

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА**

**ДЬОМІЧЕВ Костянтин Едуардович**

УДК 539.3

**МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З  
ФУНКЦІОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ВЕЛИКИХ  
ДЕФОРМАЦІЯХ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Дніпро – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі комп'ютерних наук Київського міжнародного університету Міністерства освіти і науки України.

**Науковий консультант:** доктор фізико-математичних наук, професор **Стеблянко Павло Олексійович**,  
Університет митної справи та фінансів,  
професор кафедри кібербезпеки та інформаційних технологій.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук, професор **Безверхий Олександр Ігорович**,  
Національний транспортний університет  
професор кафедри інформаційних систем і технологій

доктор фізико-математичних наук, професор **Гук Наталія Анатоліївна**,  
Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара  
завідувач кафедри комп'ютерних технологій

доктор фізико-математичних наук, професор **Кагадій Тетяна Станіславівна**,  
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»  
професор кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «22» вересня 2021 року о 14 годині 30 хвилин на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10 у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за адресою: 49044, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 35, корпус 3, ауд. 27.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці імені Олеся Гончара Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара за адресою: 49010, м. Дніпро, вул. Казакова, 8.

Автореферат розісланий « 13 » серпня 2021 року.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради,  
д.т.н., проф.



А.Ю. Дреус

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Сучасні деталі, пристрої та елементи конструкцій, які виготовляються з функціонально-неоднорідних матеріалів та мають властивість пам'яті форми і ведуть себе псевдо-пружно-пластично, в процесі виготовлення та експлуатації можуть перебувати під впливом складного нестационарного силового й температурного навантаження.

Нерівномірний нагрів тіл у поєднанні з силовими чинниками може призводити до великих деформацій матеріалу та до складних процесів деформування.

Для моделювання поведінки таких елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів потрібно визначати нестационарний термомеханічний стан тіла не лише на пружній стадії деформування, а й за межею пружності.

Існуючі моделі таких елементів не враховують нелінійні геометричні співвідношення та не придатні для ефективного використання при великих деформаціях.

Сучасні чисельні методи розв'язання таких нестационарних задач термомеханіки призводять, як правило, до значних обчислювальних труднощів, пов'язаних із розв'язанням великих систем алгебраїчних рівнянь, і не завжди бувають ефективні. Ці обставини суттєво ускладнюють моделювання термочутливих конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів під дією нестационарного складного навантаження.

Важливий внесок у розробку сучасних уявлень про закономірності взаємовпливу нестационарних процесів різної фізичної природи внесли Я.Й. Бурак, Р.М. Кушнір, В.Г. Карнаухов, В.В. Лобода та ін. Розробці конкретних моделей визначення, дослідження та оптимізації механічної поведінки тіл при комплексних зовнішніх навантаженнях присвячені роботи В.Г. Баженова, А.Р. Гачкевича, Д.В. Гріліцького, Я.О. Жука, В.С. Поповича, Р.С. Мусія І.К. Сенченкова та ін. Ефективні числові та числово-аналітичні методи вирішення нестационарних задач механіки запропоновані в роботах О.І. Безверхого, Н.А. Гук, Я.М. Григоренка, Т.С. Кагадій, В.І. Кузьменка, В.Ф. Мейша, О.О. Стрельнікової, П.О. Стеблянка та ін.

Дослідження останніх років свідчать про те, що перспективними методами для моделювання під дією нестационарного складного навантаження є методи розщеплення і сплайн-колокації, які дозволяють будувати точніші розв'язки як за часом, так і по координатах.

Таким чином, актуальною є наукова проблема створення математичних моделей, розробка та застосування методів і засобів комп'ютерного моделювання термочутливих конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Обраний підхід до вирішення цієї проблеми ґрунтується на розширенні класу математичних моделей, врахуванню особливостей процесів, що протікають при великих деформаціях, та розробці ефективного методу числового моделювання нестационарних термомеханічних процесів у функціонально-неоднорідних матеріалів.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконана відповідно до постанови Президії НАНУ від 20.12.13 №179 «Основні наукові напрями та найважливіші проблеми фундаментальних досліджень у галузі природничих, технічних і гуманітарних наук Національної академії наук України на 2019–2023 рр.», а саме – пп. 1.3.1.1. «Методи розрахунку та дослідження напружено-деформованого стану, у тому числі при наявності дефектів різного походження» та пп. 1.3.1.5. «Механіка взаємодії полів різного походження в матеріалах і елементах конструкцій», а також Постанови КМУ від 07 вересня 2011 року № 942 «Про затвердження переліку пріоритетних тематичних напрямів наукових досліджень і науково-технічних розробок на період до 2020 року», а саме – «Найважливіші фундаментальні проблеми фізико-математичних і технічних наук».

Дисертаційне дослідження також виконувалося в рамках досліджень, які виконувались у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за темами держбюджетних робіт № 1-301-15 «Розробка методик розв'язку фундаментальних задач міцності та руйнування кусково-однорідних тіл, скомпонованих з інтелектуальних матеріалів» (№ ДР 015U002393), Дніпровському державному технічному університеті «Створення чисельного методу дослідження міцності елементів конструкцій на основі урахування теплових та мікромеханічних ефектів» (номер державної реєстрації № 0110U002305) та «Методи дослідження міцності елементів конструкцій із функціонально-неоднорідних матеріалів, чутливих до виду термонапруженого стану» (номер державної реєстрації № 0113U000379).

**Мета і задачі дослідження.** Мета дисертаційної роботи полягає у створенні методу та подальшому розвитку моделей і засобів комп'ютерного моделювання поведінки термочутливих елементів конструкцій з функціонально неоднорідних матеріалів при великих деформаціях з урахуванням нелінійних геометричних співвідношень на основі використання апарату сплайн-функцій, який забезпечує істотно більшу точність обчислень без ускладнення процедури чисельної реалізації.

*Досягнення мети передбачає:*

– проведення аналізу і класифікацію наявних підходів до моделювання поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях та матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю;

– розробку й експериментальне обґрунтування нової нелінійної феноменологічної моделі поведінки термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів і матеріалів з пам'яттю форми;

– побудову фізичних співвідношень, які дозволяють адекватно описати поведінку термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів на основі теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням;

– розробку ефективного методу розв'язання нестационарних тривимірних задач теорії пластичності у випадку деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу при великих деформаціях;

– проведення дослідження точності та збіжності розробленого числового методу шляхом порівняння результатів розв'язання модельних задач з відомими аналітичними і числовими рішеннями, а також на основі обчислювальних експериментів;

– реалізацію за допомогою інструментальних засобів комп'ютерного моделювання запропонованого числового методу раціонального за критеріями точності та тривалості обчислень алгоритму з ефективним поєднанням числових схем визначення термомеханічних полів у просторових тілах під дією температурного та силового навантажень;

– розв'язання нового класу відповідних нестационарних задач.

**Об'єктом дослідження** є процеси деформування термочутливих елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях, які мають властивість термо-псевдо-пружно-пластичності.

**Предметом дослідження** є моделі, методи і задачі деформування функціонально-неоднорідних матеріалів з властивостями термо-псевдо-пружно-пластичності при значних пластичних деформаціях.

**Методи дослідження.** Числове розв'язання нестационарних задач теорії термо-псевдо-пружно-пластичності для просторових тіл з урахуванням нелінійних законів деформації та геометрично нелінійних співвідношень (в рівняннях руху та співвідношеннях між деформаціями та переміщеннями) за складного нестационарного навантаження.

**Наукова новизна.** Наукова новизна роботи полягає в наступному:

– розроблено *новий* ефективний метод розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного матеріалу при великих деформаціях;

– *вперше* запропоновано й експериментально обґрунтовано *нову* нелінійну феноменологічну модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів з пам'яттю форми, в якій враховується тепло, що виділяється в процесі фазових переходів у матеріальних точках тіла;

– *вперше* запропоновано на ділянці діаграми матеріалу близької до ідеальної пластичності застосовувати феноменологічну теорію пластичної течії для матеріалів з майданчиком плинності;

– *узагальнено* співвідношення теорії пластичності та теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням на випадок деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу;

– запропоновано (на основі теорії напружених сплайн-функцій) *нові* експериментально підтверджені інтерполяційні формули для описання ділянок діаграми матеріалу при розвантаженні з довільної точки;

– поставлено і розв'язано *новий* клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, термо-псевдо-пружно-пластичності при значних деформаціях;

– виявлено *нові* механічні ефекти, пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень у тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів;

– *доведено* збіжність уточненої ітераційної процедури розв'язання

нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного пластичного матеріалу при великих деформаціях;

– *вперше* в рамках запропонованого методу врахована можливість зміни форми й розмірів тіла при великих деформаціях.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає в розробці методу числового моделювання процесів деформування в нелінійних просторових тілах з функціонально-неоднорідних матеріалів (зокрема, матеріалів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю) при великих деформаціях. Використаний при цьому апроксимаційний апарат двовимірних сплайн-функцій дозволяє з більшою точністю враховувати складні залежності властивостей матеріалів від термо-механічних процесів, які в них відбуваються, а також створювати нові різницеві схеми підвищеної точності.

Результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі Дніпровського державного технічного університету при викладанні навчальної дисципліни «Математичне моделювання технологічних процесів», Національного авіаційного університету при викладанні дисциплін «Сучасні комп'ютерні технології в фізиці» та «Методи математичної фізики».

**Особистий внесок здобувача.** Дисертація є самостійною науковою роботою, у якій висвітлені власні ідеї та розробки автора, що дозволили вирішити поставлені задачі. Усі основні наукові результати, викладені в дисертаційній роботі, отримані здобувачем особисто. Визначення загального плану досліджень належить науковому консультанту Павлу Олексійовичу Стеблянку. У працях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в наступному: [1],[16],[22],[32] – метод покомпонентного розщеплення підвищеної точності із застосуванням двовимірних сплайнів; [2],[15],[28] – постановка задачі та метод дослідження поведінки матеріалів при великих (кінцевих) деформаціях; [3],[17], [34]–[36] – розробка та експериментальне обґрунтування нелінійної феноменологічної моделі поведінки псевдо-пружно-пластичного матеріалу; [4],[6],[7],[18] – моделювання поведінки елементів конструкцій за допомогою розробленого методу при значних деформаціях; [5],[9],[10],[14],[43],[44] – удосконалена феноменологічна модель поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів; [8] – ітераційний метод підвищеної точності за часом; [19],[20],[24]–[26],[37]–[41] – розв'язання нового класу задач та аналіз результатів; [21],[31] – формулювання алгоритмів для програмної реалізації методів, впровадження отриманих результатів. Із представлених публікацій 3 є одноосібними науковими працями дисертанта [11–13].

**Апробація результатів дисертації.** Основні концепції, ідеї, положення та результати досліджень доповідались і обговорювались на наукових семінарах і конференціях:

«Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016); «Інформаційна безпека та комп'ютерні технології» (Кіровоград, 2016); «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (Дніпропетровськ, 2016); «Inżynieria i technologia. Współczesne problemy i perspektywę rozwoju» (Варшава, 2017); «Україна між

Заходом і Сходом: реалії та перспективи» (Київ, 2017); «Математичні проблеми технічної механіки» (Кам'янське, 2017, 2018, 2019, 2020); «Соціально-економічний розвиток в умовах глобалізації» (Чернівці, 2017); «Nowy sposób rozwoju inżynieria i technologia» (Познань, 2017); «Наукова думка інформаційного століття» (Дніпро, 2017); «Формування європейських стандартів, цінностей та безпекового простору – стратегічний напрям української держави» (Київ, 2018); «Актуальні питання сьогодення» (Віниця, 2018); «Наука та освіта: ключові питання сучасності» (Чернівці, 2018); «Новини науки: дослідження, наукові відкриття, високі технології» (Харків, 2019); «Науково-технічна конференція молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України» (Київ, 2020); «Пріоритетні шляхи розвитку науки та освіти» (Львів, 2020); «Science, research, development, technics and technology» (Краків, 2020); «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020» (Дніпро, 2020); «Функціональні матеріали для інноваційної енергетики» (Київ, 2020); «Новітні технології в освіті, науці та виробництві» (Покровськ, 2020); «Наукові підсумки 2020 року» (Харків, 2020).

У повному обсязі робота доповідалась і обговорювалась на кафедрі комп'ютерних наук Київського міжнародного університету (Київ, 2020), на розширеному засіданні наукового семінару відділу теорії фізико-механічних полів ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України (Львів, 2021) та на розширеному науковому семінарі кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (Дніпро, 2021).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано у 44 працях [1–44], серед яких 2 монографії, 2 статті у періодичних виданнях, що включені до наукометричної бази Scopus, 18 статей у наукових фахових виданнях України та зарубіжних наукових періодичних виданнях, що віднесені до інших (відмінних від Web of Science) міжнародних наукометричних баз даних (з яких 3 – одноосібних), 24 наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дослідження на наукових конференціях, симпозіумах, конгресах.

Серед них стаття у науковому журналі «Східно-Європейський журнал передових технологій», індексована у світових наукометричних базах даних і системах, зокрема, у міжнародній наукометричній базі Scopus, Q2 квартал [1]; стаття у науковому журналі «Металофізика та новітні технології» Інституту металофізики ім. Г.В. Курдюмова НАН України, який індексується у міжнародній науко-метричній базі Scopus, Q3 квартал [2], дві монографії [3, 4], одинадцять статей у закордонних англійськомовних фахових виданнях [10–20], п'ять статей у наукових фахових виданнях України [5–9] та 24 тези доповідей у матеріалах міжнародних конференцій [21–44]. Із представлених публікацій 3 є одноосібними науковими працями дисертанта [11–13].

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатків. Вона містить 346 сторінок машинописного тексту, з них 268 сторінок основного

тексту, 26 рисунків, список використаних джерел з 262 найменувань та додатки.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** представлена загальна характеристика роботи і проведено аналіз досліджень наукової проблеми; обґрунтована актуальність дисертаційної роботи та її зв'язок із науковими програмами; сформульована мета й завдання дослідження; окреслено новизну отриманих результатів та їх практичне значення; наведено дані про апробацію результатів роботи та публікації її основного змісту, а також особистий внесок здобувача в публікаціях у співавторстві; зроблено короткий опис структури дисертації.

У **першому розділі** проведено аналіз сучасного стану проблеми математичного моделювання поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів. Зроблено огляд літературних джерел за темою дисертаційного дослідження. Проведено аналіз існуючих моделей фазових перетворень, які можуть мати місце у функціонально-неоднорідних матеріалах. Проаналізовано критерії, за якими можна класифікувати фазові перетворення в матеріалах.

Розглянуто методи числового розв'язання задач для тіл з псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Сформульовано задачі дисертаційного дослідження.

Дослідження поведінки нових матеріалів завжди було однією з важливих наукових і прикладних задач як фізичного матеріалознавства, так і механіки деформівного твердого тіла при визначенні їх термомеханічної поведінки. Переважна більшість матеріалів, призначених для різних сфер діяльності людини, використовується в якості конструкційних для виготовлення різних деталей та устаткування загального і спеціального призначення. Іншою групою матеріалів, призначення і застосування яких в основному визначається їх особливими і часом унікальними фізико-технічними характеристиками, є так звані функціональні матеріали. До них відносяться різні матеріали зі спеціальними властивостями: електричними, магнітними, температурно-залежними, хімічними та ін.

