \quad \text{для } x_1>b. \qquad (4.52)$$

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, скомпонованих з (4.51), (4.52) та уявної частини рівняння (4.48) для $x_1>b$

$$r_{11}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{14}E_1^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{15}H_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=$$

$$=\frac{\vartheta_1 Q\left(x_1\right)}{\sqrt{x_1-a}\sqrt{x_1-c}}\sin\varphi\left(x_1\right)+\frac{\vartheta_1 P\left(x_1\right)}{\sqrt{x_1-b}\sqrt{x_1-c}}\cos\varphi\left(x_1\right),$$

$$r_{41}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{44}E_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=\frac{s_4\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-b\right)}}, \qquad (4.53)$$

$$r_{51}\sigma_{13}^{(1)}\left(x_1,0\right)+r_{55}H_1^{(1)}\left(x_1,0\right)=\frac{s_5\left(x_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c\right)\left(x_1-b\right)}}.$$

З системи легко можна знайти $\sigma_{13}^{(1)}(x_1,0)$, $E_1^{(1)}(x_1,0)$ та $H_1^{(1)}(x_1,0)$. З метою запобігання громіздкості їх вирази тут не приводяться.

Підстановка розв’язку (4.44) до представлення (4.25) приводить до виразів

$$t_{11}\left\langle u_1'\left(x_1\right)\right\rangle+it_{13}\left\langle u_3'\left(x_1\right)\right\rangle+t_{14}\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle+t_{15}\left\langle B_3\left(x_1\right)\right\rangle=$$

$$=2\sqrt{\alpha}\left[\frac{P\left(x_1\right)}{\sqrt{b-x_1}}-\frac{iQ\left(x_1\right)}{\sqrt{a-x_1}}\right]\frac{\exp\left[i\varphi^*\left(x_1\right)\right]}{\sqrt{x_1-c}} \quad \text{для } x_1\in L_1, \qquad (4.54)$$

$$t_{11}\left\langle u_1'\left(x_1\right)\right\rangle+t_{14}\left\langle D_3\left(x_1\right)\right\rangle+t_{15}\left\langle B_3\left(x_1\right)\right\rangle=$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(x_1 - c)}} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{(b - x_1)}} \cosh\varphi_0(x_1) - \frac{Q(x_1)}{\sqrt{(x_1 - a)}} \sinh\varphi_0(x_1) \right] \quad \text{для } x_1 \in L_2, \quad (4.55)$$

де $\varphi^*(x_1) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{l(a-x_1)} - \sqrt{(a-c)(b-x_1)}}$.

Використовуючи рівняння (4.25) при $j = 4,5$ та (4.47) та беручи до уваги $t_{43} = 0$, $t_{53} = 0$, отримуємо для $x_1 \in L_1 \cup L_2$:

$$t_{j1} \langle u_1'(x_1) \rangle + t_{j4} \langle D_3(x_1) \rangle + t_{j5} \langle B_3(x_1) \rangle = \frac{s_j(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(b - x_1)}}, \quad j = 4,5. \quad (4.56)$$

З рівняння (4.54) похідна розкриття тріщини може бути записана в вигляді:

$$\langle u_3'(x_1) \rangle = \frac{2\sqrt{\alpha}}{t_{13}} \left[\frac{P(x_1)\sin\varphi^*(x_1)}{\sqrt{(b - x_1)(x_1 - c)}} - \frac{Q(x_1)\cos\varphi^*(x_1)}{\sqrt{(a - x_1)(x_1 - c)}} \right], \quad (4.57)$$

тобто розкриття тріщини представляється формулою

$$\langle u_3(x_1) \rangle = \frac{2\sqrt{\alpha}}{t_{13}} \int_c^{x_1} \left[\frac{P(x_1)\sin\varphi^*(x_1)}{\sqrt{(b - x_1)(x_1 - c)}} - \frac{Q(x_1)\cos\varphi^*(x_1)}{\sqrt{(a - x_1)(x_1 - c)}} \right] dx_1 \quad \text{для } x_1 \in L_1. \quad (4.58)$$

З системи лінійних алгебраїчних рівнянь, скомпонованих з дійсних частин рівнянь (4.54) та співвідношень (4.56) на $x_1 \in L_1$, можна визначити вирази для $\langle u_1'(x_1) \rangle$, $\langle D_3(x_1) \rangle$ та $\langle B_3(x_1) \rangle$ на $x_1 \in L_1$. Крім цього, з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, скомпонованих з рівнянь (4.55) та співвідношень (4.56) для $x_1 \in L_2$, можна визначити вирази для таких же величин тільки для проміжку $x_1 \in L_2$.

4.6. Коефіцієнти інтенсивності

Далі введемо наступні коефіцієнти механічних напружень, електричного та магнітного полів формулами:

$$k_1 = \lim_{x_1 \to a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0),$$

$$k_2 = \lim_{x_1 \to b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \tag{4.59}$$

$$k_E = \lim_{x_1 \to b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)}E_1^{(1)}(x_1, 0),$$

$$k_H = \lim_{x_1 \to b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)}H_1^{(1)}(x_1, 0).$$

Використовуючи рівняння (4.49) для визначення k_1 та беручи до уваги, що $\varphi_0(a) = \ln\sqrt{\gamma_1}$, можемо записати

$$k_1 = \vartheta_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha(a-c)}}\, Q(a), \tag{4.60}$$

де $\alpha = \dfrac{(\gamma_1 + 1)^2}{4\gamma_1}$.

Для визначення k_2, k_E та k_H помножимо ліву та праву частина рівнянь (4.53) на $\sqrt{2\pi(x_1 - b)}$ та розглянемо при $x_1 \to b$. Отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$r_{11}k_2 + r_{14}k_E + r_{15}k_H = \vartheta_1 \sqrt{\frac{2\pi}{l}}P(b),$$

$$r_{41}k_2 + r_{44}k_E = s_4(b)\sqrt{\frac{2\pi}{l}}, \tag{4.61}$$

$$r_{51}k_2 + r_{55}k_H = s_5\left(b\right)\sqrt{\frac{2\pi}{l}},$$

де $$h_6 = \left(h_1 - 2\varepsilon\sqrt{1-\lambda}\sigma^{\infty} + \frac{\left(t_{14}D_0 + t_{15}B_0\right)\vartheta_1}{\pi l}\right)\cos\beta - \left(\sigma^{\infty} + 2\varepsilon h_1\sqrt{1-\lambda}\right)\sin\beta ,$$

$P\left(b\right) = \dfrac{l\,h_6}{2\vartheta_1}$, $s_j\left(b\right) = \dfrac{h_j l}{2} + \dfrac{t_{j4}D_0 + t_{j5}B_0}{\pi}$, ($j$=4, 5), $h_1 = r_{11}\tau^{\infty} + r_{14}e^{\infty} + r_{15}h^{\infty}$.

Розв'язок системи (4.61) дає необхідні вирази для коефіцієнтів інтенсивності механічного напруження k_2, електричного поля k_E та магнітного поля k_H.

4.7. Знаходження дійсної довжини зони контакту

Положення точки a, який визначає довжину контактної зони, можна знайти з наступних нерівностей:

$$\sigma_{33}^{(1)}\left(x_1,0\right) \le 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2, \quad \left\langle u_3\left(x_1\right)\right\rangle \ge 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1. \tag{4.62}$$

Виконання цих нерівностей приводить до наступного трансцендентного рівняння відносно λ:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sigma^{\infty}\sqrt{1-\lambda} + 2\varepsilon\, h_1}{2\varepsilon\,\sigma^{\infty} - h_1\sqrt{1-\lambda} - s\left(\lambda\right)}, \tag{4.63}$$

де $s\left(\lambda\right) = \dfrac{\left(t_{14}\,D_0 + t_{15}\,B_0\right)\left(1+\gamma_1\right)}{\pi\sqrt{\left(a-c\right)\left(b-c\right)}}$.

Вибір максимального кореня рівняння (4.63) з інтервалу $\left(0,1\right)$ забезпечує виконання обох нерівностей (4.62) на всьому проміжку тріщини за винятком малої зони осциляції біля лівої вершини тріщини, якою нехтуємо. Розв'язок рівняння (4.63) знаходиться чисельно. Але, якщо λ мале порівняно з 1, то для його знаходження може бути використана асимптотична формула, яка отримується з (4.63), шляхом припущення $\sqrt{1-\lambda} \approx 1$.

