МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

ЄВДОКИМОВ ДМИТРО ВАСИЛЬОВИЧ

УДК 532.5

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ЗАДАЧ ГІДРОДИНАМІКИ І ТЕПЛОМАСООБМІНУ ПРИ МАЛИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

01.02.05 - механіка рідини, газу та плазми

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Дніпро – 2021

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара.

Науковий керівник: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Поляков Микола Вікторович,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, ректор

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Блюсс Борис Олександрович,
Придніпровський науковий центр НАН України,
директор

доктор технічних наук, професор,
Сохацький Анатолій Валентинович,
Університет митної справи та фінансів Міністерства освіти і науки України,
завідувач кафедри транспортних технологій та міжнародної логістики

Захист відбудеться «30» червня 2021 р. о 13:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10 при Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за адресою: м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 35, корпус 3, ауд. 25.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці ім. Олеся Гончара Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара за адресою: 49010, м. Дніпро, вул. Казакова, 8.

Відгуки на автореферат просимо надсилати за адресою: 49010, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, вченому секретарю спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10

dreus@mmf.dnu.edu.ua

Автореферат розіслано «25» травня 2021 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої
ради, доктор технічних наук, доцент **А. Ю. Дреус**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Загальна тенденція мініатюризації у більшості областей сучасних техніки та технологій передбачає, що течії рідини у таких технічних пристроях та технологічних схемах відбуваються у все менших геометричних масштабах, тобто при менших числах Рейнольдса. Більш того, за останні десятиліття мало місце бурхливе зростання мікроелектроніки, мікробіології (біотехнологій) та мікромеханіки, де більшість течій рідини та газу відбувається при асимптотично малих числах Рейнольдса. У багатофазних середовищах традиційно використовуються течії при малих числах Рейнольдса для аналізу процесів на рівні відокремлених частинок дисперсної фази, тобто хімічна промисловість, медична промисловість, промисловість будівельних матеріалів, гірничозбагачувальні процеси у гірничій промисловості, теплова енергетика, захист рослин у аграрному виробництві, а також гідрометеорологічні та екологічні дослідження мають справу з такими течіями. Важливість для науки та промисловості перелічених процесів визначає актуальність дослідження течій при малих числах Рейнольдса та тепломасообміну у таких течіях, котрі отримали узагальнююче найменування мікрогідродинаміки, а отже є першим фактором актуальності даної роботи. Іншим напрямком досліджень даної роботи стали течії в'язкої рідини при малих числах Рейнольдса та процеси тепломасообміну у таких течіях в умовах мікрогравітації, тобто на борту орбітальних станцій та інших космічних апаратів у інерційному польоті. При протіканні процесів в умовах мікрогравітації суттєвого впливу на них завдають ефекти, які нехтовно малі у звичайних наземних умовах, це ефект Марангоні, слабка вільна конвекція, а при наявності у рідині другої фази ще й гідродинамічні ефекти фазових переходів (стефановські течії), повільні процеси флотації чи седиментації, термофорез та дифузіофорез, сили гідродинамічної взаємодії, до того ж мають місце ефекти Соре та Дюфора (термодифузія) і зв'язана дифузія. Оскільки процеси, що досліджуються, визначають прогрес космонавтики та засвоєння космічного простору в цілому, вкрай висока актуальність їх дослідження не може викликати жодного сумніву. Третім напрямком досліджень даної роботи був розвиток методів обчислювальної теорії потенціалу, у першу чергу, методу граничних елементів та лагранжевих методів аналізу багатофазних течій. Методи обчислювальної теорії потенціалу мають низку переваг у порівнянні з іншими методами розрахунку але й певні недоліки. Пошук областей ефективного застосування, розробка відповідних алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу та створення на їх основі надійних, високоефективних розрахункових схем, безумовно, є актуальним як з точки зору обчислювальної математики, так й для предметної області, для якої визначена ефективність розглянутого підходу.

Одним із найважливіших процесів тепломасообміну є різноманітні фазові переходи, зокрема повільні фазові переходи, до яких у роботі застосовано асимптотичне розкладання за малим числом Стефана та метод граничних елементів. Показано, що повільні фазові переходи рідина - газ (пара) відбуваються на поверхні, яка прагне до сферичної форми. Для всіх розглянутих задач про повільні фазові переходи течія Стефана, що виникає внаслідок стрибка густини при фазовому переході, є течією Стокса. Це новий факт, принципово важливий для дослідження процесів тепломасообміну з фазовими переходами.

Отже, створення теоретичних засад інженерного розрахунку гідродинамічних та тепломасообміних процесів при малих числах Рейнольдса, зокрема, у багатофазних середовищах, у задачах мікрогідродинаміки та в умовах мікрогравітації, є актуальним науковим завданням, що має важливе значення для теорії і практики механіки рідни та газу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Автор представленої дисертаційної роботи був відповідальним виконавцем наступних науково-дослідних робіт, що виконувалися в науково-дослідній лабораторії моделювання процесів механіки рідини і газу та тепломасообміну механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара: № 1-256-12 «Математичні моделі та чисельні методи теорії потенціалу та задачі оптимізації механічних і тепломасообмінних процесів в гетерогенних середовищах» (ДР № 0112U000186, 2012 - 2014 рр.); № 1-302-15 «Математичні моделі, методи розрахунку та експериментальні дослідження багатомасштабних механічних та тепломасообмінних процесів у гетерогенних середовищах» (ДР № 0115U002394, 2015 - 2017 рр.); № 1-327-17 «Розробка нового покоління високоефективних методів розрахунку гідродинамічних та тепломасообмінних процесів у ємкостях ракетно-космічної техніки» (ДР № 0117U001209, 2017 - 2019 рр.); № 390-05 «Фізичне та математичне моделювання кризи кипіння» (ДР № 01063U000817, 2005 - 2005 рр., Договір № М / 228-2005 за програмою спільних дій в галузі науково-технічного співробітництва між Україною та Францією («Дніпро»).