Конструкції, які складаються з термочутливих елементів функціонально-неоднорідних матеріалів, з властивостями псевдо-пружно-пластичності широко застосовуються в авіаційній, радіотехнічній, медичній та інших галузях. Вплив різних чинників на такі матеріали, зокрема температури та силового навантаження, призводить до складних процесів деформації. При моделюванні поведінки таких елементів конструкцій потрібно визначати нестационарний термомеханічний стан не лише на пружній стадії деформації, але й за межею пружності, враховуючи великі деформації матеріалів.

Існуючі математичні моделі та методи дослідження нестационарних задач термомеханіки не завжди враховують геометричну нелінійність фізичних співвідношень та не є придатними для моделювання поведінки таких матеріалів при великих деформаціях. Тому математичне моделювання поведінки **функціонально-неоднорідних матеріалів** на даний час є **актуальною проблемою**.



Приклади моделювання поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів, які враховують фазові перетворення, можна знайти в роботах: К. Ооцука, К. Симидзу, Ю. Судзуки, Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко, И.К. Сенченкова, R. Abeyaratne, J.K. Knowles, K. Tsuchiya, R. Ahluwalia, T. Lookman, A. Saxena, R.C. Albers, R.J. Asaro, V.A. Lubard, Z. Bo, D.C. Lagoudas, C. Bouvet, S. Calloh, C. Lexcellent, J.G. Boyd, D.S. Lagoudas, J.G. Boyd, D.S. Lagoudas, L.C. Brinson, I. Schmidt, R. Lammering, M. Brocca, Yu.A. Chernyakov, A.S. Polishchuk, P.V. Entchev, D.C. Lagoudas, D. Grandi, M. Maraldi, L. Molari [67], W.S.Ko, S.B. Maisel, B. Grabowski, J.B. Jeon, J. Neugebauer, D.S. Lagoudas, P.B. Entchev, D.S. Lagoudas, P.B. Entchev, P. Popov, E. Patoor, L.C. Brinson, X. Gao, V.I. Levitas, E. Stein, C. Lexcellent, G. Bourbon, Z.K. Lu, G.J. Weng, K. Otsuka, E. Pator, A. Eberhard, M. Berveiller, H. Petryk, S. Stupkiewicz, G. Maciejewski, L. Qiao, J.J. Rimoli, Y. Chen, C.A. Schuh, R. Radovitzky, L. Qiao, R. Radovitzky, Q.P. Sun, K.C. Hwang, Q.P. Sun, A. Ahadi, M.P. Li, M.X. Chen, X.M. Wang, B.X. Xu, Z.F. Yue.

Існує велика кількість функціонально-неоднорідних матеріалів, типу сплавів з пам'яттю форми (далі – СПФ), п'єзоелектричних матеріалів, магніострикційні металів і т.д., які демонструють тісний зв'язок механічної поведінки з іншими полями, зокрема: тепловими, електричними або магнітними. Ці матеріали часто називають «інтерактивними» або «інтелектуальними» матеріалами, оскільки вони реагують механічним чином на зміну в навколишньому середовищі. Унікальні властивості цих матеріалів не нові, але їх дослідження при використанні в реальних конструкціях під дією нестационарних навантажень потребують нових підходів. Властивості цих матеріалів пов'язанні зі зворотнім мартенситним перетворенням між фазами твердого тіла, яке часто зустрічається при температурі, близькій до кімнатної. Мартенситне перетворення може бути викликане змінами температури або змінами напруги, що призводять до збільшення термомеханічного опору в поведінці матеріалу. Деякі матеріали також характеризуються істотно нелінійною механічною поведінкою, високим внутрішнім демпфуванням і високою напругою плинності.

Різноманітність фазових перетворень, які можуть бути віднесені до мартенситних, робить необхідним проведення їх класифікації. Така класифікація проводиться за різними критеріями. Наприклад, за її основу можуть бути взяті:

- термопружній і нетермопружній характер перетворення;
- кінетичні ознаки: швидкість перетворення (атермічне й ізотермічні мартенситні перетворення), вибуховий і плавний характер; оберненість (обернені й необернені мартенситні перетворення), величина гістерезису між прямим і зворотним перетвореннями;
- хімічний склад матеріалу (перетворення в чистих елементах, перетворення в сплавах на основі заліза, на основі міді та кольорових металів, на основі титану, перетворення в з'єднаннях різного типу – іонних солях, ковалентних з'єднаннях);

- термодинамічні умови розвитку перетворення – перетворення при зміні температури, тиску, магнітного або електричного поля;
- перетворення в статичних і динамічних зовнішніх полях;
- кристалографічні характеристики перетворення;
- розмірні характеристики об'єктів (перетворення в монокристалах, полікристалах, у плівках, у мікро- і нанокристалічних матеріалах).

Взагалі ж фазові мартенситні перетворення можна розділити на дві групи – термопружні та нетермопружні.

Нетермопружні перетворення відбуваються головним чином у сплавах заліза і пов'язані з немобільними границями вихідної фази мартенситу, скріпленими постійними дефектами, і переходять послідовним утворенням ядра і його зростанням. Через перетворення ядра аустеніту в процесі перетворення (мартенсит в аустеніт) ці перетворення кристалографічно незворотні в тому сенсі, що мартенсит не може повернутися до вихідної фази первісної орієнтації.

Термопружні мартенситні перетворення, з іншого боку, пов'язані з мобільними межами між вихідними і мартенситними фазами. Ці межі здатні до зворотнього перетворення за рахунок усадочної деформації пластин мартенситу.

Існує велика кількість особливих матеріалів, типу сплавів з пам'яттю форми, п'єзоелектричних матеріалів, магнітострикційні металів і т.д., які демонструють тісний зв'язок їх механічної поведінки з іншими полями, типу теплових, електричних або магнітних. Вони реагують механічним чином на зміну в навколишньому середовищі.

Псевдо-пружність відноситься до здатності матеріалу при певному температурному режимі накопичувати деформації при навантаженні та потім повертатися у вихідне положення після розвантаження (через петлю гістерезису). Основним механізмом є оборотне мартенситне перетворення між фазами твердого тіла, яке може виникати при температурі, близькій до кімнатної. Перетворення може бути викликане змінами температури або змінами напруження, що призводять до збільшення термомеханічного опору в поведінці матеріалу. Матеріал також характеризується істотно нелінійною механічною поведінкою та високою напругою текучості. Усі ці властивості дають можливість застосовувати СПФ (NiTi та інші) в нових конструкціях. Специфічна поведінка сплаву NiTi є результатом взаємодії високотемпературної фази (аустеніт), що має кубічну структуру решітки, і низькотемпературну фазу (мартенсит), що має моноклінну структуру.

Була додатково врахована температурна взаємодія між механічно навантаженим зразком і навколишнім середовищем для опису неізотермічної поведінки при більш високих швидкостях навантаження і в менш конвективному середовищі, типу повітря.

Більшість визначальних моделей можна класифікувати як ті, що належать до однієї з двох груп: мікромеханічні й феноменологічні моделі.

Мікромеханічні моделі будуються для опису поведінки СПФ з урахуванням зернистої мікроструктури полікристала СПФ. Теоретично, якщо мікроструктура відома, то можна, використовуючи добре вивчену поведінку

монокристала СПФ, безпосередньо розв'язувати граничні задачі для полікристалічного матеріалу. На практиці точне уявлення про мікроструктуру досить складне. До того ж досить складно вирішити прикладну числову задачу з достатньою кількістю зерен, що має місце в реальних, тривимірних граничних задачах. Тому для відображення термомеханічних властивостей полікристалічного матеріалу використовують методи осереднення. Такі задачі спочатку виникли у зв'язку з проблемою визначення макроскопічних властивостей гетерогенних композиційних матеріалів. У зв'язку з цим було розвинено багато методів осереднення для пружних і пружнопластичних матеріалів, серед них й асимптотичні. Значна кількість мікромеханічних моделей для полікристалів з пам'яттю форми базується на методі осереднення.

Інший клас моделей для полікристалічних сплавів з пам'яттю форми – це феноменологічні моделі, які для опису змін мікроструктури через фазове перетворення виходять з термомеханіки континууму з внутрішніми змінними. У подібних моделях зазвичай задають функцію макроскопічної енергії, яка залежить від змінних стану і внутрішніх змінних, що описують ступінь фазового перетворення. Для внутрішніх змінних записуються рівняння еволюції. Макроскопічна енергія і рівняння еволюції приймаються в деякій функціональній формі, яка повинна бути сумісна з термодинамікою. Фундаментальна структура всіх цих моделей подібна і може класифікуватися як визначальні моделі з внутрішніми змінними стану.

Феноменологічні співвідношення безпосередньо не залежать від параметрів матеріалу на мікрорівні, а залежать від набору параметрів на макрорівні, які визначаються з експериментальних спостережень. Такі моделі можуть бути простими, наприклад, моделювання одновісьової псевдопружної реакції матеріалів з пам'яттю форми кусковолінійною функцією, або можуть бути складними, як у тривимірних моделях, що використовують багато параметрів, які повинні бути визначені з великої кількості експериментів.

Феноменологічні моделі легко адаптуються до числових методів розв'язання граничних задач на макроскопічному рівні. У більшості визначальних моделей приймається термодинамічна структура та вибирається мартенситна частка обсягу, як внутрішня змінна стану, для врахування впливу мікроструктури в середньому. Їх головною відмінністю є функція зміцнення, обрана для моделювання зв'язку деформація – напруження при навантаженні, що викликає мартенситне фазове перетворення. Узагальнена структура для цих визначальних моделей була представлена в роботі. Пропонувались різні функції перетворення для опису асиметричної поведінки сплавів з пам'яттю форми, яку вони проявляють при розтягуванні та стискуванні. При цьому частку обсягу мартенситу і деформацію перетворення використовували в якості окремих внутрішніх змінних. Передбачалось, що частина мартенситу не відновлюється після кожного циклу, що призводить до помітної невідновлювальної деформації, яка накопичується з числом циклів. Моделі, згадані вище, не залежать від швидкості деформування. Вони враховують залежність поведінки деформація-напруження тільки від траєкторії навантаження. Зазначимо, що

складна поведінка матеріалів з пам'яттю форми вимагає розвитку спеціфічних алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану тіла.

Загальні відомості про експериментальні дослідження поведінки конструкційних матеріалів докладно викладено в роботах Ю.М. Шевченко.

Інформацію про експерименти, які проводилися з матеріалами при наявності фазових переходів, можна знайти в роботах R. Abeyaratne, C. Chu, R.D. James, B. Budiansky, L. Truskinovsky, Y.J. He, Q.P. Sun, Y.H. Kim, G.B. Cho, S.G. Hur, S.S. Jeong, T.H. Nam, S. Kyriakides, J.E. Miller, C. Lexcellent, S. Leclercq, B. Gabry, G. Bourbon, C. Lexcellent, A. Vivet, C. Bouvet, S. Calloch, P. Blanc, C. Lexcellent, A. Schlomerkemper, K. Otsuka, C. Wayman, K. Nakai, K. Otsuka, H. Sakamoto, K. Shimizu, J.A. Shaw, S. Kyriakides, M. Tokuda, M. Yea, M. Takakura, P. Sittner, X.M. Wang, Y.F. Wang, Z.Z. Lu, C.H. Deng, Z.F. Yue.

Під час фазових переходів в псевдо-пружних матеріалах відбуваються нестабільні процеси. Експериментальні дослідження явищ виникнення і кінетика розповсюдження фронтів фазових перетворень, а також пов'язана з ними теплова чутливість, детально обговорюються в роботах Shaw і Kyriakides. Характерною рисою діаграми такого матеріалу в точці є зуб плинності при переході від чисто пружної ділянки (фаза аустеніт) до горизонтальної ділянки з наступною зміною фази (фаза мартенсит). Площа під кожним піком певним чином відображає теплоту трансформації матеріалу. Звернуть на себе увагу піки, які необхідно подолати на початку напружених плато під час навантаження.

Екзотермічний перехід від аустенітної фази до мартенситної під час навантаження має тенденцію викликати самонагрівання, а це підвищує основне напруження перетворення матеріалу. Звертається увага на те, що природа навколишнього середовища (газ, рідина) відіграє істотну роль. Відзначається, що плато напруження (нестабільна поведінка матеріалу) спостерігається під час трансформації. Оскільки такі переходи в сплавах можуть відбуватися механічно нестабільно, трансформація може відбуватися локалізованим способом, тобто через зародження та подальше поширення чітких фазових фронтів по довжині одноосно навантаженого зразка.

У багатьох публікаціях відзначалося, що такі фазові перетворення є екзотермічними. У результаті, навіть при відносно повільній швидкості подовження (деформування, навантаження), зразок відчуває саморозігрів в околиці фронту перетворення, що постійно зміщується. Зазначимо, що на напруження, необхідне для перетворення матеріалу, істотно впливає температура. Таким чином, локальне збільшення температури призводить до збільшення напруження перетворення. Саме ця обставина є головною у феноменологічній моделі, яка запропонована в дисертації.

Дані про особливості пластичного деформування термо-пластичних термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів наведено в роботах Б. Боли, Дж. Уейнера, Д.Д. Івлева, Г.І. Биковцева, А.А. Ільюшина, Ю.І. Кадашевича, В.В. Новожилова, Ю.А. Чернякова, А.І. Лур'є, Ю.Н. Шевченка, Р.Г. Терехова, М.Е. Бабешка, S. Bodner, Y. Partom, J.L. Chaboche, A.S. Polishchuk, V.P. Shneider, Yu.I. Kadashevich, S. Leclercq, C. Lexcellent, Z.K. Lu, G.J. Weng.

Одним із аспектів загальної проблеми розв'язання нестационарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напруженням і деформацією. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформації. У загальному випадку значення деформації є функцією процесу зміни напруження й температури, яка визначається характеристиками всього попереднього процесу зміни фізичних чинників, а не тільки їх поточними значеннями.

При побудові фізичних співвідношень передбачалося, що деформація в точці представляється у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, пластичній деформації та деформації, викликаній температурними змінами. Після розв'язання задачі, по геометрії траєкторії деформації та її абсолютних значеннях, можна судити про достовірність використаних визначальних співвідношень.

**Фізична постановка задачі дослідження ставиться так.** Основним завданням нестационарної теорії термопружно-пластичності є визначення переміщень (швидкостей переміщень) і компонент тензорів напруги та деформації, що виникають в просторовому тілі в процесі його навантаження, коли деякі елементи тіла працюють за межею пружності матеріалу. Процес навантаження будемо розглядати таким, що змінюється в часі. Усе це може викликати рух окремих частин тіла.

Нехай спочатку ізотропне та однорідне тіло, обмежене заданою поверхнею, у початковий момент часу знаходиться в природному ненапруженому стані. Потім тіло піддається навантаженню зовнішніми силами і нагріванню. Це можуть бути об'ємні сили, що впливають на кожен елемент тіла, і поверхневі сили, що діють на частині поверхні тіла. На іншій частині поверхні тіла, яка може бути певним чином закріплена, задаються швидкості переміщень. Конфігурація тіла задається рівнянням поверхні, яка обмежує його. Механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування по прямолінійних траєкторіях і траєкторія малої кривизни задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягування зразків.