4.8. Числові результати та їх аналіз

Розглянемо вплив зовнішніх механічних, електричних і магнітних навантажень, а також сумарного електричного заряду на тріщині на напруження, електричне та магнітне поля, довжину контактоної зони та ектромагнітномеханічні коефіцієнти інтенсивності (КІ). Для числових розрахунків вибрано біматеріал, складений з $BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$ композитів з об’ємним вмістом (V_f) п’єзоелектрика $BaTiO_3$ рівним 0,5 (верхній матеріал) та 0,1 (нижній матеріал) [123]. Для відрізка тріщини вибиралось $c = -0{,}01$ м та $b = 0{,}01$ м. Характеристики матеріалів представлені в табл. 3.1. Матриця **S** без других рядка та стовпця в системі СІ для біматеріалу V_f5/V_f1 має наступний вид

$$\begin{bmatrix} 3{,}995\times10^{10}i & 1{,}718\times10^{9} & 3{,}737\times10^{8}i & 125519i \\ -1{,}718\times10^{9} & 3{,}796\times10^{10}i & -2{,}702\times10^{8} & 114877 \\ -3{,}737\times10^{8}i & -2{,}702\times10^{8} & -1{,}2839\times10^{8}i & 6801{,}08i \\ -125519i & 114877 & 6801{,}08i & -2294{,}49i \end{bmatrix}.$$

Спочатку на рисунках 4.2 та 4.3 показано стрибок нормального переміщення (розкриття тріщини) для “відкритої” моделі тріщини. Ці результати отримані для σ^{∞} = 10 МПа; τ^{∞} = 0 та B_0 = 0. Крім того, лінії І отримані для e^{∞} = 0, h^{∞} = 0; лінії ІІ – для e^{∞} = 0,4 × 10^7 В/м, h^{∞} = 0; лінії ІІІ – для e^{∞} = 0, h^{∞} = –0,25 × 10^6 А/м. Рис. 4.2 побудований для усього відрізка тріщини при D_0 = 0, в той же час рис. 4.3 – для околу правої вершини тріщини при D_0 = 0,0002126 Кл/м. З отриманих результатів можна побачити, що як електричне так і магнітне поля, а також загальний електричний заряд тріщини суттєво впливають на розкриття тріщини. Крім того, у всіх випадках має місце взаємопроникнення берегів біля вершин тріщини. Очевидно, що відносно великі розміри цих зон викликані електричним або магнітним полями і, очевидно, що ці зони є фізично нереальними. Тому, проілюструємо далі результати, пов'язані з контактною моделлю, яка вільна від зазначеного явища.

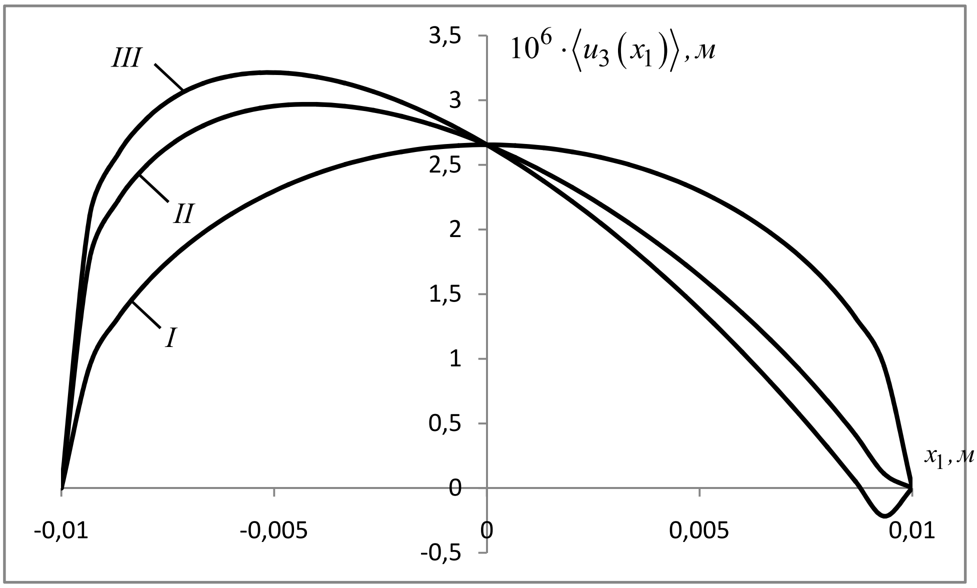


Рис. 4.2. Зміна розкриття тріщини вздовж її довжини для біматеріала V_f5/V_f1 та $\sigma^\infty = 10$ МПа, $\tau^\infty = 0$, $D_0 = 0$, $B_0 = 0$, $e^\infty = 0$, $h^\infty = 0$ (лінія I); $e^\infty = 0{,}4 \times 10^7$ В/м, $h^\infty = 0$ (лінія II) та $e^\infty = 0$, $h^\infty = -0{,}25 \times 10^6$ А/м (лінія III).

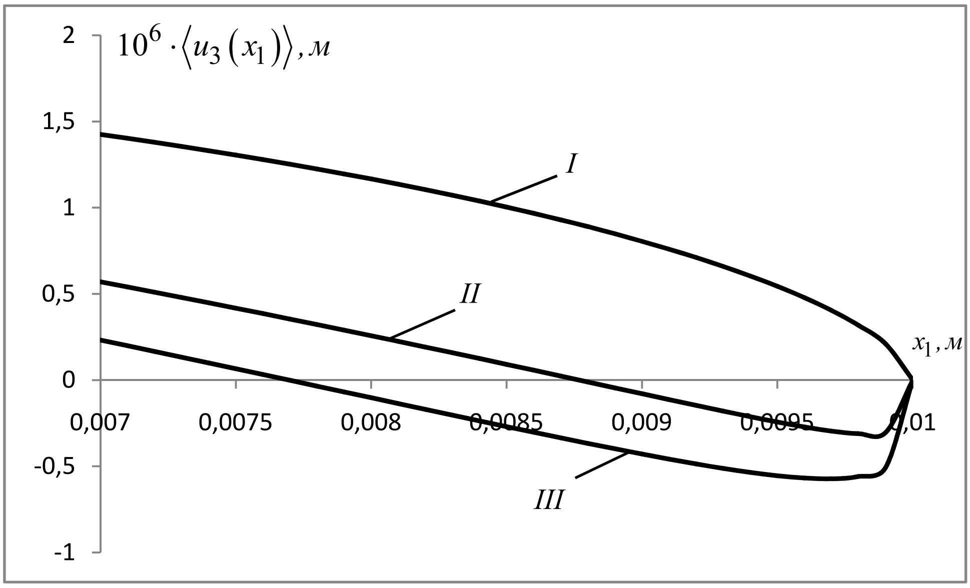


Рис. 4.3. Зміна розкриття тріщини в околі її вершини для біматеріалу V_f5/V_f1 та $\sigma^\infty = 10$ МПа, $\tau^\infty = 0$, $D_0 = 0{,}0002126$ Кл/м, $B_0 = 0$, $e^\infty = 0$, $h^\infty = 0$ (лінія I); $e^\infty = 0{,}4 \times 10^7$ В/м, $h^\infty = 0$ (лінія II) та $e^\infty = 0$, $h^\infty = -0{,}25 \times 10^6$ А/м (лінія III).

В таблиці 4.1 представлені величини відносної довжини контактної зони λ для різних значень електричного e^{∞} та магнітного h^{∞} полів на нескінченності при різних значеннях сумарного електричного заряду тріщини D_0 та $B_0 = 0$. Матеріали, довжина тріщини та механічне навантаження використовувались ті ж самі, що і на рисунках 4.2 та 4.3. Варто зазначити, що для більшості комбінацій навантажень відносна довжина зони контакту вкрай мала. Проте, можна побачити з таблиці 4.1, що незважаючи на відсутність прикладених дотичних напружень відносна довжина зони контакту в ряді випадків досить велика і досягає іноді чверті довжини тріщини.

Таблиця 4.1

Залежність відносної довжини контактної зони λ від електричних та магнітних зовнішніх впливів

D_0, Кл/м	e^{∞}=4×10^6 В/м; h^{∞}=0	e^{∞}=0; h^{∞}=–0,25×10^6 А/м	e^{∞}=0; h^{∞}=–0,4×10^6 А/м
0	0,0117616	0,0332242	0,085154
0,00025	0,0390913	0,0701259	0,125381
0,0005	0,0888838	0,123144	0,173103
0,00085	0,204454	0,22653	0,252347

Величини коефіцієнтів інтенсивності дотичного напруження k_2, електричного k_E та магнітного k_H полів, які отримані з системи (4.61), представлені в таблицях 4.2, 4.3 та 4.4 відповідно. Були використані такі ж зовнішні чинники як і в таблиці 4.1. З цих результатів випливає, що

– зміна h^{∞} дуже слабо впливає на коефіцієнти інтенсивності напруження k_2 та електричного поля k_E за умови, що інші зовнішні параметри залишаються незмінними (таблиці 4.2, 4.3), проте згадана зміна істотно впливає на магнітний коефіцієнт інтенсивності k_H (таблиця 4.4);

– розтягуючі напруження разом з електричним полем викликають відносно малий коефіцієнт інтенсивності магнітного поля k_H в той час як величини коефіцієнтів інтенсивності k_2 і k_E в даному випадку є досить відчутними (треті стовпці таблиць 4.4 та 4.2, 4.3 відповідно);

– збільшення електричного заряду призводить до суттєвого зростання коефіцієнта інтенсивності електричного поля і майже не впливає на коефіцієнт інтенсивності магнітного поля (таблиці 4.3, 4.4);

Таблиця 4.2

Залежність КІН k_2 від електричного та магнітного зовнішніх впливів

D_0, Кл/м	e^{∞}=4×10^6 В/м; h^{∞}=0	e^{∞}=0; h^{∞}=–0,25×10^6 А/м	e^{∞}=0; h^{∞}=–0,4×10^6 А/м
0	–62383,1	–53321,1	–49130,2
0,00025	–565790	–563502	–564780
0,0005	$-1{,}07752 \times 10^6$	$-1{,}07846 \times 10^6$	$-1{,}0827 \times 10^6$

Таблиця 4.3

Залежність коефіцієнту інтенсивності електричного поля k_E від електричного та магнітного зовнішніх впливів

D_0, Кл/м	e^{∞}=4×10^6 В/м; h^{∞}=0	e^{∞}=0; h^{∞}=–0,25×10^6 А/м	e^{∞}=0; h^{∞}=–0,4×10^6 А/м
0	718793	8386,03	7726,9
0,00025	896165	186823	187024
0,0005	$1{,}07485 \times 10^6$	366012	366678

Таблиця 4.4

Залежність коефіцієнту інтенсивності магнітного поля k_H від електричного та магнітного зовнішніх впливів.

D_0, Кл/м	$e^{\infty}=4\times10^6$ В/м; $h^{\infty}=0$	$e^{\infty}=0$; $h^{\infty}=-0{,}25\times10^6$ А/м	$e^{\infty}=0$; $h^{\infty}=-0{,}4\times10^6$ А/м
0	–4,17203	–44314,9	–70901,4
0,00025	–12,1833	–44323,4	–70910,3
0,0005	–20,7517	–44332,2	–70919,3

Розкриття тріщини для контактної моделі показано на рисунках 4.4. та 4.5. Ці результати отримані для σ^{∞} = 10 МПа, τ^{∞} = 0 та B_0 = 0. Лінії I нарисовані для e^{∞} = 4 × 10^6 В/м, h^{∞} = 0, лінії II – для e^{∞} = 0, h^{∞} = –0,25 × 10^6 А/м, лінії III – для e^{∞} = 0, h^{∞} = –0,4 × 10^6 А/м. Рис. 4.4 побудований для усього відрізка тріщини і D_0 = 0, в той же час рис. 4.5 побудований для частини відрізка тріщини в околі її правої вершини для D_0 = 0,0002126 Кл/м.

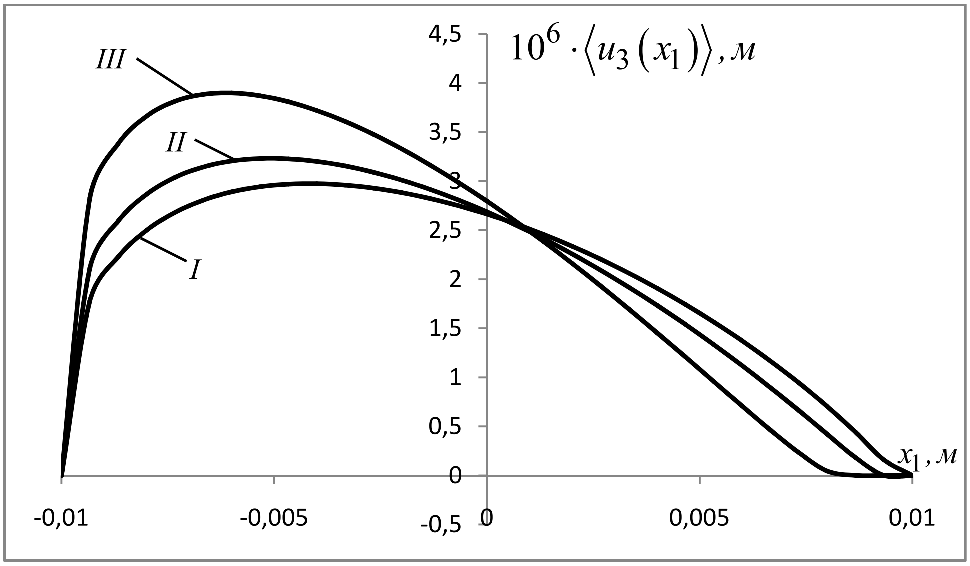


Рис. 4.4. Зміна розкриття тріщини для моделі з контактною зоною для біматеріалу V$_f$5/V$_f$1 та σ^{∞} = 10 МПа, τ^{∞} = 0, D_0 = 0, B_0 = 0, e^{∞} = 4 × 10^6 В/м, h^{∞} = 0 (лінія I); e^{∞} = 0, h^{∞} = –0,25 × 10^6 А/м (лінія II) та e^{∞} = 0, h^{∞} = –0,4 × 10^6 А/м (лінія III).