Виходячи з перерахованих даних, необхідно визначити температурне поле, складові вектора швидкості переміщень, компоненти тензора напружень і компоненти тензора деформацій. Для цього необхідно скористатися рівняннями руху, геометричними, фізичними рівняннями та рівнянням теплопровідності.

Повна система рівнянь в загальному випадку має вигляд:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_1} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_2} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_3} + \vec{B}, \quad (1)$$

де  $\vec{W}$  – вектор, компонентами якого будуть швидкості переміщень  $v_i$ , складові тензорів напружень і деформацій  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Зазначимо, що переміщення  $u_i$  визначаються шляхом безпосереднього інтегрування відповідних швидкостей переміщень. При розв'язанні задач в геометрично нелінійній

постановці переміщення  $u_i$  відомим образом входять до складу елементів матриць  $A_1, A_2, A_3$  та компонент вектора  $\vec{B}$ .

Нестационарне тривимірне рівняння теплопровідності, що використовується при розв'язанні пов'язаних задач механіки деформованого твердого тіла, має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial \alpha_3} \right) \right] + W_*, \quad (2)$$

де

$$W_* = \left[ S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{S_{ij} \dot{S}_{ij}}{2G} + \frac{\sigma_{ij}}{3} (\dot{\epsilon}_{ij} - 3\alpha \dot{T}) - \frac{\sigma_{ii} \dot{\sigma}_{ii}}{9K} \right] / \lambda, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \epsilon.$$

Тут  $H_1, H_2, H_3$  – коефіцієнти Ляме,  $a$  – коефіцієнт температуропровідності,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона. Точкою зверху позначені швидкості (похідні за часом).

Системи (1), (2) розв'язуються за певних початкових і граничних умов.

Інформацію про методи числового розв'язання задач термомеханіки наведено в роботах І.Н. Бронштейна, К.А. Семендяєва, С.К. Годунова, В.С. Рябенського, К.Де Бора, Ю.С. Зав'ялова, Б.І. Квасова, В.Л. Мирошниченка, В.І. Кузьменка, В.Н. Кукуджанова, М.М. Яненка, Г.І. Марчука, И.А. Рябцева, І.К. Сенченкова, Е.В. Турика, П.О. Стеблянка, Ю.А. Чернякова, Т. Belytschko, W.K. Liu, V. Morgan, L.L. Schunsker, A.A. Schweikeret, Yu. Shevchenko.

Задачі термомеханіки розглядалися у працях Я.М. Григоренка, А.Т. Василенка, Н.Д. Панкратової, В.Н. Кукуджанова, В.И. Кондаурова, В.А. Лихачева, В.Г. Малініна, А.А. Самарського, Ю.А. Чернякова, П.А. Стеблянка, J.T. Lim, D.L. McDowell, M.A. Meyers, A. Mishra, D.J. Benson, K. Otsuka, C. Wayman, K. Nakai, H. Sakamoto, K. Shimizu, T. Waitz, V. Kazykhanov, H.P. Karnthaler, T. Waitz, T. Antretter, F.D. Fischer, N.K. Simha, H.P. Karnthaler, M.L. Xia, Q.P. Sun, J. Ye., R.K. Mishra, A.R. Pelton, A.M. Minor, H. Yin, Y.J. He, Z. Moumni.

У роботах цих авторів застосовані різноманітні методи числового розв'язання: варіаційні методи, метод кінцевих елементів, різницеві методи. Використовуються й інші підходи, засновані на модифікації вказаних вище методів та їх комбінованому використанні.

Звертають на себе увагу різницеві методи, засновані на ідеї розщеплення по геометричних властивостях, які дозволяють отримувати економічні різницеві схеми. Тут ідея розщеплення багатовимірної задачі на одномірні використовувалася спільно з розбиттям досліджуваного тіла на кінцеві елементи.

У цьому розділі надано основні відомості про найбільш відомі методи числового розв'язання нестационарних задач термомеханіки суцільного середовища. Це, зокрема, метод характеристик, метод Лакса-Вендроффа, методи, засновані на ідеї розщеплення по геометричних властивостях.

Одним із найефективніших прийомів при чисельному розв'язанні багатовимірних нестационарних задач теорії термо-пружно-пластичності є підхід, заснований на використанні для визначення невідомих величин, методу дробних кроків або методу покомпонентного розщеплення (М.М. Яненко, Г.І. Марчука) у поєднанні з представленням шуканих величин у вигляді сплайн-функцій (Ю.С. Зав'ялов, Б.І. Квасов, В.Л. Мирошніченко). Перевага цього підходу обумовлена тим, що він не складніший в реалізації, ніж кінцево-різницевий метод. При цьому рішення знаходиться у вигляді сплайн-функцій в усій області визначення, тоді як різницеве рішення – лише у вузлах просторової сітки. Такий підхід дозволяє підвищити порядок апроксимації, а це дає можливість обирати більшу за розмірами сітку по координатах у порівнянні з кінцево-різницевим методом при умові досягнення однакової точності обчислень (П.О.Стеблянко).

На даний час з означеними вище методами існують сучасні комп'ютерні системи аналізу й методи розв'язання задач термо-пружно-пластичності. Існують різноманітні системи інженерного аналізу й методи розв'язання задач термо-пружно-пластичності. При цьому застосовуються системи автоматичного проектування та автоматичного інженерного аналізу. САЕ-системи інженерного аналізу (ABAQUS, ANSYS, COSMOS, NASTRAN та інші) дозволяють виконувати моделювання систем різної фізичної природи, досліджувати реакцію цих систем на зовнішні впливи у вигляді напружень, температур, швидкостей переміщень, електромагнітних полів.

Одним із таких комплексів є програма ANSYS, що використовує метод кінцевих елементів. Саме ANSYS у даний час використовується для розв'язання задач моделювання пружно-пластичних тіл під дією різних типів навантаження.

Інший програмний комплекс ABAQUS призначений для моделювання та розв'язання лінійних і нелінійних задач методами кінцево-елементного аналізу. За допомогою комплексу ABAQUS можна вести розрахунок міцності елементів конструкцій, моделювати їх пластичне деформування та ін. При цьому один розрахунок може включати різні типи аналізів: - статичний аналіз напружень та переміщень; - в'язкопружні та в'язкопластичні відгуки; - динамічний аналіз напружень і переміщень; - нестационарний або усталений аналіз теплопередач та ін. Можливі комбіновані задачі: - тепло – механіка; - тепло – електрика та ін.

З наведеного аналізу моделей та методів розв'язання задач для тіл з псевдо-пружно-пластичних матеріалів випливає, що при їх числовому дослідженні найбільш ефективним є використання методу покомпонентного розщеплення, побудованого з використанням ітераційної процедури. Проте при цьому треба враховувати можливість виникнення в процесі навантаження тіла значних пластичних деформацій.

В дисертаційній роботі розроблено й апробовано власні програмні продукти. Їх можливості порівнювались з відомими програмними комплексами ABAQUS і ANSYS. Також деякі результати використовувалися в якості початкових умов при розв'язання нестационарних задач в геометрично нелінійній постановці.

Виходячи з аналізу джерел, присвячених тематиці дослідження, можна зробити такі висновки. Більшість праць направлена на опис поведінки матеріалів точці та існує потреба у розробці теорії термо-псевдо-пружно-пластичності, придатної для опису деформації в широкому діапазоні значень температур, швидкостей деформації при довільному навантаженні тіла та при наявності **значних пластичних деформацій** (до 16%).

У **другому розділі** наведено повну систему рівнянь та розроблено метод визначення пружно-пластичного нестационарного напружено-деформованого стану трьохвимірних тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. Зроблена математична постановка задачі дослідження.

Для дослідження процесу деформування твердого тіла з функціонально-неоднорідного матеріалу, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження, необхідно розв'язати три групи рівнянь: рівняння руху, геометричні та фізичні рівняння, а також рівняння теплопровідності. Основними невідомими є температура, швидкості переміщень і компонент тензорів напруження та деформації, що виникають у тілі в процесі його навантаження та нагрівання. Усі ці невідомі є функції трьох координат і часу.

Температурне поле для ізотропного тіла визначається шляхом розв'язання рівняння теплопровідності (2) при певних початкових та граничних умовах. За допомогою функції  $W_*(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij})$  враховується тепло, яке виникає в матеріальній точці тіла при циклічному навантаженні та фазових переходах.

Після визначення поля температур для певного моменту часу розшуковуються складові вектора швидкості зміщень і компоненти тензорів напруження і деформації, які задовольняють трьом рівнянням руху, шести геометричним рівнянням і шести фізичним рівнянням.

Рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, що деформується, в ортогональній системі координат в геометрично нелінійній постановці представимо у вигляді:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho H_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \sigma_{ij} + \sigma_{jn}^0 \frac{\partial u_j}{H_n \partial \alpha_n} \right) + \frac{1}{\rho} B_i(\sigma_{mn}; \dots); i, j, n, m = 1; 2; 3. \quad (4)$$

У формулах (4) через  $\sigma_{ij}^0$  позначено невідомі, які розшуковуються за допомогою геометрично лінійного підходу.

У загальному випадку ортогональної системи координат тензор деформації та складові вектора переміщень пов'язані такими нелінійними співвідношеннями:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left[ e_{11}^2 + \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right)^2 + \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right)^2 \right], \quad (5)$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} + e_{11} \left( \frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + e_{22} \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right).$$

Інші складові тензора деформацій отримуються з (5) та інших формул, наведених нижче, шляхом циклічної перестановки індексів.

У випадку використання ортогональної системи координат:



$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{\partial u_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} u_3, \\
e_{12} &= \frac{\partial u_2}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{H_2 \partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right), \\
2\omega_1 &= \frac{\partial u_3}{H_2 \partial \alpha_2} - \frac{\partial u_2}{H_3 \partial \alpha_3} + \frac{1}{H_2 H_3} \left( \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} u_3 - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} u_2 \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Після диференціювання за часом деформацій (5) в геометрично нелінійному випадку для швидкостей деформацій можна записати:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} &= (1 + e_{11}) \frac{\partial v_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{H_1 \partial \alpha_1} + \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{H_1 \partial \alpha_1} + c_{11}, \dots \\
\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} &= \left( 1 + \frac{e_{11}}{2} + \frac{e_{22}}{2} \right) \left( \frac{\partial v_2}{H_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial v_1}{H_2 \partial \alpha_2} \right) + \left( \frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{H_1 \partial \alpha_1} + \\
&+ \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{H_2 \partial \alpha_2} + \frac{(e_{22} - e_{11})}{2} \left( \frac{\partial v_2}{H_1 \partial \alpha_1} - \frac{\partial v_1}{H_2 \partial \alpha_2} \right) + \\
&+ \left( \frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{H_1 \partial \alpha_1} + \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{H_2 \partial \alpha_2} + c_{12}, \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

Тут введено позначення:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{11}^0 - \frac{v_1}{H_1} \left[ \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + \left( \frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \right], \dots \\
c_{12} &= c_{12}^0 + v_3 \left[ \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} + \left( \frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \right] - \\
&- v_3 \left[ \left( \frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} + \left( \frac{e_{32}}{2} + \omega_1 \right) \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \right], \dots
\end{aligned}$$

Тут введено позначення:

$$\begin{aligned}
c_{11}^0 &= \frac{1 + e_{11}}{H_1} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} v_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} v_3 \right), \dots, \\
c_{12}^0 &= \frac{v_1}{H_1 H_2} \left[ \left( \frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - (1 + e_{22}) \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right] + \\
&+ \frac{v_2}{H_1 H_2} \left[ \left( \frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - (1 + e_{11}) \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right], \dots
\end{aligned}$$

Система рівнянь (4), (7) замикається фізичними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= a_{ijkl} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} + b_{ij}, \quad i, j = 1; 2; 3, \\
b_{ij} &= - \left[ K \cdot \alpha_i + (T - T_0) \frac{\partial}{\partial t} (K \cdot \alpha_i) \right] \delta_{ij} \cdot \frac{\partial T}{\partial t},
\end{aligned} \tag{8}$$

де  $a_{ijkl} - \text{const}$  для пружного випадку і функціонали процесу попереднього деформування у випадку наявності пластичних деформацій.

Зазначимо, що при деформаціях менше 7% рівняння руху і геометричні співвідношення доцільно використовувати в геометрично лінійній постановці.

Виходячи з результатів першого розділу, тензор повної деформації можна представити як суму пружної складової  $\varepsilon_{ij}^e$ , стрибка деформації при фазовому переході  $\varepsilon_{ij}^T$ , пластичної деформації  $\varepsilon_{ij}^p$  і деформації  $\varepsilon_{ij}^\theta$ , яка викликана температурними змінами. Тоді можна записати:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta.$$

Пружні деформації визначаються за допомогою закону Гука. Деформації, викликані температурними змінами, задовольняють закон лінійного теплового розширення. Стрибок деформацій при фазовому переході будемо визначати так:

$$\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_T(T) \frac{\partial f_\gamma(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

де функція  $f_\gamma(\sigma_{ij}) = 0$  дає межі деякої поверхні в просторі напруження. При переході через границю цієї поверхні стрибком зростає деформація, обумовлена фазовими переходами. Вона задається так:

$$f_\gamma(\sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}} (S_{ij} S_{ij}) - \sigma_\gamma(T), \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma,$$

де

$$\sigma_\gamma(T) = \begin{cases} \sigma_M(T), & S_{ij} \dot{S}_{ij} > 0; \\ \sigma_m(T), & S_{ij} \dot{S}_{ij} < 0. \end{cases}$$

Звідси отримаємо:

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{3\varepsilon_T(T)}{2\sigma_\gamma(T)} S_{ij}.$$

Пластичні деформації мають задовольняти співвідношенням теорії пластичності, яка застосовується. Розглянуто деякі конкретні приклади запису класичних фізичних співвідношень. Це теорія течії, теорія процесів деформування по траєкторіях малої кривизни. Для прикладу наведемо один із варіантів теорії Чернякова-Кадашевича-Новожилова. Закон течії має вигляд

$$S_{ij} = \tau_s a(\lambda) \cdot \frac{d \varepsilon_{ij}^p}{d \lambda},$$

де  $\tau_s$  – локальна межа плинності при зсуві, а  $\lambda = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^p \cdot \varepsilon_{ij}^p \right)^{1/2}$ .

У результаті для  $a_{ijkl}$  отримаємо формули:

$$a_{kkkk} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, a_{kknk} = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, a_{knkn} = 2G, a_{knrs} = a_{knrz} = a_{kkrs} = 0,$$

а  $b_{ij}$  визначаються так  $b_{ij} = -\frac{2G}{\tau_s} \cdot \frac{\lambda}{a(\lambda)} \cdot S_{ij}$ ,  $a(\lambda) = \frac{\sigma_u}{G_s}$ ,  $G_s = \sqrt{3} \cdot \tau_s$ .

Функція  $a(\lambda)$  визначається на підставі експериментальних даних і характеризує собою вплив швидкості пластичного деформування на межу текучості.