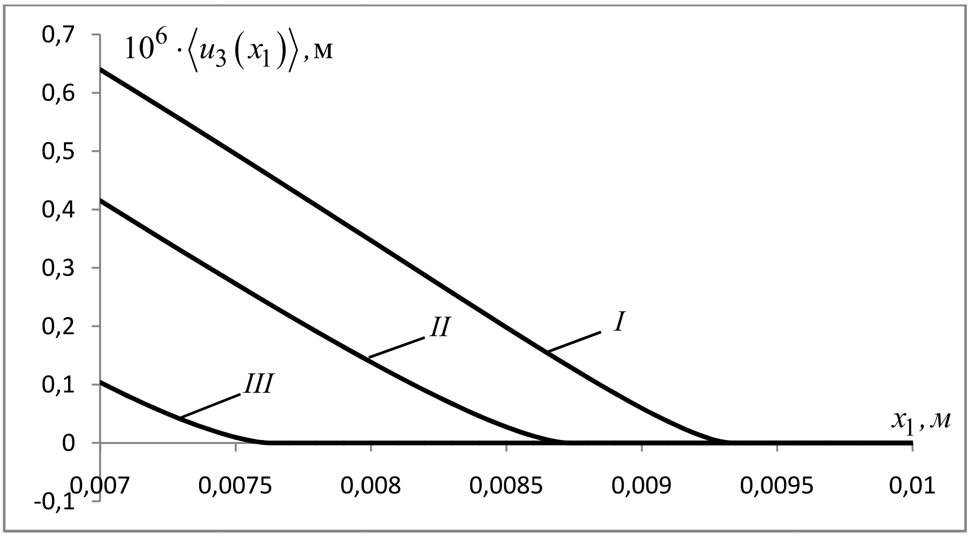
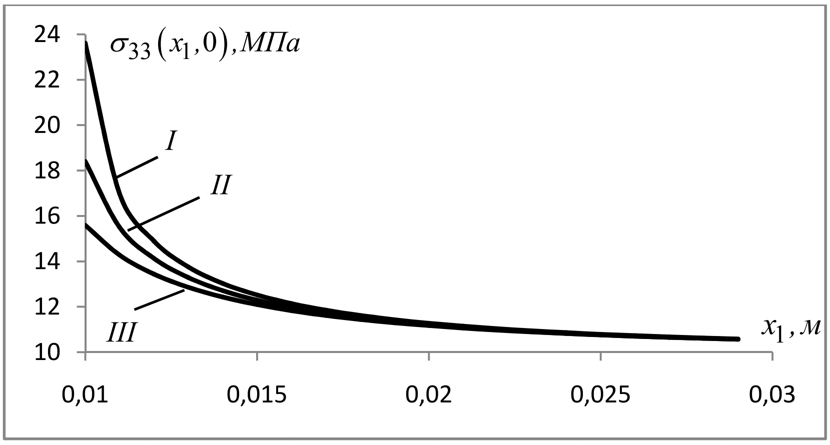
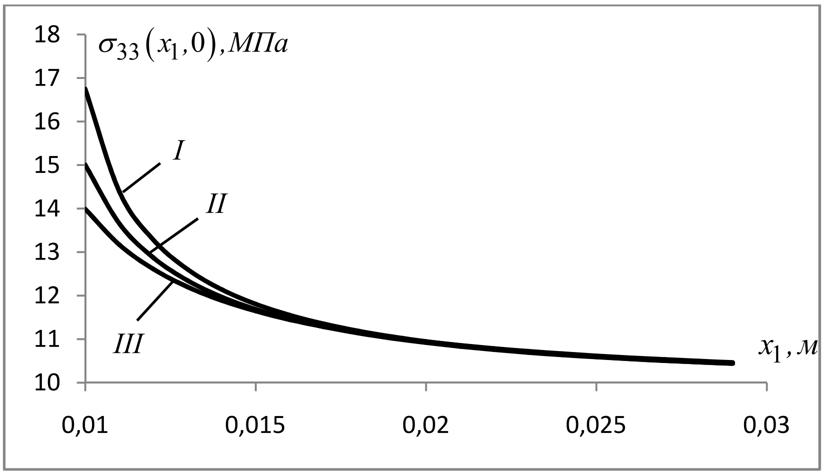


Рис. 4.5. Зміна розкриття тріщини для моделі з контактною зоною для біматеріалу V_f5/V_f1 та σ^∞ = 10 МПа, τ^∞ = 0, D_0 = 0,0002126 Кл/м, B_0 = 0, e^∞ = 4 × 10^6 В/м, h^∞ = 0 (лінія I); e^∞ = 0, h^∞ = –0,25 × 10^6 А/м (лінія II) та e^∞ = 0, h^∞ = –0,4 × 10^6 А/м (лінія III).

Результати обчислень нормального напруження $\sigma_{33}(x_1,0)$ та магнітного поля $H_1(x_1,0)$ на продовженні тріщини, а також стрибка магнітного зміщення $\langle B_3(x_1) \rangle$ по області тріщини показані на рисунках 4.6а, 4.6б – 4.8а, 4.8б відповідно. Результати на цих рисунках отримані для σ^∞ = 10 МПа, τ^∞ = 0 та B_0 = 0. Крім того e^∞ = 4 × 10^6 В/м, h^∞ = 0 (лінії I); e^∞ = 0, h^∞ = –0,25 × 10^6 А/м (лінії II); e^∞ = 0, h^∞ = –0,4 × 10^6 А/м (лінії III). Рисунки 4.6а – 4.8а побудовані для D_0 =0 в той же час рисунки 4.6б – 4.8б – для D_0 = 0,0002126 Кл/м.



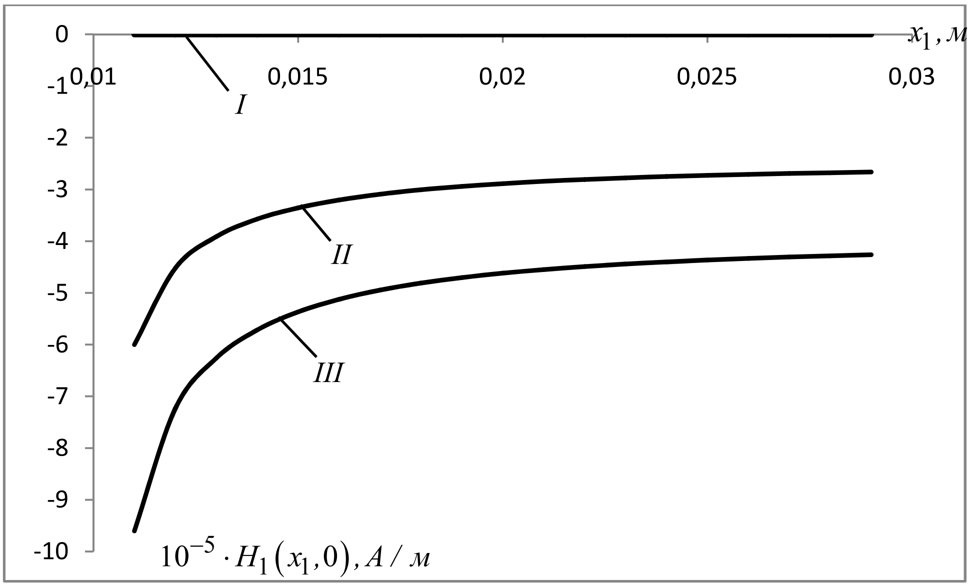
а)



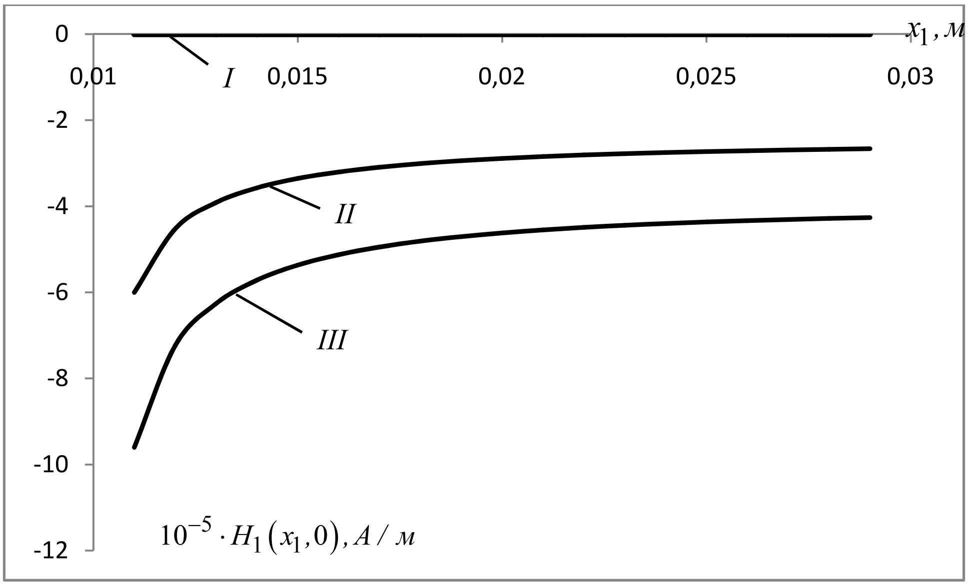
б)

Рис. 4.6 а, б. Зміна нормального напруження $\sigma_{33}(x_1,0)$ для моделі з контактною зоною на продовженні тріщини для таких же зовнішніх напружень, електричного та магнітного полів як на рис. 4.4 та 4.5 та для $D_0 = 0$ (*а*), $D_0 = 0{,}0002126$ Кл/м (*б*).

З отриманих результатів можна побачити, що як електричне так і магнітне поля мають сильний вплив на параметри, що аналізуються, особливо в околі вершини тріщини. Крім того, зміна нормального напруження $\sigma_{33}(x_1,0)$ на продовженні тріщини показує, що хоча це напруження не є сингулярним у правому околі точки *b*, його значення залишається дуже великим в цій зоні та може викликати розвиток тріщини. Але, якщо додатково прикладається магнітна індукція, значення нормального напруження зменшується. Варто відзначити також, що магнітне поле дуже швидко зростає за абсолютною величиною в околі вершини тріщини, але воно має тенденцію зменшення до його номінального значення на відстані приблизно рівному довжині тріщини. Очевидно також, що наявність позитивного сумарного електричного заряду тріщини призводить до зменшення магнітного поля на продовженні тріщини. Поведінка стрибків магнітного зміщення $\langle B_3(x_1)\rangle$ по області тріщини демонструє його істотне зростання біля вершин тріщини через особливості в цих точках. До того ж цікаво, що дуже низькі значення цієї величини спостерігаються при ненульовому електричному та нульовому магнітному полях.

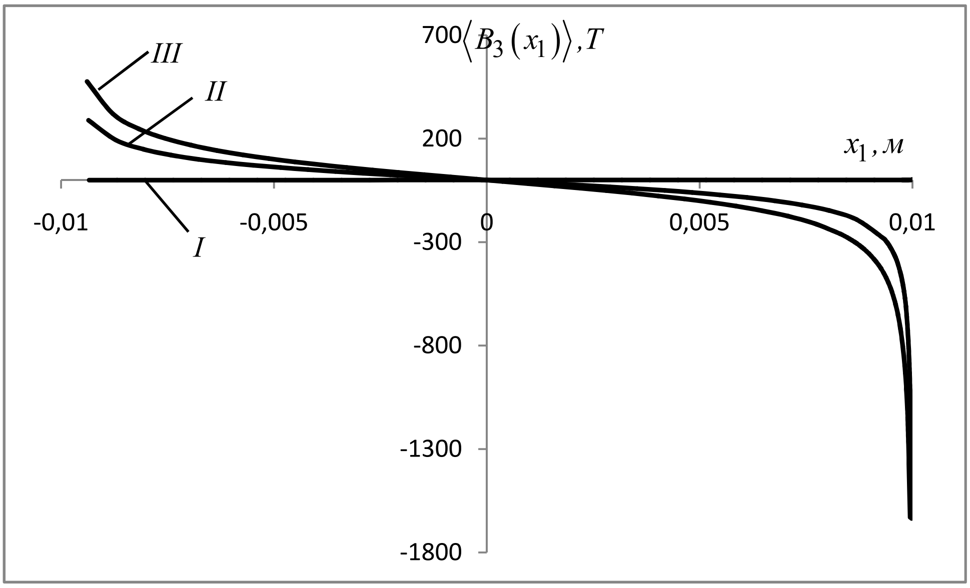


а)

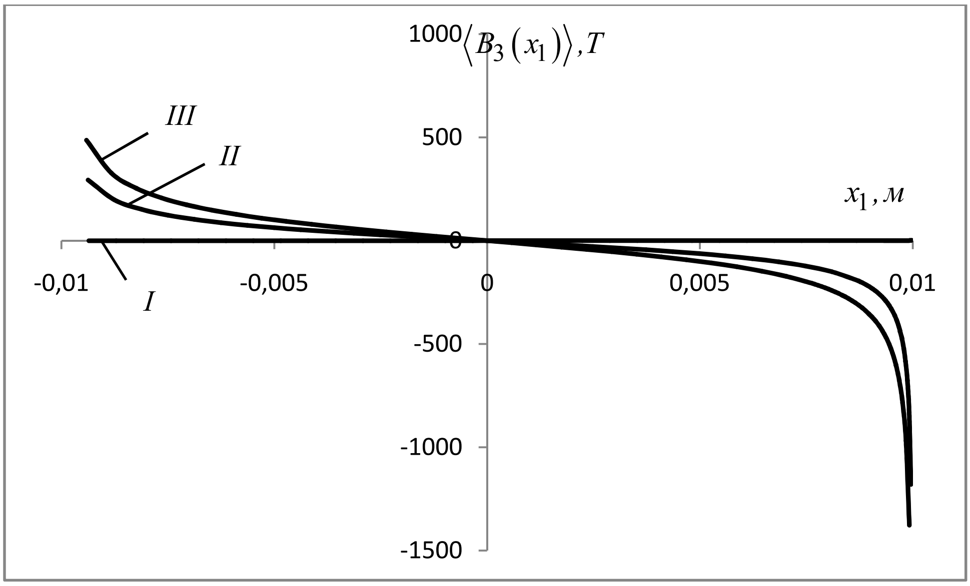


б)

Рис. 4.7 а, б. Зміна магнітного поля $H_1(x_1, 0)$ на продовженні тріщини для моделі з контактною зоною для таких же зовнішніх напружень, електричного та магнітного полів як на Рис. 4.4 та 4.5 та для $D_0 = 0$ (*а*), $D_0 = 0{,}0002126$ Кл/м (*б*).



а)



б)

Рис. 4.8 а, б. Зміна стрибка магнітної індукції $\langle B_3(x_1)\rangle$ для моделі з контактною зоною вздовж відрізка тріщини для таких же зовнішніх напружень, електричного та магнітного полів як на рис. 4.4 та 4.5 та для $D_0 = 0$ (*а*), $D_0 = 0{,}0002126$ Кл/м (*б*).

4.9. Висновки

Проаналізовано міжфазну тріщину з контактною зоною в п'єзоелектричному/п'єзомагнітному біматеріалі під дією розтягуючих та зсувних напружень, електричних і магнітних полів, паралельних до берегів тріщини. Вважалось, що п'єзокерамічні матеріали, поляризовані в напрямку, перпендикулярному до берегів тріщини, а ці береги покриті механічно м'якими електродами з сегнетоелектричного матеріалу і мають визначений сумарний електричний заряд і залишкову магнітну індукцію. У цьому випадку електричне та магнітне поля не змінюються вздовж берегів тріщини.

Отримані вектор-матричні вирази (4.6) і (4.7) для напруження, електричного зміщення та магнітної індукції, а також для пружних переміщень, електричних і магнітних стрибків потенціалів через кусково-голоморфні вектор-функції. Спочатку припускалось, що тріщина повністю відкрита, і була сформульована відповідна задача Гільберта (4.27). Ця задача розв’язана в точній аналітичній формі. В результаті були виявлені осцилюючі особливості, що призводить до фізично нереального взаємопроникнення берегів тріщини. Тому далі була розглянута модель з контактною зоною. Для довільної довжини контактної зони, проаналізована задача зводиться в цьому випадку до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана (4.41), (4.42) і проблем Гільберта (4.43) по відношенню до компонентів згаданої вище вектор-функції. Знайдено точний аналітичний розв’язок цих задач. Отримано аналітичні вирази для напружень, електричних і магнітних зміщень, а також для пружних переміщень, стрибків електричної та магнітної індукцій уздовж області тріщини.

Було знайдено трансцендентне рівняння (4.63) для визначення реальної довжини зони контакту. Розв’язок цього рівняння можна легко знайти чисельно. Довжина зони контакту та відповідні напруження, електричні та магнітні поля, коефіцієнти інтенсивності знайдені для різних комбінацій матеріалів і навантажень. Чисельні результати представлені для біматеріала V_f5/V_f1 в таблицях 4.1-4.4 і на рис. 4.4 - 4.8.

З чисельних результатів таблиці 4.1 видно, що відносна довжина зони контакту в багатьох випадках досить велика та досягає чверті довжини тріщини, незважаючи на відсутність прикладених дотичних напружень. Спостерігається відчутний вплив зовнішнього магнітного поля на довжину контактної зони, напруження та коефіцієнт інтенсивності магнітного поля, а також на стрибок магнітного зміщення та магнітне поле, особливо в безпосередній близькості до вершини тріщини.

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження з розвитку аналітичних методів розв'язання плоских задач для міжфазної тріщини в п'єзоелектричному та п'єзоелектромагнітному біматеріальних просторах під дією механічних, електричних та магнітних навантажень отримано такі основні результати:

1. З використанням представлень напружень і переміщень через кусково-аналітичні функції сформульовано задачі лінійного спряження, що відповідають моделям відкритої тріщини й тріщини з зоною контакту для електропровідної міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі під дією механічних навантажень та електричного поля. Шляхом побудови точних аналітичних розв'язків вказаних задач отримано стрибки переміщень, напруження, електричного поля та їх коефіцієнти інтенсивності, а також трансцендентне рівняння для визначення довжини зони контакту берегів тріщини.

2. Враховано сумарний електричний заряд тріщини. Досліджено залежності довжини зони контакту та коефіцієнтів інтенсивності електромеханічних величин від величини прикладених напружень, електричного поля та сумарного заряду тріщини.