Обробка експериментальних даних роботи R. Abeyaratne, J.K. Knowles дозволила побудувати таблиці й діаграми для різних значень температури. Діаграми побудовано для фіксованих значень температури без урахування тепла, яке виділяється в процесі фазового перетворення в матеріальній точці.

Для конкретизації фізичних співвідношень сформульована нова нелінійна феноменологічна модель, яка більш точно, в порівнянні з відомими моделями, описує властивості сплавів з пам'яттю форми та термо-псевдо-пластичну поведінку матеріалу саме в точці. Для конкретизації діаграми напруження – деформація матеріалу зразка додатково треба знати положення в тілі фронту фазового переходу  $s(t)$  і функцію кінетичного відгуку  $\dot{s} = \Phi(f)$ .

Розглянуто випадок, коли функція кінетичного відгуку має вигляд ламаної, яка складається з двох лінійних відрізків, і більш загальний випадок з нелінійною другою ланкою, для якої друга лінійна ланка попередньої моделі буде асимптотою. Ця комбінована лінія задається аналітично.

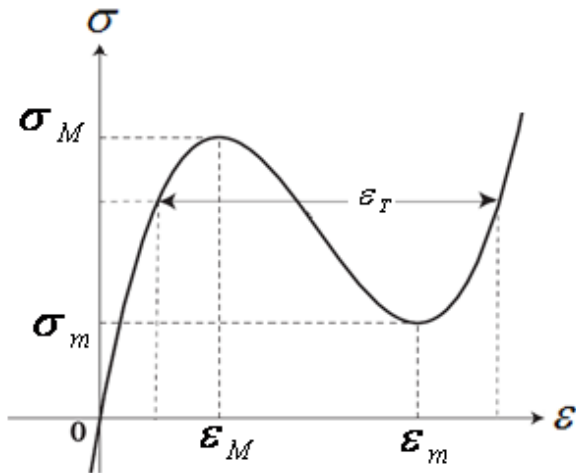


Рис. 1 Узагальнена залежність між напруженням  $\sigma$  і деформацією  $\varepsilon$

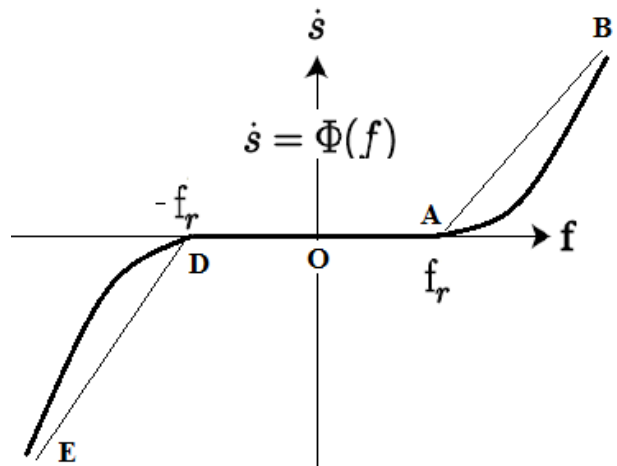


Рис. 2 Функція кінетичного відгуку  $\dot{s} = \Phi(f)$

Узагальнена залежність між напруженням  $\sigma$  і деформацією  $\varepsilon$ , в матеріальній точці моделюється кривою що зображена на рисунку 1. При побудові такої діаграми треба задати точки  $(\sigma_M, \varepsilon_M)$  і  $(\sigma_m, \varepsilon_m)$ , функції  $\varepsilon = \psi_i(\sigma), i = 1, 2, 3$ . Змінна деформація фазового перетворення визначається так  $\varepsilon_T = \psi_3(\sigma) - \psi_1(\sigma)$ .

Для побудови фізичних співвідношень між напруженням та деформацією необхідно додатково знати положення в зразку фронту фазового переходу  $s = s(t)$  і функцію кінетичного відгуку  $\dot{s} = \Phi(f)$ . Ця проблема вирішується шляхом введення поняття рушійної сили  $f$ . Вона визначається так:

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \varepsilon_T(\sigma) d\sigma.$$

де  $\sigma_0 = (\sigma_M + \sigma_m) / 2$  – напруження Максвелла.

У результаті в загальному випадку можна визначити дотичний модуль діаграми зразка. При його обчисленні треба попередньо визначити функції  $\sigma = \sigma(t)$ ,  $s = s(t)$ , а для цього слід визначити функцію кінетичного відгуку  $\dot{s} = \Phi(f)$ ;  $F = f - f_r$ .

Для визначення положення в тілі фронту фазового переходу і степеневі функції кінетичного відгуку записана система двох інтегро-диференціальних рівнянь:

$$s = \dot{s}_0(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t (f - f_r)^n d\tau,$$

$$\dot{f} = \frac{\varepsilon_T(\sigma)}{\varepsilon_T'(\sigma)s + \psi_1'(\sigma)L} \left[ \dot{\varepsilon} - \varepsilon_T(\sigma) (\dot{s}_0 + \omega(f - f_r)^n) \right].$$

Числово-аналітичне розв'язання цієї системи дозволило побудувати більш точний алгоритм розв'язання загальної задачі по описанню діаграми матеріалу зразка в цілому. Результат наведено на рисунку 3.

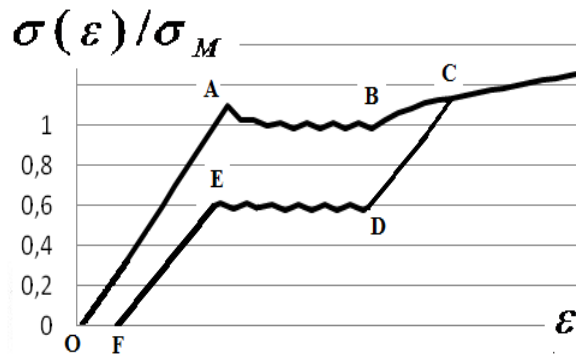


Рисунок 3. Інтегральна діаграма матеріалу

Перша ОА ділянка інтегральної діаграми матеріалу відповідає пружній поведінці. Третя ВС характеризує зміцнення матеріалу. Між ними міститься ділянка, яка нагадує поведінку ідеально пластичного матеріалу. Аналогічні ділянки мають місце і при розвантаженні CDEF, але при визначених температурах.

Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу в точці, які побудовано для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

Уточнена феноменологічна модель поведінки матеріалу в матеріальній точці будується на основі наведених результатів. Вона відрізняється від попередньої моделі наявністю зуба плинності на межі пружної ділянки при активному навантаженні і плавним переходом при розвантаженні. Фактично діаграма з зубом плинності є проекцією траєкторії, яка йде по миттєвій термо-механічній поверхні (МТМП). Таким чином, маючи МТМП та закон, за яким

змінюється температура в точці зразка, можна провести уточнення діаграми матеріалу.

Повну систему рівнянь (4), (8) після виключення швидкостей деформацій (7) запишемо так:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 A_i^N \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_i} + \vec{B}^N. \quad (9)$$

З неї визначаються **основні** невідомі функції

$$w_1 = v_1; w_2 = v_2; w_3 = v_3; w_4 = \sigma_{11}; w_5 = \sigma_{22}; w_6 = \sigma_{33}; w_7 = \sigma_{12}; w_8 = \sigma_{13}; w_9 = \sigma_{23}$$

при визначених початкових і граничних умовах.

Вектор  $\vec{B}^N$  в правій частині (9) має такі компоненти:

$$B_1^N = B_1; B_2^N = B_2; B_3^N = B_3; B_4^N = d_{11}; B_5^N = d_{22}; B_6^N = d_{33}; B_7^N = d_{12}; B_8^N = d_{13}; B_9^N = d_{23}.$$

Тут

$$B_j = B_j^0 + \frac{1}{H_j} \left( \frac{\partial \sigma_{jj}^0}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_j} \sigma_{jj}^0 \right) \frac{\partial (u_1 + u_2 + u_3)}{H_j \partial \alpha_j} + \sigma_{jj}^0 \frac{\partial^2 (u_1 + u_2 + u_3)}{H_j^2 \partial \alpha_j^2},$$

$$B_1^0 = K_1 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial \alpha_1} \sigma_{11} - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \sigma_{33} \right] +$$

$$+ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \left( 2H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \right) \sigma_{12} + \left( 2H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \right) \sigma_{13} \right],$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \cdot c_{kl} + b_{ij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Матриці  $A_i^{(N)}$  загальним розміром 9x9 мають наступну структуру:

$$A_i^N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & 0 & 0 & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & 0 & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{i3}}{\rho H_3} & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho H_1} & \frac{\delta_{i2}}{\rho H_2} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{71} & \alpha_{72} & \alpha_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{81} & \alpha_{82} & \alpha_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{91} & \alpha_{92} & \alpha_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Елементи  $\alpha_{nm}$  матриць  $A_i^N$  в геометрично нелінійній постановці містять  $\omega_i, e_{ij}$  (6).

Зазначимо, що після обчислення основних невідомих величин незалежно визначаються переміщення шляхом інтегрування за часом відповідних

швидкостей переміщень  $v_i$  і складові тензора деформацій за допомогою інтегрування рівнянь (7).

Система рівнянь (9) розв'язується за допомогою підходу, оснований на ідеї покопонентного розщеплення. Запропоновано новий варіант методу зведення трьохвимірної геометрично нелінійної нестационарної задачі термопружно-пластичності до послідовно розв'язуваної системи трьох двовимірних задач на дробових кроках за часом (схема Писмана, Речфорда, Дугласа):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( A_1^N \frac{\partial \vec{W}}{H_1 \partial \alpha_1} + A_2^N \frac{\partial \vec{W}}{H_2 \partial \alpha_2} \right) + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p, \quad t \in [t^p; t^{p+1/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( A_2^N \frac{\partial \vec{W}}{H_2 \partial \alpha_2} + A_3^N \frac{\partial \vec{W}}{H_3 \partial \alpha_3} \right) + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3}, \quad t \in [t^{p+1/3}; t^{p+2/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( A_3^N \frac{\partial \vec{W}}{H_3 \partial \alpha_3} + A_1^N \frac{\partial \vec{W}}{H_1 \partial \alpha_1} \right) + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3}, \quad t \in [t^{p+2/3}; t^{p+1}], \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1.\end{aligned}\tag{10}$$

У поєднанні з методом невизначених коефіцієнтів підхід Писмана, Речфорда, Дугласа дозволяє провести наступний запис неявної схеми розщеплення системи (10):

$$\begin{aligned}(\vec{W}^{p+1/3} - \vec{W}^p) / \tau &= \vec{L}_{12}(\vec{W}^{p+1/3}; \vec{W}^p) + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p, \\ (\vec{W}^{p+2/3} - \vec{W}^{p+1/3}) / \tau &= \vec{L}_{23}(\vec{W}^{p+2/3}; \vec{W}^{p+1/3}) + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3}, \\ (\vec{W}^{p+1} - \vec{W}^{p+2/3}) / \tau &= \vec{L}_{31}(\vec{W}^{p+1}; \vec{W}^{p+2/3}) + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3}\end{aligned}\tag{11}$$

де для скорочення запису позначено наступні диференціальні оператори:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{12} &\equiv \vec{L}_{12}(\vec{W}^{p+1/3}; \vec{W}^p) = \Lambda_1(\alpha \vec{W}^{p+1/3} + \beta \vec{W}^p) + \Lambda_2(\alpha \vec{W}^{p+1/3} + \beta \vec{W}^p), \\ \vec{L}_{23} &\equiv \vec{L}_{23}(\vec{W}^{p+2/3}; \vec{W}^{p+1/3}) = \Lambda_2(\alpha \vec{W}^{p+2/3} + \beta \vec{W}^{p+1/3}) + \Lambda_3(\alpha \vec{W}^{p+2/3} + \beta \vec{W}^{p+1/3}), \\ \vec{L}_{31} &\equiv \vec{L}_{31}(\vec{W}^{p+1}; \vec{W}^{p+2/3}) = \Lambda_3(\alpha \vec{W}^{p+1} + \beta \vec{W}^{p+2/3}) + \Lambda_1(\alpha \vec{W}^{p+1} + \beta \vec{W}^{p+2/3}), \\ \alpha + \beta &= 1.\end{aligned}\tag{12}$$

Диференціальні оператори (12) визначаються за допомогою безпосереднього диференціювання двовимірних сплайнів, які попередньо будуються на основі відомих з попереднього дробного кроку величин у вузлах координатної сітки.

З формул (11) отримано такі розрахункові формули:

$$\begin{aligned}(\vec{W}^{p+1/3})_{m+1} &= \left\{ \vec{W}^p + \tau \left[ \vec{L}_{12}(\vec{W}^{p+1/3}; \vec{W}^p) + \gamma_1 (\vec{B}^N)^p \right] \right\}_m, \\ (\vec{W}^{p+2/3})_{m+1} &= \left\{ \vec{W}^{p+1/3} + \tau \left[ \vec{L}_{23}(\vec{W}^{p+2/3}; \vec{W}^{p+1/3}) + \gamma_2 (\vec{B}^N)^{p+1/3} \right] \right\}_m, \\ (\vec{W}^{p+1})_{m+1} &= \left\{ \vec{W}^{p+2/3} + \tau \left[ \vec{L}_{31}(\vec{W}^{p+1}; \vec{W}^{p+2/3}) + \gamma_3 (\vec{B}^N)^{p+2/3} \right] \right\}_m.\end{aligned}\tag{13}$$

У якості нульової ітерації ( $m=0$ ) обираються результати обчислень за явною схемою ( $\alpha=0; \beta=1$ ). Ці формули дозволяють отримати третій порядок апроксимації методу по просторовим координатам.

Для підвищення точності обчислень за часом треба підвищити порядок апроксимації перших похідних за часом в лівій частині рівнянь (10). Для цього використаємо підход, розроблений в роботах П.О. Стеблянка, який дозволяє одержати порядок апроксимації похідної  $O(\tau^3), O(\tau^4)$  відповідно при застосуванні кубічних В-сплайнів та напружених одновимірних сплайнів.

При переході від рівнянь (10) до різницевої схеми їх розв'язання похідні за часом у вузлах  $t_{p+r/3}, r=1;2;3$  визначаються за допомогою безпосереднього диференціювання попередньо отриманого одновимірного сплайна. У результаті розрахункова схема зводиться до розв'язання системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $W_k^{p+1/3}, W_k^{p+2/3}, W_k^{p+1}, k=1;2;\dots;15$ .

Після виключення величин  $W_k^{p+1}$  з першого та другого рівнянь системи, одержимо систему двох рівнянь, на підставі цього організована ітераційна процедура визначення допоміжних значень  $W_k^{p+1/3}, W_k^{p+2/3}$  на дробових кроках.

Нульове наближення для цих величин визначається за допомогою формул явної схеми. Процес ітерації за допомогою формул (18) проводиться доти, поки сусідні ітерації не будуть відрізнятися одна від одної не більше наперед заданої величини. Після цього визначається розв'язок векторного рівняння  $W_m^{p+1}$  на повному кроці за часом.