3. Для біматеріалу, який має одночасно п'єзоелектричні та п'єзомагнітні властивості, отримано представлення напружень, електричного поля, а також стрибків переміщень та електричної індукції через кусково-аналітичні вектор-функції. Завдяки цим представленням сформульовано неоднорідні комбіновані крайові задачі Діріхле-Рімана для випадків електропровідної та магнітнопроникної тріщини з зоною контакту між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами і отримано її точний аналітичний розв'язок. Проведена чисельна ілюстрація одержаних розв'язків для біматеріалу, сформованого з різних варіантів з'єднань $BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$.

4. Розглянуто електро- та магнітнопровідну міжфазну тріщину в п'єзоелектричному/п'єзомагнітному біматеріалі. В цьому випадку з'являються

додаткові компоненти магнітного поля та стрибка магнітної індукції в якості невідомих функцій, в представленнях характеристик електро-магніто-механічного поля через кусково-аналітичні функції. Для цієї проблеми шляхом формулювання задач лінійного спряження також було отримано точні аналітичні розв’язки як для відкритої, так і контактної моделей тріщини.

5. Для різних зовнішніх навантажень, різних комбінацій матеріалів $BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$ та величин сумарного електричного заряду представлені результати розрахунків у вигляді таблиць та графіків.

6. Аналіз результатів проведених числових досліджень у рамках розроблених моделей дав можливість виявити і сформулювати нові ефекти та закономірності, серед яких найбільш вагомими є:

- у випадку електропровідної та магнітнопроникної тріщини як віддалене електричне поле, паралельне берегам тріщини, так і її сумарний електричний заряд суттєво впливають на довжину зони контакту (a,b) та електромеханічні характеристики в околі тріщини, а вплив магнітного потоку на вказані характеристики не вносить в них додаткових сингулярних складових;
- вказані в попередньому пункті фактори можуть привести до виникнення значних областей контакту берегів тріщини навіть при відсутності полів зовнішніх зсувних напружень;
- у випадку електро- та магнітнопровідної тріщини в полі розтягуючого механічного навантаження, перпендикулярного берегам, та магнітного поля їм паралельного, довжина зони контакту може досягати в деяких випадках чверті довжини тріщини, незважаючи на відсутність прикладених дотичних напружень.
- встановлено ряд цікавих кількісних залежностей, які відображені на графіках та в таблицях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Баева А. И. Магнитоупругое состояние многосвязного полупространства и полуплоскости с отверстиями и трещинами / А. И. Баева, О. И. Бороненко // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 63–72.

2. Байдачный С. С. Контактные задачи для упругого тела с щелями, заполненнями жидкостями / С. С. Байдачный, В. И. Кузьменко // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 1999. – Вип. 2, т. 2. – С. 13–20.

3. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика : пер. с англ. / под ред. У. Мэзона. – М. : Мир, 1966. – Т. 1 : Методы и приборы ультразвуковых исследований. – Ч. А. – С. 204–326.

4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Физматгиз, 1963. – 639 с.

5. Говоруха В. Б. Моделі та методи механіки руйнування п'єзокерамічних тіл з міжфазними тріщинами / В. Б. Говоруха, В. В. Лобода. – Д.: Вид-во ДНУ, 2013. – 252 с.

6. Грилицкий Д. В. Об упругом равновесии неоднородной пластинки с разрезами / Д. В. Грилицкий // Прикладная механика.– 1966. – 2, № 5. – С. 12–18.

7. Гриневич А. А. Аналітичне дослідження електродованої тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі / А. А. Гриневич, П. Ю. Книш, В. В. Лобода // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наукових праць. – Дн.: Ліра. – Вип. 22. – 2014. – С. 80-95.

8. Гриневич А. А. Електрично заряджена електродована тріщина з зоною контакту між двома п'єзоелектричними матеріалами / А. А. Гриневич, А. Є. Шевелева, В. В. Лобода // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології: Науковий збірник. – Львів, 2015. – Вип. 21. – С. 67–78.

9. Гриневич А. А. Міжфазна тріщина з зоною контакту в п’єзоелектричному/п’єзомагнітному біматеріалі / А. А. Гриневич // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2015. – Т. 23, № 5, вип. 19. – С. 86-95.

10. Гриневич А. А. Міжфазна електрично та магнітно провідна тріщина в п’єзоелектричному/п’єзомагнітному біматеріалі / А. А. Гриневич, В. В. Лобода // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 57-69.

11. Гринченко В. Т. Электроупругость / Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. – К. : Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкцій; т. 5).

12. Гузь А. Н. Пространственные задачи динамической механики разрушения материалов с трещинами в границе раздела (обзор) / А. Н. Гузь, И. А. Гузь, А. В. Меньшиков, В. А. Меньшиков // Прикладная механика. – 2013. – Т. 49, № 1. – С. 3–78.

13. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках / А. Н. Гузь. – К. : Наук. думка, 1993. – 237 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения; т. 4., кн. 2).

14. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями / А. Н. Гузь. – К. : Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения; т. 2).

15. Ингленд (England A. H). Трещина между двумя разными средами / Ингленд // Сб. переводов иностранных статей «Механика». – 1965. – С. 165–168.

16. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк : Юго-Восток, 2007. – 268 с.

17. Калоеров С. А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С. А. Калоеров, А. В. Петренко. – Донецк. Юго-Восток, 2011. – 232 с.

18. Каминский А. А. Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикладная механика. – 1995. – 31, № 6. – С. 86–91.

19. Каминский А. А. Механика разрушения вязко-упругих тел / А. А. Каминский. – К. : Наук. думка. – 1980. – 159 с.

20. Каминский А. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикладная механика. – 1999. – 35, № 1. – С. 63–68.

21. Каминский А. А. О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, И. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикладная механика. – 2006. – 42, № 2. – С. 14–23.

22. Каминский А. А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред / А. А. Каминский, И. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикладная механика. – 2006. – 43 (53), № 10. – С. 28–41.

23. Каминский А. А. О начальном развитии зоны предразрушения вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, И. В. Дудик // Прикладная механика. – 2004. – 40, № 2. – С. 74–81.

24. Каминский А. А. Разрушение вязко-упругих тел с трещинами / А. А. Каминский. – К. : Наук. думка, 1990. – 312 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения; т. 1).

25. Кит Г. С. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами / Г. С. Кит, М. В. Хай. – К.: Наукова думка, 1989. – 282 с.

26. Кит Г. С. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин / Г. С. Кит, О. В. Побережный. – К. : Наукова Думка. – 1992. – 216 с.

27. Кныш П. Ю. Аналитические и численное исследование элетродированой трещины в пьезоэлектрическом материале / П. Ю. Кныш, В. В. Лобода // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2012. – С. 1–15.

28. Комаров О. В. Рух електроізольованої міжфазної тріщини з докритичною швидкістю у п'єзоелектричному біматеріальному просторі / О. В. Комаров, В. В. Лобода // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 49, № 1. – 2006. – С. 116–131.

29. Кудрявцев Б. А. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная тоннельная трещина на межфазной границе с проводником / Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин // Прикладная математика и механика. – 1975. – 39. – С. 149–159.

30. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М. : Наука. – 1977. – 416 с.

31. Лобода В. В. Контактна модель зовнішньої електро-проникної міжфазної тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі / В. В. Лобода, О. С. Філіпова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 3. – С. 77–85.

32. Лобода В. В. Об одном эффекте в теории межфазной трещины / В. В. Лобода // Докл. АН УССР. – 1989. – № 8. – С.39-43.

33. Лобода В. В. О межфазной трещине с учетом контакта ее берегов / В. В. Лобода // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Д., 1991. – С. 78–86.

34. Лобода В. В. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами / В. В. Лобода, А. Е. Шевелёва // Прикладная механика. – 2003. – 39, № 5. – С. 76–82.

35. Меньшиков В. А. Круговая трещина в плоскости раздела упругих материалов под действием нормальной гармонической нагрузки / В. А. Меньшиков // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 166–170.

36. Меньшиков В. А. Предельные переходы в динамической задаче о трещине на поверхности раздела упругих сред / В. А. Меньшиков, А. В. Меньшиков, И. А. Гузь // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44 (54), № 7. – С. 26–34.

37. Можен М. Механика электромагнитных сплошных сред : пер. с англ. / М. Можен. – М. : Мир, 1991. – 560 с.

38. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин / Н. Ф. Морозов. – М. : Наука, 1984. – 256 с.

39. Моссаковский В. И. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела / В. И. Моссаковский, М. Т. Рыбка // Прикладная математика и механика. – 1964. – № 6. – С. 1061–1069.

40. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

41. Нахмейн Е. Л. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом / Е. Л. Нахмейн, Б. М. Нуллер // Прикладная математика и механика. – 1986. – Вып. 4, т. 50. – С. 663–673.

42. Николаев А. Г. Упругая механика многокомпонентных тел. Монография / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик. – Х: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2014. – 272 с.

43. Острик В. И. Контактная задача для межфазной полубесконечной трещины / В. И. Острик, А. Ф. Улитко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 3. – С. 88–95.

44. Острик В. І. Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь / В. І. Острик, А. Ф. Улітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 84–94.

45. Острик В. І. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів / В. І. Острик, А. Ф. Улітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 2. – С. 119–126.

46. Острик В. І. Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву / В. І. Острик // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 58–65.

47. Павленко А. В. Метод збурень у двовимірних задачах електропружності / А. В. Павленко, Т. С. Кагадій, О. Д. Онопрієнко // French Journal of Scientific and Educational Research. – 2014. – №2 (12), Vol. IV. – P. 275–281.

48. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К. : Наукова думка, 1968. – 246 с.

49. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К. : Наукова думка, 1976. – 456 с.

50. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М. : Наука, 1988. – 471 с.

51. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 342 с.

52. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К. : Наукова думка, 1981. – 324 с.

53. Симонов И. В. О хрупком расклинивании кусочно–однородной среды / И. В. Симонов // Прикладная математика и механика. – 1985. – 49. – Вып. 2. – С. 275–283.

54. Симонов И. В. Об интегрируемом случае краевой задачи Римана–Гильберта для двух функций и решении некоторых смешанных задач для составной плоскости / И. В. Симонов // Прикладная математика и механика. – 1985. – 49. – Вып. 6. – С. 951–960.

55. Симонов И. В. Межфазная трещина в однородном поле напряжений / Симонов И. В. // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.

56. Слепян Л. И. Механика трещин / Л. И. Слепян. – Л. : Судостроение, 1990. – 296 с.

57. Смайт В. Электростатика и электродинамика / В. Смайт // М.: Издательство иностранной литературы. – 1954. – 606 с.

58. Смирнов С. А. Напряженное состояние двухслойной толстостенной сферической оболочки с разрезами / С. А. Смирнов // Докл. АН УССР. – 1991. – № 9. – С. 97–101.

59. Смирнов С. А. Об одном подходе к решению задачи о сферическом разрезе в неоднородном теле / С. А. Смирнов // Докл. АН Украины. – 1992. – № 7. – С. 66–70.

60. Сулим Г. Т. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами / Г. Т. Сулим, Д. В. Грилицкий // Физ.-хим. мех. материалов. – 1972. – 8. – № 11.– С. 58–65.

61. Сулим Г. Т. Периодическая задача для составной плоскости с трещинами / Г. Т. Сулим, Д. В. Грилицкий, И. П. Белокур // Физ.-хим. мех. материалов. – 1977. – 13. – № 1. – С. 82–86.

62. Улитко А. Ф. Полубесконечный разрез вдоль границы жесткого соединения полупластин из различных материалов / А. Ф. Улитко // Совр. проблемы мех. сплошной среды. – Ростов-на-Дону. – 1995. – С. 185–193.

63. Улітко А. Ф. Міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту берегів / А. Ф. Улітко, В. І. Острик // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. Науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 133–141.

64. Фильштинский Л. А. Функция Грина для составной пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной / Л. А. Фильштинский, М. Л. Фильштинский // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58. – Вып. 2. – С. 159–166.

65. Фильштинский Л. А. Моделирование физических полей в кусочно-однородных деформируемых телах / Л. А. Фильштинский. – Сумы : Изд. СГУ, 2001. – 451 с.

66. Харун І. В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів / І. В. Харун, В. В. Лобода // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2002. – Т. 45, № 2. – С. 103–113.

67. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. / Г. П. Черепанов – М.: Наука, 1983. – 296 с.

68. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1974. – 640 с.

69. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами / Г. П. Черепанов. // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 131–137.

70. Шевельова А. Є. Про моделювання зони руйнування міжфазної тріщини / А. Є. Шевельова // Машинознавство. – 1999. – №4 (22) – С. 46–50.

71. Шевельова А. Є. Про моделювання привершинних зон тріщини між двома анізотропними матеріалами / А. Є. Шевельова // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – Т. 36, №2. – С. 33–40.

72. Atkinson C. On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics / C. Atkinson // Int. J. of Fracture. – 1977. – Vol. 13. – P. 807–820.

73. Atkinson C. The interface crack with a contact zone (an analytical treatment) / C. Atkinson // Int. J. of Fracture. – 1982. – 18. – P. 161–177.

74. Beom H. G. Singular behavior near a crack tip in an electrostrictive material / H. G. Beom // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1999a. – 47. – P. 1027–1049.

75. Beom H. G. Small scale nonlinear analysis of electrostrictive crack problems / H. G. Beom // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1999b. – 47. – P. 1379–1395.

76. Beom H. G. Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media / H. G. Beom, S. N. Atluri // Int. J. o f Fracture. – 2002. – Vol. 118. – P. 285–301.

77. Comninou M. The interface crack / M. Comninou // J. Appl. Mech. – 1977. № 44. – P. 631–636.

78. Comninou M. Partial closure of cracks at the interface between a layer and half–space / M. Comninou, J. Dundurs // Engen. Fracture Mech. – 1983. – 18. – P. 315–323.

79. Dundurs J. Some consequences of inequality conditions in contact and crack problems / J. Dundurs, M. Comninou // Journal of Elasticity. – 1979. – 9. – P. 71–82.

80. Dundurs J. An opportunistic analysis of the interface crack. / J. Dundurs, A. K. Gautesen // Int. J. Fracture. – 1988. – 36. – P. 151–159.

81. Eshelby J. D. Anisotropic elasticity with application to dislocation theory / J. D. Eshelby, W. T. Read, W. Shockley // Acta Metall. – 1953. – 1. – P. 251–259.

82. Feng W. J. An electrically impermeable and magnetically permeable interface crack with a contact zone in magnetoelectroelastic bimaterials under a thermal flux and magnetoelectromechanical loads / W. J. Feng, P. Ma, R. K. L. Su // Int. J. Solids Structures. – 2012. – Vol. 49. – P. 3472-3483.

83. Feng W. J. A magnetically impermeable and electrically permeable interface crack with a contact zone in a magnetoelectroelastic bimaterial under concentrated magnetoelectromechanical loads on the crack faces / W. J. Feng, P. Ma, E. Pan, J. X. Liu // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. – 2011. – 54. – P. 1666–1679.

84. Gao C.-F. Effects of magnetic fields on cracks in a soft ferromagnetic material / C.-F. Gao, Y.-W. Mai, B.-L. Wang // Engen. Fracture Mech. – 2008. – 75. – P. 4863–4875.

85. Gao C.-F. Fracture mechanics for a mode III crack in a magnetoelectroelastic solid / C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang // Int. J. Solids and Structures. – 2004. – 41. – P. 6613–6629.

86. Gao C.-F. Crack problems in magnetoelectroelastic solids. Part I: exact solution of a crack / C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 969–981.

87. Gao C.-F. Crack problems in magnetoelectroelastic solids. Part II: general solution of collinear cracks / C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 983–994.

88. Gao C.-F. Interfacial crack problems in magneto-electroelastic solids / C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 2105–2121.

89. Gautesen A. K. The interface crack in a tension field: an eigenvalue problem for the gap / A. K. Gautesen // Int. J. of Fracture. – 1992. – 55. – P. 261–271.

90. Gautesen A. K. The interface crack under combined loading / A. K. Gautesen // Int. J. of Fracture. – 1993. – 60. – P. 349–361.

91. Gautesen A. K. The interface crack in a tension field / A. K. Gautesen, J. Dundurs // J. Appl. Mech. – 1987. – 54. – P. 93–98.