Відзначимо, що з практичної точки зору такий процес ітерації дає результати, аналогічні тим, які розраховуються на підставі явної схеми, але зі значно більшим кроком інтегрування за часом. Це дозволяє суттєво зменшити час розрахунку розв'язання нестационарної задачі у порівнянні з підходом, заснованим на використанні формул (13).

**У третьому розділі** досліджується та розв'язується новий клас задач термомеханіки для функціонально-неоднорідних матеріалів. Розв'язано ряд задач для тіл з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні. Виконано порівняння з відомими результатами.

Перший параграф присвячено обробці відомих експериментальних результатів і описанню діаграм напруження – деформація для функціонально-неоднорідних матеріалів як при активному навантаженні, так і при розвантаженні.

У другому параграфі в геометрично нелінійній постановці розглянуто задачу про розповсюдження хвилі фазового переходу в одновимірному стрижні при його розтягуванні. Зазначимо, що в роботі [1] ця задача була розв'язана в геометрично лінійній постановці для деформацій, які не перевищували 6%.

Для дослідження поведінки стрижня при великих пластичних деформаціях була застосована модель матеріалу з трилінійного двофазного матеріалу та з урахуванням тепла, яке виділяється. При числових розрахунках було використано діаграму сплаву з пам'яттю форми NiTi (рисунок 4).

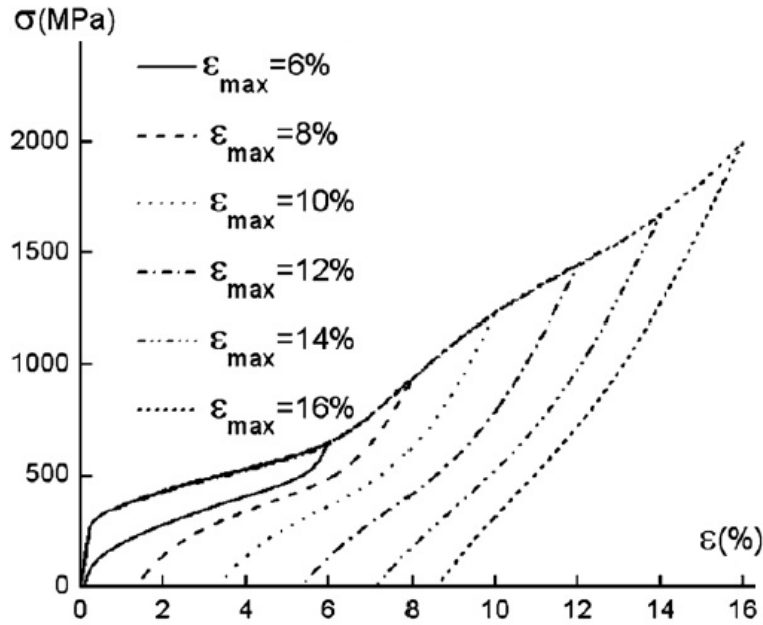


Рисунок 4. Діаграма сплаву з пам'яттю форми NiTi

(дивись Wang X.M. *Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys.* / X.M. Wang, B.X. Xu, Z.F. Yue // *International Journal of Plasticity* 24, 2008. – P. 1307–1332.).

Розглянемо випадок активного навантаження одновимірного стрижня. Визначимо швидкість розповсюдження границі фазового переходу вздовж одновимірного стрижня  $x \in [0; L]$ . На краю  $x = 0$  задається швидкість  $v = V_0$ , з якою розтягується зразок. Край  $x = L$  закріплено (тут  $v = 0$ ). Основними шуканими величинами є: швидкість зміщення вздовж осі стрижня  $v(x, t)$ ; напруження  $\sigma(x, t)$ ; деформація  $\varepsilon(x, t)$  і температура  $T(x, t)$ .

Для визначення невідомих величин запишемо одновимірний варіант повної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma + \sigma_0 e), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} (1 + e), \quad e = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma &= \begin{cases} E_1 \varepsilon - K \alpha_T (T - T_0) & , \varepsilon \in [0, \varepsilon_s], \\ E_2 (\varepsilon - \varepsilon_s) + \sigma_s - K \alpha_T (T - T_0) & , \varepsilon \in [\varepsilon_s, \varepsilon_c], \\ E_3 (\varepsilon - \varepsilon_c) + \sigma_c - K \alpha_T (T - T_0) & , \varepsilon \in (\varepsilon_c, \infty), \end{cases} \quad (14) \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W_*. \end{aligned}$$

де  $E_1, E_2, E_3$  модулі локальної діаграми матеріалу. Через  $W_*$  позначена функція, що враховує тепло, яке виникає в тілі при фазовому переході.

Перейдемо до безрозмірних нормованих шуканих величин.

Для числового розв'язання системи (14) введемо сітки за часом  $t$  і по координаті  $x$ :



$$\omega_t = \{t_p; t_{p+1} = t_p + \tau; t_0 = 0; p = 0; 1; 2; \dots\},$$

$$\omega_h \left\{ x_i; x_{i+1} = x_i + h; x_0 = 0; h = \frac{L}{n}; i = 0; 1; 2; \dots n \right\}. \quad (15)$$

Тоді явну різницеву систему, еквівалентну системі (14), можна записати так:

$$v^{p+1} = v^p + \tau k_{1*} \lambda (\sigma^p + k_{4*} \sigma_0^p e^p), \quad \varepsilon^{p+1} = \varepsilon^p + \tau \lambda (v^p) (1 + k_{4*} e^p),$$

$$T^{p+1} = T^p + \tau k_{3*} \mu (T^p) + \tau W_*^p t_*. \quad (16)$$

Зазначимо, що величина напруження в довільний момент часу може бути визначена безпосередньо по відповідній формулі з (14).

Підвищена точність обчислень похідних досягається за допомогою різницевих формул підвищеної точності.

Результати числового експерименту наведено на рисунках 5. Тут показано розподіл деформації та напруження вздовж стрижня для різних моментів часу. Ці результати отримані для кроків інтегрування (рисунки зліва). На правих рисунках показано порівняння деяких з цих результатів з аналогічними за часом результатами, але отриманими для вдвічі більшого кроку за часом

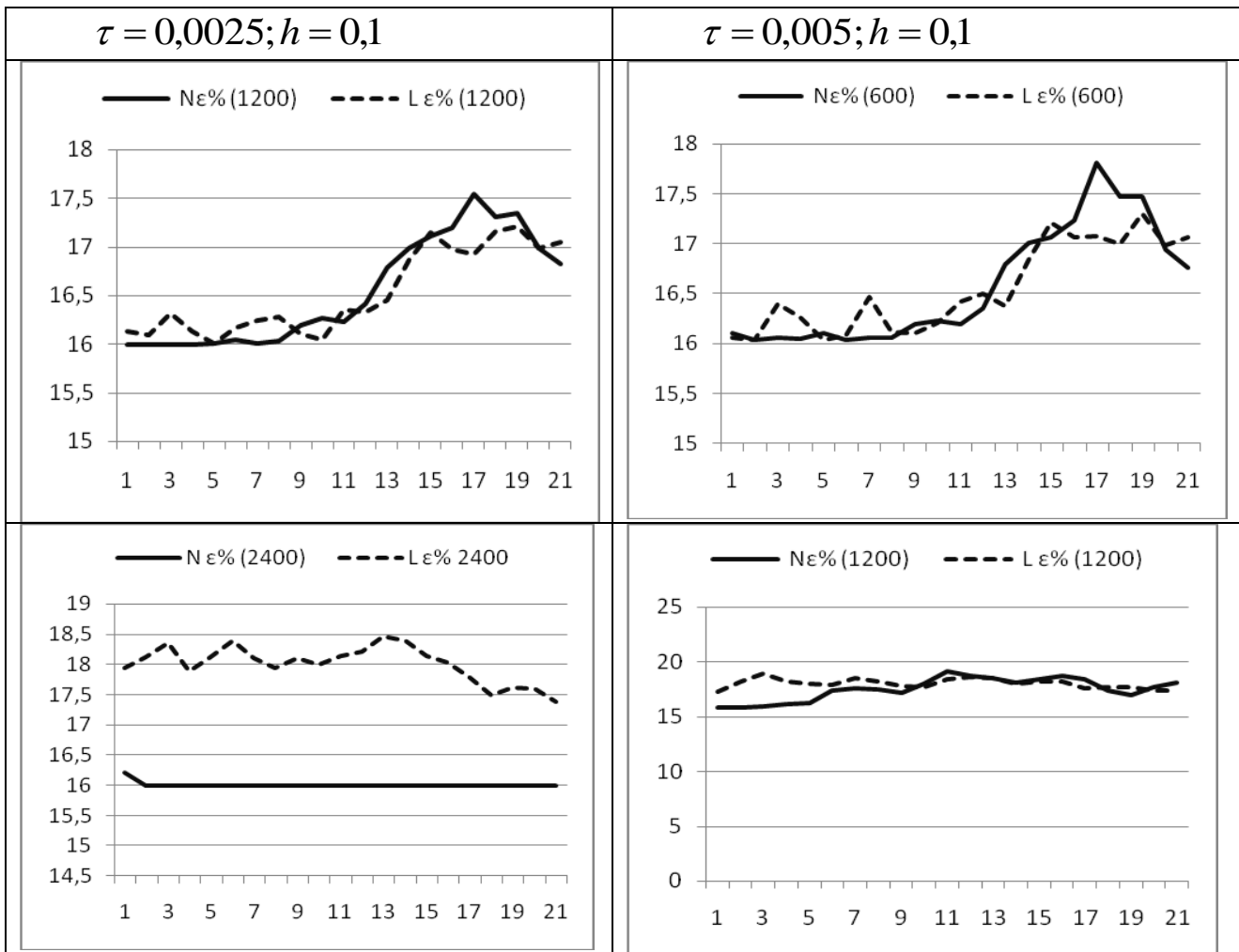


Рисунок 5 Порівняння і розбіжність результатів, отриманих в геометрично лінійній (L) і нелінійній (N) постановках для  $\varepsilon\% \in [0;16]$

Враховано зміни в часі температурного поля, обумовленого теплом, що виділяється під час послідовності фазових переходів.

Розглянуто ряд варіантів задачі, отриманих на різних сітках по координаті та за часом.

У третьому параграфі цього розділу проведено моделювання поведінки локально навантаженої полоси з псевдо-пружно-пластичного матеріалу при її нестационарному навантаженні. Проведено порівняння результатів, отриманих у геометрично лінійній і нелінійній постановках при великих пластичних деформаціях. Встановлено, що при пластичних деформаціях до 6% розбіжність результатів в точках локалізації деформації не перевищує 5%. При збільшенні значень пластичної деформації розбіжність результатів може значно зростати і в околі можливого створення шийки досягати 20% . Проведено порівняння з відомими результатами для конструкційних матеріалів. Проаналізовано розбіжності між результатами, отриманими в геометрично лінійній і нелінійній постановках для функціонально-неоднорідного матеріалу.

В означених задачах розроблено числову процедуру розрахунку діаграми матеріалу (рисунок 3), яка представляє собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, побудованих для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій. Побудовано інтегральні діаграми матеріалу, який може знаходитися під дією складного навантаження. Проведена її сплайн-апроксимація.

Для двофазного матеріалу, що складається з трьох криволінійних ділянок з різними модулями пружності і відповідно змінною трансформаційною деформацією, на основі запропонованої моделі записана залежності між напруженням, збільшенням довжини зразка і рушійною силою.

При отриманні розрахункових формул уточненої моделі. Розглянута допоміжна задача, яка пов'язана з розбудовою миттєвої термомеханічної поверхні. Ця задача пов'язана з використанням нової феноменологічної моделі та має за мету дослідження двофазних матеріалів з різними модулями пружності, яка пов'язана з розбудовою миттєвої тривимірної термомеханічної поверхні. Така поверхня має чотири ділянки. На першій ділянці швидкість дорівнює нулю, а на третій досягає постійного значення. Для СПФ на цій ділянці матеріал веде себе теж пружно. Між ними міститься ділянка зі змінною швидкістю. Четверта ділянка поверхні описує етап класичного зміцнення матеріалу. У результаті обчислення дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом інтегральна діаграма матеріалу, побудована в роботі, теж має чотири характерні ділянки.

При активному навантаженні сумарна термомеханічна поверхня для псевдо-пружного матеріалу складається з чотирьох окремих поверхонь. Це поверхня для пружної частини, поверхня, де здійснюється стрибок деформацій, викликаних фазовим перетворенням, і частини поверхні, де матеріал продовжує вести себе пружно (після фазового переходу), а вже потім переходить у пластичний стан (поверхня зміцнення). Аналогічним чином термомеханічна поверхня задається і при розвантаженні.

В описаних тестових задачах проведено порівняння результатів, отриманих в геометрично лінійній і нелінійній постановках. Встановлено, що при пластичних деформаціях до 7% розбіжність результатів не перевищує 5%. При пластичних деформаціях до 16% розбіжність результатів може досягати 20% в точці і більше, де ймовірно буде формуватись шийка зразка.

У четвертому розділі проведено розв'язання ряду задач нового класу, де досліджена поведінка тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях.

Найчастіше функціональні матеріали з ефектом пам'яті форми застосовуються в сучасній техніці та медицині. Проектування пристроїв з елементами з матеріалу з пам'яттю форми значно відрізняється від розробки деталей з конструкційних матеріалів. За особливостями застосування пристроїв з ефектом пам'яті форми їх розбивають на кілька груп [8].

За принципом роботи пристрої поділяють на надпружні, які спрацьовують один раз. Та такі, які спрацьовують багато разів.

За умовами протидії формозміни елемента з пам'яттю форми пристрою, існують такі варіанти. Відновлення форми виробів відбувається за відсутності протидії, тобто у вільному стані. Формозміна виробу здійснюється в умовах жорсткої протидії (термомеханічні з'єднання). У процесі відновлення форми протидія незначна або може змінюватися за величиною (термосилового елемента).

Однією з найбільш затребуваних у наш час областю застосування матеріалів з пам'яттю форми є медицина. Існує значна кількість таких імплантів з матеріалів з пам'яттю форми. Важливою особливістю тут є надпружна поведінка при температурі тіла людини. У такому стані імпланти здатні до значних змін своєї форми під дією функціонального навантаження. При цьому жорсткість імпланта близька до жорсткості біологічних тканин, які він повинен замінити або зміцнити (рисунк 6).

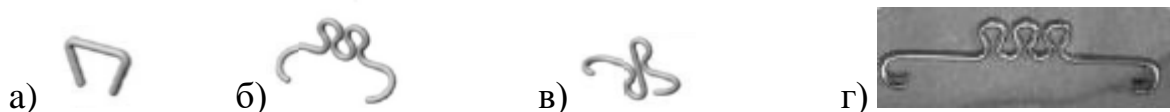


Рисунок 6. Зовнішній вигляд деяких імплантів (дивись посилання в [9])

- а) – фіксатор для з'єднання фрагментів плюсневої кістки,
- б) – межостісна зв'язка,
- с) – імпланти, які застосовуються в стоматології,
- г) – фіксатор для стабілізації хребта

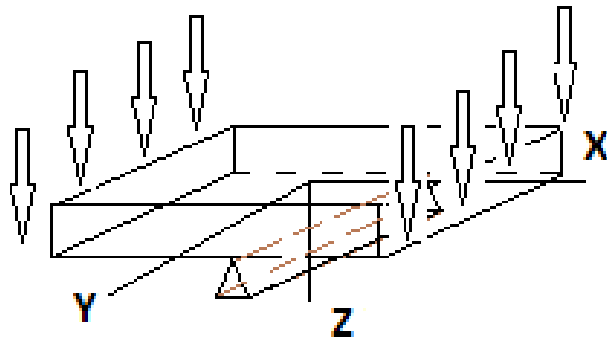
На наш погляд, характерною особливістю усіх цих деталей є наявність точок, де попередня заготовка отримувала значні зміни кривизни. Це означає, що при їх виготовленні при відповідній температурі, пруток в таких заготовках зазнавав значних пластичних деформацій.