92. Gautesen A. K. The interface crack under a combined loading / A. K. Gautesen, J. Dundurs // ASME J. of Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 580–586.

93. Govorukha V. Investigation of an interface crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial under limited permeable electric boundary conditions / V. Govorukha, M. Kamlah // Acta Mech. – 2005. – Vol. 178. – P. 85-99.

94. Govorukha V. On contact zone models for an electrically limited permeable interface crack in a piezoelectric bimaterial / V. Govorukha, M. Kamlah // Int. J. Fract. – 2010. – Vol. 164, 133–146.

95. Govorukha V. B. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound / V. B. Govorukha,

V. V. Loboda, M. Kamlah // Int. J. Solids and Structure. – 2006. – Vol. 43. – P. 1979–1990.

96. Grynevych A. A. An electroded electrically and magnetically charged interface crack in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial / A. A. Grynevych, V. V. Loboda // Acta Mech. – 2016. – Vol. 227, №10. – P. 2861–2879.

97. Herrmann K. P. An interface crack with contact zones in piezoelectric/ piezomagnetic bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, T. V. Khodanen // Arch. Appl. Mech. – 2010. – Vol. 80. – Issue 6. – P. 651–670.

98. Herrmann K. P. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1999. – № 69. – P. 317–335.

99. Herrmann K. P. On contact zone model for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial / K. P. Herrmann, V. B. Govorukha, V. V. Loboda, // Int. J. of Fracture. – 2001. – Vol. 111. – P. 203–227.

100. Herrmann K. P. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 2000.– 70. – P. 127–143.

101. Hu K. Constant moving crack in a magnetoelectroelastic material under anti-plane shear loading / K. Hu, G. Li // Int. J. Solids and Structures. – 2005. – 42. – P. 2823–2835.

102. Kharun I. V. A set of interface cracks with contact zones in combined tension-shear field / I. V. Kharun, V. V. Loboda // Acta Mechanica. – 2003. – Vol. 166. – P. 43–56.

103. Knish P. An electrically charged crack in a piezoelectric material under remote electromechanical loading / P. Knish, V. Loboda, F. Labesse-Jied, Y. Lapusta // Letters in Fracture and Micromechanics. – 2012. – 175. – No 1. –P. 87-94.

104. Kozinov S. Periodic set of limited electrically permeable interface cracks with contact zones / S. Kozinov, V. Loboda, Y. Lapusta // Mech. Res. Communic. – 2013. – 48. – P. 32-41.

105. Li Q. Solution for a semi-permeable interface crack in elastic dieletric/ piezoelectric bimaterials / Q. Li, Y. H. Chen // ASME J.Appl.Mech. – 2008. – 75. – 011010-1-13.

106. Liu J. X. A moving dislocation in a magneto–electro-elastic solid / J. X. Liu, A. K. Soh, D. N. Fang // Mechanics Research Communications. – 2005. – 32. – P. 504–513.

107. Loboda V. An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric bimaterial / V. Loboda, A. Sheveleva, Y. Lapusta // Int. J. Solids Struct. – 2014. – Vol. 51. – P. 63–73.

108. Loboda V. V. The quasi-invariant in the theory of interface cracks / V. V. Loboda // Eng. Fracture Mech. – 1993. – Vol. 44, № 4. –P. 573–580.

109. Loboda V. On investigation of an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial space under remote electromechanical loading / V. Loboda, R. Mahnken // Acta Mech. – 2011. – 221. – P. 327-339.

110. Ma P. An electrically impermeable and magnetically permeable interface crack with a contact zone in a magnetoelectroelastic bimaterial under uniform magnetoelectromechanical loads / P. Ma, W. J. Feng, R. K. L. Su // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – Vol. 32. – P. 41-51.

111. Ma P. Fracture analysis of an electrically conductive interface crack with a contact zone in a magnetoelectroelastic bimateria system / P. Ma, R. K. L. Su, W. J. Feng // Int. J. Solids Struct. – 2015. – Vol. 53. – P. 48-57.

112. McMeeking R. M. On mechanical stresses at cracks in dielectrics with application to dielectric breakdown / R. M. McMeeking // J. Appl. Phys. – 1987. – 62. – P. 3119–3122.

113. Men'shikov V. A. Interfacial Crack between Elastic Half-Spases under Harmonic Loading / V. A. Men'shikov, A. V. Men'shikov, I. A. Guz // Int. Appl. Mech. – 2003. – 43, N. 8. – P. 856–873.

114. Pasternak Ia. Stroh formalism based boundary integral equations for 2D magnetoelectroelasticity / Ia. Pasternak, H. Sulym // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2013. – 37, No. 1. – P. 167–175.

115. Podilchuk Yu. N. Stress intensity coefficients in the transversally-isotropic ferromagnetic with the elliptical crack under the uniform magnetic field / Yu. N. Podilchuk, I. Yu. Podilchuk // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2005. – 24. – P. 207–216.

116. Podil'chuk Yu. N. Stress state of a transversely isotropic ferromagnetic with an elliptic crack in a homogeneous magnetic field / Yu. N. Podilchuk, I. Yu. Podilchuk // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41 (1). – P. 32–41.

117. Podil'chuk Yu. N. Stress concentration in a soft ferromagnetic with an elliptic inclusion in a homogeneous magnetic field / Yu. N. Podilchuk, L. N. Tereshchenko // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40 (1). – P. 61–69.

118. Qin Q.-H. A closed crack model for interface cracks in thermopiezoelectric materials / Q.-H. Qin, Y.-W. Mai // Int. J. Solids and Structures. – 1999. – 36. – P. 2463–2479.

119. Rao B. N. Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded magnetoelectroelastic materials / B. N. Rao, M. Kuna // Int. J. Fract. – 2008. – 153. – P. 15–37.

120. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks / J. R. Rice // J. Appl. Mech. – 1988. – № 55. – P. 98–103.

121. Ru C. Q. Conducting cracks in a piezoelectric ceramic of limited electrical polarization / C. Q. Ru, X. Mao // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1999. – 47. – P. 2125–2146.

122. Sih G. C. Piezomagnetic and piezoelectric poling effects on mode I and II crack initiation behavior of magnetoelectroelastic materials / G. C. Sih, R. Jones, Z. F. Song // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – 40. – P. 161–186.

123. Sih G. C. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in $BaTiO_3$–$CoFe_2O_4$ composite / G. C. Sih, Z. F. Song // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – 39. – P. 209–227.

124. Simonov I. V. An interface crack in an inhomogeneous stress field / I. V. Simonov // Int. J. of Fracture. – 1990. – 46. – P. 223–235.

125. Stroh A. N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity / A. N. Stroh // Philosophical Magazine. – 1958. – Vol. 7. – P. 625–646.

126. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – 40. – P. 739–765.

127. Suo Z. Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics / Z. Suo // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1993. – 41. – P. 1155–1176.

128. Viun O. Electrically and magnetically induced Maxwell stresses in a magneto-electro-elastic medium with periodic limited permeable cracks / O. Viun, V. Loboda, Y. Lapusta // Arch Appl Mech. – 2016. – Vol. 86. – Issue 12. – P. 2009-2020.

129. Viun O. Pre-fracture zones modelling for a limited permeable crack in an interlayer between magneto-electro-elastic materials / O. Viun, Y. Lapusta, V. Loboda // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – 39. – P. 6669–6684.

130. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media / M. L. Williams // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1959. – № 49. – P. 199–204.

131. Zhang T. Y. Fracture behaviours of piezoelectric materials / T. Y. Zhang, C. F. Gao // Theor. And Appl. Fracture Mechanics. – 2004. – 41. – P. 339–379.

132. Zhou Z.-G. Two collinear interface cracks in magneto-electro-elastic composites / Z.-G. Zhou, B. Wang, Yu-G. Sun // Int. J. Engineering Science. – 2004. – 42. – P. 1155–1167.

133. Zhou Z.-G. The closed form solution of a Mode-I crack in the piezoelectric/ piezomagnetic materials / Z.-G. Zhou, P.-W. Zhang, L.-Z. Wu // Int. J. Solids and Structures. – 2007. – 44. – P. 419–435.

134. Zhu B. J. Hypersingular integral equation method for a three-dimensional crack in anisotropic electro-magneto-elastic bimaterials / B. J. Zhu, T. Y. Qin // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2007. – 47. – P. 219–232.