Розрахунок елементів конструкції, що трансформуються, в основному зводиться до вибору оптимальної схеми і ступеня деформації, які дозволяють

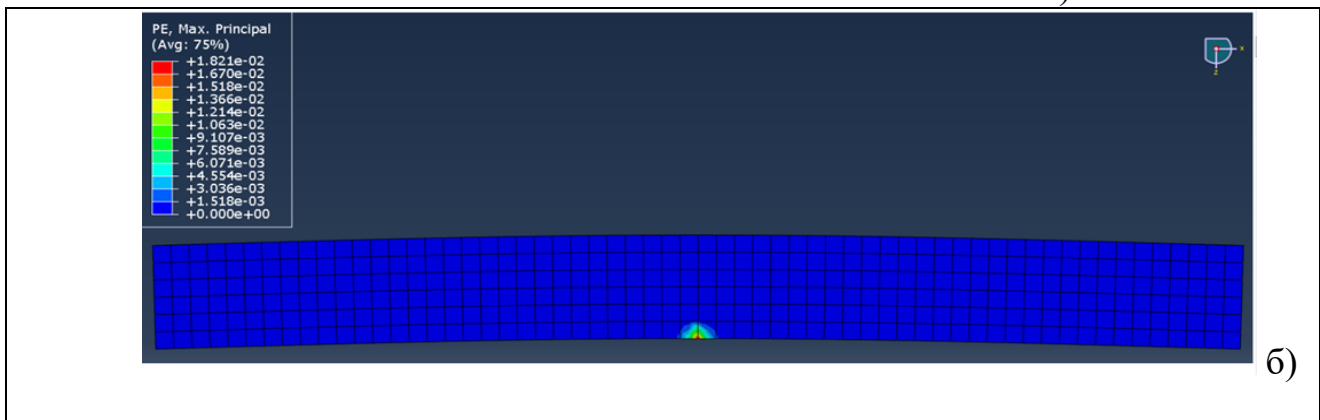
визначити геометрію цього елемента і технологію його застосування. При виборі схеми деформації будемо керуватися такими міркуваннями. Максимальні переміщення можна реалізовувати при деформації вигином, мінімальні – при стисканні. При цьому ступінь деформації елемента, призначеного для багаторазового спрацьовування, не повинна перевищувати критичний ступінь деформації (до руйнування). У цьому випадку при нагріванні буде спостерігатися майже повне відновлення форми, і після охолодження до робочої температури, елемент можна повторно деформувати і нагрівати без небезпеки порушення його геометрії.

На основі цього проведено розв'язання ряду нових задач, де досліджена поведінка тіл з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях.

У **першому** параграфі четвертого розділу була розв'язана задача про вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій (рисунки 7). Пластина розміщена симетрично на опорі, через яку згинається. На її краях задається вертикальна швидкість переміщень у вузлах на торцях. У місці опори вертикальні переміщення точок пластини і відповідно швидкість переміщення дорівнюють нулю. Вся інша її поверхня вільна від напружень.



a)



б)

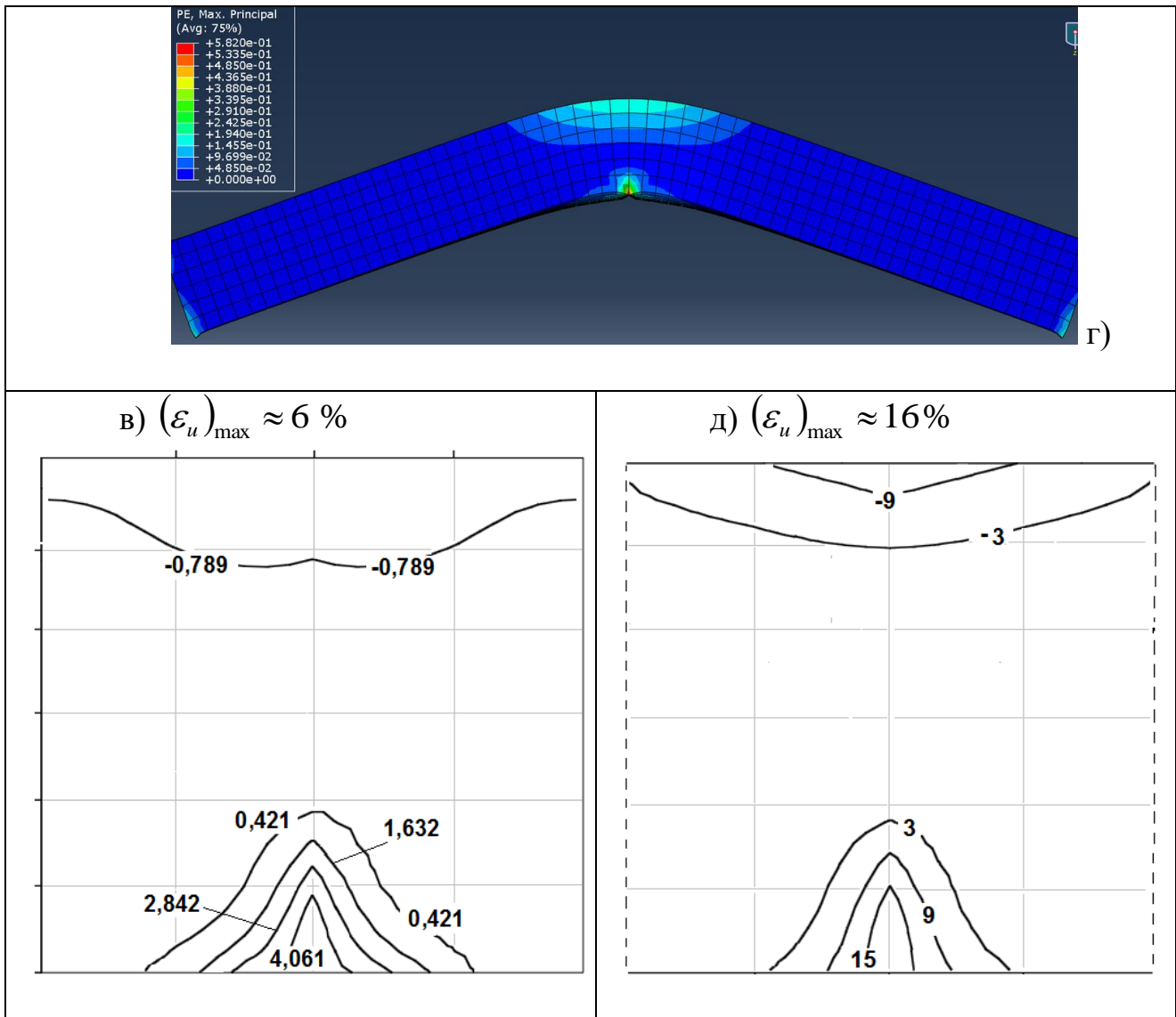


Рисунок 7. Вигин пластини кінцевих розмірів при наявності великих пластичних деформацій

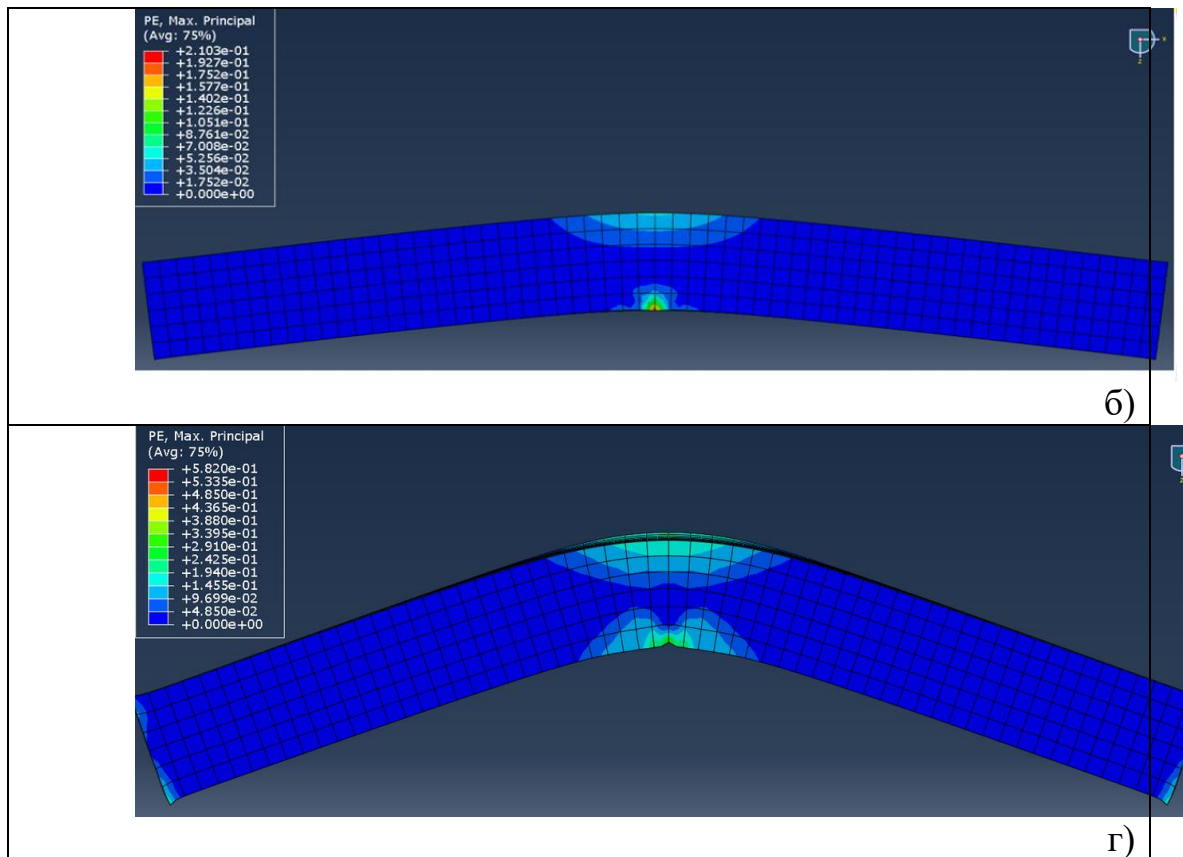
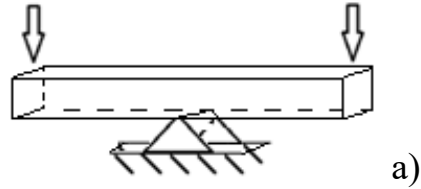
На рисунку 7 а) показана схема навантаження пластини. Поле інтенсивності деформацій розраховане за допомогою формул методу розщеплення (13) зображено на рисунках в) (побудовано при  $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 6\%$ ) і д) (побудовано при  $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 16\%$ ). Зазначимо, що максимальне значення інтенсивності деформації має місце вздовж точок опори пластини.

Для порівняння поле інтенсивності деформацій отримане і за допомогою системи інженерного аналізу ABAQUS при  $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 5\%$  та  $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 18\%$  показано відповідно на рисунках б) і г).

Має місце якісне співпадіння результатів розрахунків. Для досягнення кількісного співпадіння результатів в околі опори пластини в програмі ABAQUS треба дещо по-іншому задавати граничні умови (не в одній точці вздовж опори, а в декількох сусідніх).

У другому параграфі досліджено локальний вигин тривимірного стрижня прямокутного перерізу при наявності великих пластичних деформацій (рисунки 8).

Брус, що згинається, розміщений симетрично на центральній опорі. На його краях задається вертикальна швидкість переміщень у вузлах на торцях. У місці опори вертикальні переміщення точок бруса і відповідно швидкості переміщення дорівнюють нулю. Вся інша поверхня стрижня вільна від напружень.



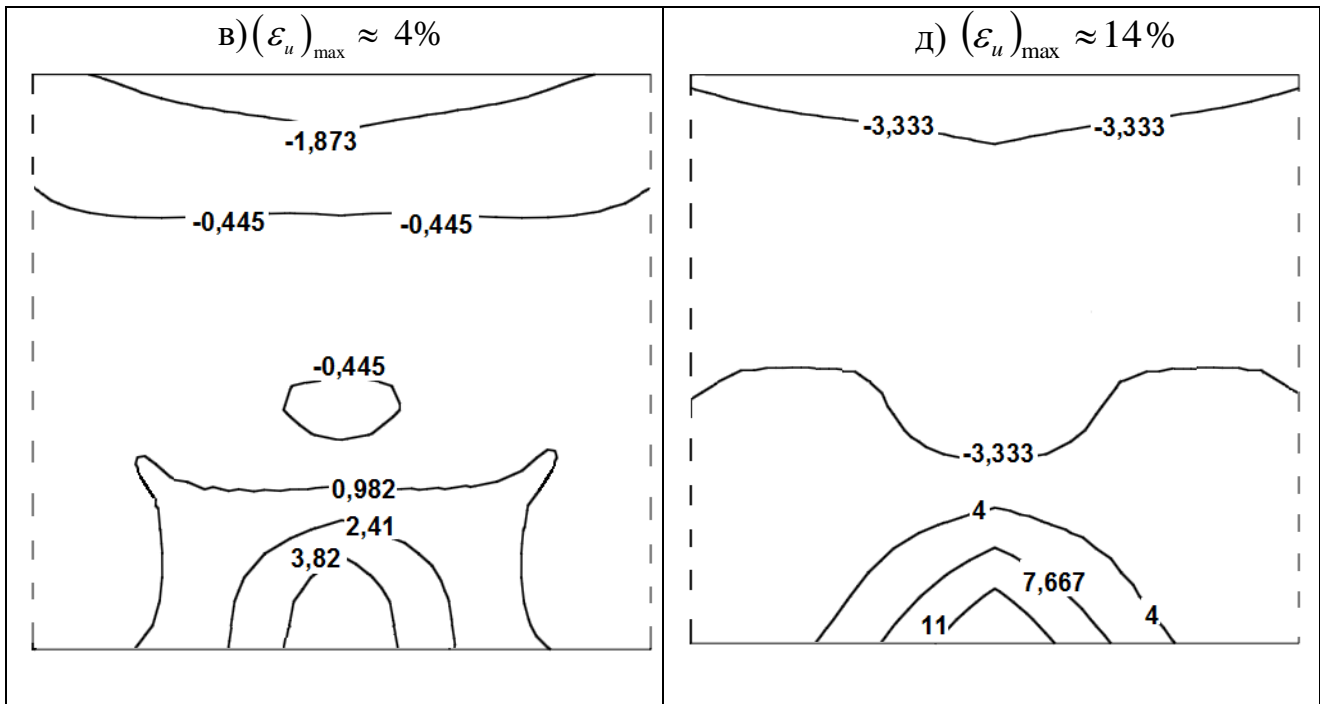


Рисунок 8. Локальний вигин тривимірного бруса прямокутного перерізу при наявності великих пластичних деформацій.

На рисунку 8 а) показана схема навантаження бруса. Поле інтенсивності деформацій розраховане за допомогою формул методу розщеплення (13) зображено на рисунках в) (побудовано при  $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 4\%$ ) і д) (побудовано при  $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 14\%$ ). Зазначимо, що максимальне значення інтенсивності деформації має місце в точці опори бруса.

Для порівняння поле інтенсивності деформацій отримане і за допомогою системи інженерного аналізу ABAQUS при  $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 4\%$  та  $(\varepsilon_u)_{\max} \approx 14\%$  показано відповідно на рисунках б) і г).

Має місце якісне співпадіння результатів розрахунків. Особливістю є те, що для досягнення кількісного співпадіння результатів в околі опори бруса в програмі ABAQUS треба дещо по-іншому задавати граничні умови (не в одній точці а в декількох сусідніх).

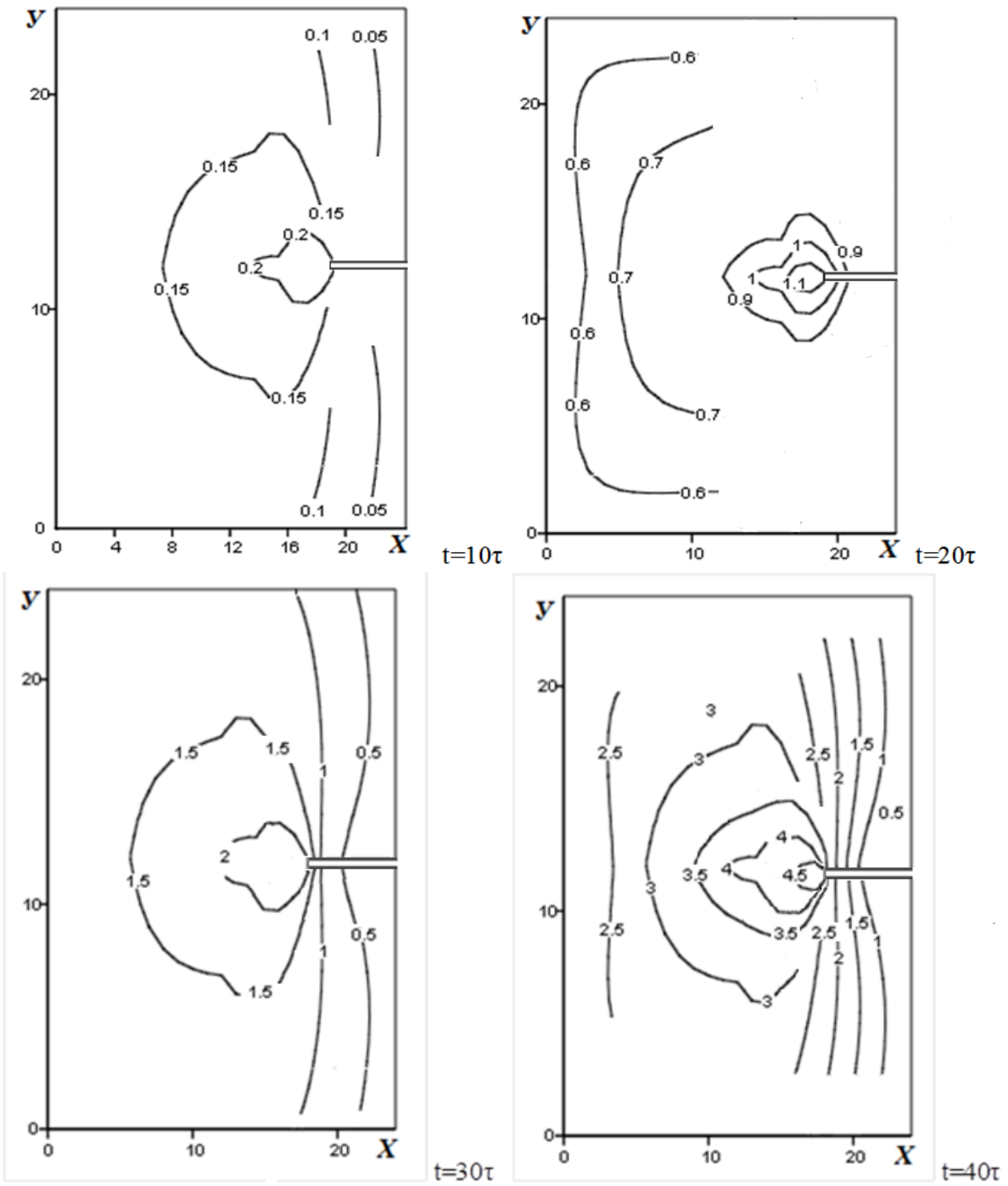
У **третьому** параграфі розглянуто поведінку пластини з бічним розрізом при локальному розтягуванні. Геометрія пластини задана так:  $x \in [0; H]$ ,  $y \in [-L; L]$ ,  $z \in [-h; h]$ . Для розрізу  $x \in [l; H]$ ,  $y \in [-h_0; h_0]$ ,  $z \in [-h; h]$ .

Початкові умови для всіх невідомих величин нульові.

На краях пластини  $y = -L$ ,  $y = L$   $\{x \in [l; H]; z \in [-h; h]\}$  задається швидкість переміщення  $V_y = \phi(t, x, z)$ , яка змінюється по відомому закону. Вся інша поверхня пластини та розрізу вільні від навантаження. У нижніх точках, де пластина підперта, переміщення (швидкості переміщень) дорівнюють нулю.

Числові результати, які наведені нижче на рисунку 9, отримані за допомогою метода розщеплення (13) для таких сіток за часом та координатами

і розмірів





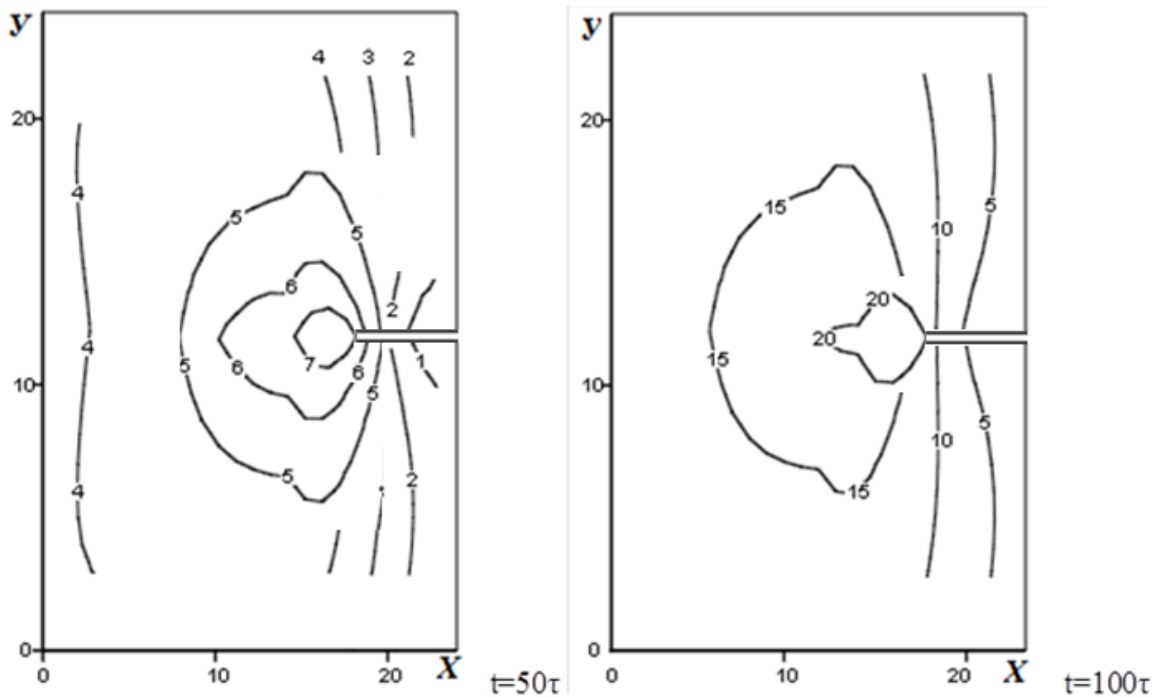


Рисунок 9. Поле інтенсивності деформації для різних моментів часу

На рисунках 9 показано поле інтенсивності деформації для різних моментів часу. На початку навантаження максимальні показники досягають 7% і розходження між результатами, отриманими в геометрично лінійній і нелінійній постановках поблизу розрізу пластини становить до 1%. З ростом навантаження (рисунок 9 для  $t=100\tau$ ) отримано значні пластичні деформації до 20%. У цьому випадку розходження між результатами геометрично лінійного і нелінійного підходів досягає 15%.

У **п'ятому розділі** проведено оцінку точності обчислень та ефективності розробленого нового методу розв'язання задач термомеханіки при значних пластичних деформаціях.

У розв'язаних задачах:

- проаналізовано точність отриманих результатів в одновимірних, двовимірних та тривимірних задачах пружно-пластичності при різних кроках інтегрування;
- досліджено збіжність ітераційної процедури методу при наявності геометричної нелінійності;
- проведено оцінки ефективності розробленого ітераційного методу у порівнянні з класичним кінцево-різницевим методом;
- проведено аналіз збіжності розв'язків, отриманих за допомогою розробленого методу та умов збіжності Куранта, які повинні накладатися на кроки інтегрування за часом та за координатами;
- проведено загальний аналіз ефективності розробленого методу шляхом порівняння кількості елементарних операцій, необхідних для отримання розв'язку геометрично нелінійної задачі термопластичності за допомогою розробленого методу і різницевого методу.

Виявлено, що в геометрично нелінійній постановці застосування кубічних В-сплайнів для апроксимації дозволяє досягнути третій  $O(h^3)$  і другий  $O(h^2)$  порядок апроксимації похідних за координатами для внутрішніх вузлів сітки  $\omega_h$  і вузлів, розміщених на границях тіла. Напружені сплайни дають відповідно величини порядку  $O(h^4)$  і  $O(h^3)$ .

Очевидно, що істотний ефект від використання для апроксимації похідних тих чи інших сплайн-функцій обумовлений вибором значно більших кроків інтегрування  $h$  (для методу розщеплення) в порівнянні з аналогічними кроками  $\lambda$  (класичного кінцево-різницевого методу).

Другий важливий ефект полягає в тому, що відношення  $\tau/h$  значно менше, ніж  $\tau/\lambda$ , а це сприятливо позначається на стійкості рахунків і покращує збіжність. Відзначимо, що наведені оцінки наближені і ступінь їх достовірності перевірявся в конкретних задачах.

Розглянемо послідовність наближених рішень системи (10)  $(W_m(t))_0, (W_m(t))_1, (W_m(t))_2, \dots, (W_m(t))_n, (W_m(t))_{n+1} \dots$ . Кожне наступне наближення відрізняється від попереднього тим, що воно побудоване з кроком інтегрування за часом в два рази меншим, а кількість таких кроків відповідно в два рази більша. Тоді на підставі (13) для геометрично нелінійного випадку теж можна

стверджувати, що при виконанні умови  $|(W_m(t))_1 - (W_m(t))_0| < A_*^N \cdot \left(\frac{\tau}{h}\right)^2$ , де величина  $A_*^N$  обмежена й визначена з урахуванням геометрично нелінійних складових в (13), для точного розв'язку задачі виконується обмеження  $|W_m(t) - (W_m(t))_0| < 2A_*^N \cdot \left(\frac{\tau}{h}\right)^2$ .

Таким чином, можна вважати **доведеною наступну теорему**.

Послідовність наближених розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних  $(W_m(t))_n, n = 0, 1, 2, \dots, t \in [0; p_*\tau]$ , системи (1) отримана на підставі схеми (13) методу покомпонентного розщеплення відповідно до кроків інтегрування  $\tau/2^n$ , обмежена і сходиться до точного розв'язку  $W_m(t)$ .

Наслідком цієї теореми може бути наступна наближена оцінка.

Різниця між точним розв'язком та його нульовим наближенням дає результат, який лише вдвічі більший, ніж різниця між першим та нульовим наближеннями розв'язку задачі.

**У додатках** наведені допоміжні результати (апроксимації діаграми матеріалу, деякі експериментальні результати, інше), акти про впровадження результатів у навчальний процес закладів освіти.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертації розв'язано актуальну наукову проблему механіки деформівного твердого тіла: розроблено модель та метод дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідного матеріалу при великих

деформаціях.

У роботі отримано такі основні результати:

1. Розроблено новий ефективний метод розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного матеріалу при великих деформаціях, який базується на зведенні задачі до системи трьох послідовно розв'язуваних двовимірних задач, коли невідомі величини представлені у вигляді двовимірних поліноміальних та напружених сплайнів.

2. Розроблено та експериментально обґрунтовано нову нелінійну феноменологічну модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів з пам'яттю форми, в якій враховується тепло, що виділяється в процесі фазових переходів у матеріальних точках тіла. За допомогою цієї моделі розв'язано ряд нових задач термомеханіки, пов'язаних з розрахунками напружено-деформованого стану елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях.

3. Запропоновано на ділянці діаграми матеріалу близької до ідеальної пластичності застосовувати феноменологічну теорію пластичної течії для матеріалів з майданчиком плинності.

4. Узагальнено співвідношення теорії пластичності та теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням на випадок деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу.

5. Запропоновано (на основі теорії напружених сплайн-функцій) нові експериментально підтверджені інтерполяційні формули для описання ділянок діаграми матеріалу при розвантаженні з довільної точки, які дозволяють отримувати третій порядок методу апроксимації за часом та третій і четвертий порядок по координатах.

6. Поставлено і розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, термо-псевдо-пружно-пластичності при значних деформаціях.

7. Виявлено та досліджено нові механічні ефекти, пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень у тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів.

8. Доведено збіжність нової ітераційної процедури розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного пластичного матеріалу при великих деформаціях.

9. Вперше в рамках запропонованого методу врахована можливість зміни форми і розмірів тіла при великих деформаціях.

## **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

Основні наукові положення дисертаційного дослідження опубліковано в 44 наукових працях, серед яких:

*статті, опубліковані в виданнях, що входять до різних періодичних видань, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України*

*або закордонних видань, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus*

1. Demichev K. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity / K. Demichev, A. Petrov, Yu. Chernyakov, P. Steblyanko, V. Haydurov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33 (наукометрична база Scopus, Q2 кuartиль).

2. Domichev K. Modeling the behavior of the body with pseudo-elastic-plastic material at non-stationary loading / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Металофізика та новітні технології, Інститут металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України, 2021 – Том 43, випуск 1 – с. 107–128 (наукометрична база Scopus, Q3 кuartиль).

*статті у наукових виданнях, що включені до Переліку наукових фахових видань України*

3. Демичев К.Э. Экспериментальное обоснование варианта модели поведения материала с памятью формы и псевдоупругостью / А.Д. Петров, П.А. Стеблянко, Ю.А. Черняков // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, №80. –2017. – С. 81–87.

4. Дьомічев К.Е. Чисельне моделювання стану пружно-пластичних циліндричних тіл під дією високотемпературних навантажень / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко// Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація; збірник наукових праць Дніпропетровський державний хіміко-технічний університет. – 2017, № 1 (1). – Дніпропетровськ, 2017. – С. 56–62.

5. Дьомічев К.Е. Нелінійна феноменологічна модель поведінки функціонально-неоднорідних матеріалів / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // Вісник Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького. Серія Прикладна математика. Інформатика №1(1). – 2020– С. 4–12.

6. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки стрижня з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // Вісник Черкаського технологічного університету – 2020 – № 4, ЧДТУ–с.143-151.

7. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки елементів виготовлених з матеріалів з пам'яттю форми при значних деформаціях / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій –2020–№ 32, ДНУ ім. О. Гончара –с.81–94.

*статті у наукових періодичних виданнях інших держав із напрямку, з якого підготовлено дисертацію*

8. Domichev K. Iterative methods improved accuracy for solving nonstationary problem thermomechanics / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Collective monograph on Theoretical and experimental aspects of revealing and solving the

current issues of fundamental sciences, International Academy of Science and Higher Education, London, United Kingdom, 2017. – p. 27-29.

9. Domichev K. Phenomenological modeling of volume nanomaterials with form memory / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Scientific journal innovative solutions in modern science. – Dubai, 2020 – No. 4(40). – p.5–17.

10. Domichev K. Simulation of behavior of functionally - heterogeneous materials under temperature loads / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Scientific journal innovative solutions in modern science. – New York, 2020 – No. 8(44). – p.5–11.

11. Domichev K. Modeling the behavior of the physical and geometric non-linear functional heterogeneous materials / K. Domichev // Scientific journal innovative solutions in modern science. – New York, №1(45), 2021– p.82–90.

12. Domichev K. Use of splines in simulation of functionally inhomogeneous materials / K. Domichev // Colloquium-journal – Warszawa, Polska– 2021 – No.3(90). – p.16–18

13. Domichev K. The main areas of application of functional materials / K. Domichev// «Research-science» – Banská Bystrica, Словачинна –2021 – №14. – p.26–29.

14. Domichev K. On the question of convergence solutions numerical nonstationary problems of modeling thermomechanics / K. Domichev, A. Petrov, P. Steblyanko // The scientific heritage. – Budapest, № 59 (59), 2021 – p. 15–17.

15. Domichev K. Modeling behavior textured and non-textured alloy at great deformations / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The scientific heritage. – Budapest, № 60 (60), 2021– p.17-19.

16. Domichev K. Application of two-dimensional splines in modeling problems of functional materials / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The Young Scholars. Vienna, Austria – 2021 – №1. P.7–9.

17. Domichev K. Simulation of behavior of pseudo-elastic-plastic NiTi alloy at large deformations / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Colloquium-journal, 2021 – Warszawa, Polska, №5(92) – p.6-8.

18. Domichev K. Mathematical model shear lines for plastic deformation / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // The scientific heritage. – Budapest, № 61 (61), 2021 – p.54–56.

*монографії (розділи у колективних монографіях)*

19. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічних процесів в пружно-пластичних циліндричних тілах / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, Ю.А. Черняков, О.Д. Петров – К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-917-651-178-6), 2017. – 169 с.

20. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання складних технічних систем / К.Е. Дьомічев, В.Є. Бондаренко, Т.І. Цюпій, В.В. Хайдуров – К.: Вид-во Київського міжнародного університету (ISBN 978-617-651-206-6), 2019. – 248 с.

*інших виданнях, які засвідчують апробацію матеріалів дослідження на наукових конференціях, симпозіумах, конгресах*

21. Дьомічев К.Е. Аналіз інструментальних засобів комп'ютерного моделювання поведінки пружно-пластичних тіл / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, Ю.А. Черняков, О.Д. Петров // МНК Математичні проблеми технічної механіки, квітень 18–19 2017. Том 2. – Дніпро, Кам'янське. – 2017. – С. 9–12.

22. Дьомічев К.Е. Застосування двовимірних сплайнів при розв'язанні нестационарних задач термомеханіки / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко // МНПК Сучасні проблеми термомеханіки – Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача, – Львів, 2016. – С.161–162.

23. Дьомічев К.Е. Комп'ютерне моделювання пружно-пластичних циліндричних тіл з урахуванням пружних параметрів, які залежать від температури / К.Е. Дьомічев // МНПК Інформаційна безпека та комп'ютерні технології. – Кіровоград, 2016. – С.96–97.

24. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання термомеханічного стану пружно-пластичного циліндричного тіла під дією електромагнітного поля / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко // МНПК Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем.– Дніпропетровськ, 2016. – С.113–116.

25. Дьомічев К.Е. Комп'ютерне моделювання пружно-пластичного стану циліндричного тіла під впливом електромагнітних полів / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко // МНПК Математичні проблеми технічної механіки – 2017. – ДДТУ, 2017. – С. 45.

26. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання силових навантажень пружно-пластичних циліндричних тіл при температурному ударі / К.Е. Дьомічев // МНПК Соціально-економічний розвиток в умовах глобалізації. – Чернівці, 2017. – С.6–8.

27. Дьомічев К.Е. Схема розщеплення просторової нестационарної задачі термомеханіки з використанням сплайнів / К.Е. Дьомічев // МНПК Наукова думка інформаційного століття. – Дніпро, 2017. – С.103–105.

28. Дьомічев К. Поведінка функціонально-неоднорідних матеріалів при значних деформаціях // К. Дьомічев, П. Стеблянко, Ю. Черняков, О. Петров, / International scientific conference "Innovative technologies, models Cyber Security Management, ITCSM-2021". – April 14–16, 2021 (Part 1). – Dnipro, Ukraine. – P. 51–55.

29. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання полів напруження та деформації пружно-пластичних циліндричних тіл під дією складного навантаження / К.Е. Дьомічев // XXIII МНПК Формування європейських стандартів, цінностей та безпекового простору – стратегічний напрям української держави – К.: КиМУ, 2018. – С.218–221.

30. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання нестационарного напружено-деформованого пружно-пластичного стану тіл під дією фізико-механічних полів / К.Е. Дьомічев // МНКП Актуальні питання сьогодення. – Вінниця, 2018. – С. 60–63.

31. Дьомічев К.Е. Розробка деяких положень концепції підготовки студентів технічних спеціальностей з дисципліни «Комп'ютерні методи та засоби розв'язання інженерних задач» / К.Е. Дьомічев, Н.М. Волосова, Д.В. Тертичний // МНПК Математичні проблеми технічної механіки–2018. – ДДТУ. 2018. – С. 80.

32. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-механічних полів двовимірними сплайнами / К.Е. Дьомічев, П.О. Стеблянко, О.І. Коваленко // МНПК Наука та освіта: ключові питання сучасності. – 2018, Чернігів. – С. 117–120.

33. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання температурних навантажень на основі ітераційної процедури розв'язання нестационарної задачі термо-пластичності / К.Е. Дьомічев // МНПК Новини науки: дослідження, наукові відкриття, високі технології. – Харків, 2019. – С. 23–24.

34. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання псевдо-пружно-пластичних тіл з урахуванням нелінійності / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров // Науково-технічної конференції молодих вчених та спеціалістів інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України – Київ, 2020. – С. 10–12.

35. Дьомічев К.Е. Моделювання миттєвої термомеханічної поверхні трилінійного двофазного матеріалу при нестационарному навантаженні / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК Пріоритетні шляхи розвитку науки та освіти. – Львів, 2020. – С.61–62.

36. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки тіла з трилінійного двофазного матеріалу з урахуванням температури / К.Е. Дьомічев, Ю.А. Черняков, П.О. Стеблянко, О.Д. Петров // МНПК Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпро, 2020. – С.15–19.

37. Дьомічев К.Е. Моделювання поведінки тіла з псевдопружно-пластичного матеріалу при нестационарному навантаженні / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК «Функціональні матеріали для інноваційної енергетики». – Київ, 2020.– С. 54.

38. Дьомічев К.Е. Математичне моделювання поведінки тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів під дією нестационарного навантаження / К.Е. Дьомічев, О.Д. Петров, П.О. Стеблянко // МНПК Новітні технології в освіті, науці та виробництві. – Покровськ: ДВНЗ «ДонНТУ», 2020.– С.211–212.

39. Дьомічев К.Е. Математичне та комп'ютерне моделювання поведінки інтелектуальних матеріалів / П.О. Стеблянко, Т.І. Каткова // МНПК «Наукові підсумки 2020 року». Збірка наукових праць. – Харків, Х.: Технологічний Центр, 2020. – С.14.

40. Дьомічев К.Е. Нелінійна феноменологічна модель для описання властивостей матеріалів з пам'яттю форми / К. Дьомічев, П. Стеблянко, Ю. Черняков, О. Петров, О. Косухін // МНПК «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020» – Дніпро, 2020. – С. 3.

41. Domichev K. Method of splitting nonstationary thermomechanics task with considering electromagnetic fields / K. Domichev, P. Steblyanko // Inżynieria i

technologia. Współczesne problemy i perspektywy rozwoju. – Zbiór artykułów naukowych. – Warszawa (PL). 2017. – p. 76–78.

42. Domichev K. Mathematical and computer modeling of the temperature field of elastic plastic multiple cylindrical blood / K. Domichev // Nowy sposób rozwoju inżynieria i technologia: Zbiór artykułów naukowych. – Poznan (PL). 2017. – p. 170–171.

43. Domichev K. Mathematical modeling of structural elements from functionally heterogeneous materials / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // Science, research, development. Technics and technology. – Krakow, 2020.– No 27 – p. 27–28.

44. Domichev K. Modeling of body behavior from trilline biphas material taking into temperature / K. Domichev, P. Steblyanko, A. Petrov // МНПК Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК–2020. – Дніпро, 2020. – С.76–77.

## АНОТАЦІЯ

**Дьомічев К.Е. Метод дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Дніпровський національний університет ім. Олесья Гончара, Дніпро, 2021.

Дисертація присвячена методу дослідження елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях та розробці ефективного чисельного методу розв'язання нестационарних двовимірних та тривимірних задач теорії термомеханіки.

Розроблено та експериментально обґрунтовано нову нелінійну феноменологічну модель поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів з пам'яттю форми, в якій враховується тепло, що виділяється в процесі фазових переходів в матеріальних точках тіла. Розроблено новий ефективний метод розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного матеріалу при великих деформаціях. Запропоновано на ділянці діаграми матеріалу близької до ідеальної пластичності застосовувати феноменологічну теорію пластичної течії для матеріалів з майданчиком плинності.

Удосконалено (узагальнено) співвідношення теорії пластичності та теорії течії з кінематичним і трансляційним зміцненням на випадок деформування термо-псевдо-пружно-пластичного матеріалу. Запропоновано (на основі теорії напружених сплайн-функцій) нові експериментально підтверджені інтерполяційні формули для описання ділянок діаграми матеріалу при розвантаженні з довільної точки, які дозволяють отримувати третій порядок методу апроксимації за часом та третій і четвертий порядок по координатах. Поставлено і розв'язано новий клас задач про нестационарне деформування просторових тіл зі сплавів, що мають властивості пам'яті форми, термо-псевдо-



пружно-пластичності при значних деформаціях.

Виявлено та досліджено нові механічні ефекти, пов'язані з урахуванням локального тепловиділення в процесі фазових перетворень в тілах з псевдо-пружно-пластичних матеріалів. Доведено збіжність нової ітераційної процедури розв'язання нестационарних просторових задач теорії пластичності у випадку деформування функціонально-неоднорідного пластичного матеріалу при великих деформаціях.

**Ключові слова:** функціонально-неоднорідний матеріал, пам'ять форми, великі деформації, нелінійна феноменологічна модель, теорія псевдо-пружно-пластичності, двовимірні сплайни.

## SUMMARY

**K.E. Domichev. Method of research of structural elements from functionally inhomogeneous materials at big deformations.** – Manuscript.

Kostiantyn E. Domichev A method for studying the behavior of structural elements made of functionally heterogeneous materials under large deformations – Qualification research paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Psysico-Mathematical Sciences: Specialty 01.02.04 - Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2021.

This dissertation focuses on the main methods of research of behavior of structural elements made of functionally inhomogeneous materials under large deformations. Functionally heterogeneous materials (FHM) or intelligent materials are widely used in science and technology. One of the representatives of this class of materials is shape memory materials or materials with the property of pseudo-elasticity. Their physical or mechanical properties differ sharply from the behavior of ordinary structural, heat-resistant or tooling materials or polymeric materials. The mechanical behavior depends to a large extent on the external conditions (temperature, pressure) and the prehistory of their change. Materials that exhibit shape memory, pseudo-elasticity, and pseudo-elastic-plasticity properties are usually referred to as nasties: NiTi AgCd, AuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, FePt, MnCu, FeMnSi, CoNiAl, CoNiGa, NiFeGa, TiPd, NiTi, NiTiNb, NiMnGa . Materials with shape memory (MPM) at low temperatures under load accumulate deformation, and after heating are fully or partially capable of shape recovery. These alloys can be the basis of composite materials that are more or less capable of shape recovery. The main mechanism in such processes is the martensitic transformation between solid phases, which can occur with a relatively small change in temperature.

In our opinion, the study of such a problem is the development of a new section of the mechanics of a rigid deformable body. To model the behavior of such structural elements, it uses geometric nonlinearity, a new nonlinear phenomenological model of the behavior of shape memory materials, the apparatus of integro-differential partial differential equations, and an improved method of component-wise splitting.

The dissertation consists of an introduction, five chapters, a conclusion, a list of references, and appendices.

The first chapter analyzes the literature on the topic of the thesis research. The analysis of existing models of phase transformations, which can take place in functionally inhomogeneous materials, has been carried out. The criteria by which

phase transformations in materials can be classified and analyzed. The methods for numerical solution of problems for bodies with pseudo-elastic-plastic materials are considered. The problems of the thesis research are formulated.

In the second section, a complete system of equations is written down and a method for determining the elastic-plastic nonstationary stress-strain state of three-dimensional bodies with functionally inhomogeneous materials at large deformations is developed. A physical formulation of the problem of conception is made.

To solve the above problem, it is necessary to determine the temperature, three components of the displacement velocity vector, six components of the stress tensor, and six components of the strain tensor. This means that it is necessary to determine sixteen unknown functions of time and three coordinates. For this purpose a complete system of integrodifferential equations with geometric nonlinearity in mind has been formed. It consists of the equation of motion, geometric and physical equations, and the equation of heat conduction, which are satisfied under certain initial and boundary conditions.

Using an approach based on the idea of a component-wise splitting, a new variant of the method of reducing a three-dimensional geometrically nonlinear nonstationary problem of thermoelastic-plasticity to a sequentially solvable system of three one-dimensional problems is proposed.

**Key words:** functionally inhomogeneous material, shape memory, large deformations, nonlinear phenomenological model, pseudo-plasticity theory, two-dimensional splines.