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційного дослідження полягає в розробці нових та удосконаленні існуючих математичних моделей теорії потенціалу для широкого спектра прикладних задач гідродинаміки і тепломасообміну при малих числах Рейнольдса і розробка на їх основі ефективних алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу. Для досягнення сформульованих вище цілей дослідження слід розв’язати такі задачі:

- розробка нових та вдосконалення існуючих алгоритмів теорії потенціалу, що забезпечують ефективне чисельне розв’язання розглянутих в роботі класів задач;
- застосування асимптотичних підходів в обчислювальній теорії потенціалу;
- застосування асимптотичних підходів для побудови математичних моделей течій та процесів тепломасообміну при малих числах Рейнольдса, Пеклє, Стефана;
- розробка математичних моделей і ефективних методів розрахунку повільних фазових переходів і гідродинамічних ефектів фазових переходів (течій Стефана);
- розробка нових формулювань граничних інтегральних рівнянь і алгоритмів методу граничних елементів для розв'язання системи рівнянь Стокса;
- чисельне дослідження течій Стокса в областях складної форми, а також руху ансамблів об'єктів в стоксовському режимі, вдосконалення і узагальнення методу М. Смолуховського та застосування запропонованого підходу для розрахунку еволюції багатофазних середовищ у технологіях хімічної та гірничої промисловості, гідрометеорології;
- розробка математичних моделей та методів чисельного дослідження теплообміну у тонких шарах, та застосування отриманих результатів у задачах теплового захисту;

- розробка математичних моделей та методів чисельного дослідження процесів слабкої вільної конвекції, термофорезу та діфузіофорезу, термодифузії та пов'язаної дифузії, флотації, седиментації тощо;
- розробка математичних моделей і методів чисельного дослідження процесів течії в'язкої рідини і тепломасообміну в умовах мікрогравітації та застосування запропонованих підходів для аналізу процесів тепломасообміну у паливному баку космічного апарату під час довготривалого інерційного польоту.

Об'єктом дослідження є течії в'язкої рідини та процеси тепломасообміну при малих числах Рейнольдса та Пеклє.

Предметом дослідження є асимптотичні та інтегральні математичні моделі теорії потенціалу, що описують течії в'язкої рідини та процеси тепломасообміну при малих числах Рейнольдса та Пеклє, а також відповідні чисельні методи теорії потенціалу, що застосовуються для розрахунку зазначених процесів й течій.

Методи дослідження: асимптотичні методи дослідження крайових задач при малих значеннях визначальних параметрів, побудова інтегральних математичних моделей методами теорії потенціалу, чисельні методи обчислювальної теорії потенціалу.

Наукова новизна результатів полягає в наступному:

1. На підставі вперше отриманих в роботі граничних інтегральних рівнянь з точкою колокації всередині області розв’язку розроблено нове сімейство регулярних алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу, в рамках того ж підходу запропоновано новий прямий регулярний метод дискретних особливостей.

2. На основі асимптотичного аналізу граничних інтегральних рівнянь розроблено нове сімейство асимптотичних алгоритмів методу граничних елементів.

3. Розроблено нову асимптотичну математичну модель повільних фазових переходів з урахуванням гідродинамічного ефекту повільного фазового переходу та застосовано методи обчислювальної теорії потенціалу для розрахунків в рамках запропонованої моделі. Вперше запропоновано математичну модель гомотетічного зростання тіл при повільних фазових переходах.

4. У роботі отримала подальший розвиток методика тестування алгоритмів й програмного забезпечення обчислювальної теорії потенціалу.

5. Побудовано нові фундаментальні розв’язки та нові граничні інтегральні формулювання для системи рівнянь Стокса і деяких її узагальнень.

6. Одержали подальший розвиток дослідження процесів гідродинамічної взаємодії в течіях Стокса. Вдосконалено та узагальнено метод М. Смолуховського, який було застосовано до аналізу багатофазних систем у технологіях хімічної та гірничої промисловості, гідрометеорології. У рамках обчислювальної теорії потенціалу вперше побудована лагранжева математична модель тепломасообміну в багатофазному середовищі в умовах мікрогравітації при малих числах Рейнольдса та Пеклє з урахуванням явищ термофорезу, діфузіофорезу, седиментації та флотації.

7. Вперше побудований граничноінтегральний аналог системи рівнянь Онзагера та на його основі виконано чисельне моделювання процесів тепломасообміну з урахуванням явищ термодифузії та пов'язаної дифузії.

9. Вперше побудована асимптотична математична модель слабкої вільної конвекції та на її основі інтегральна модель цього явища.

10. Завдяки застосуванню розроблених асимптотичних та інтегральних математичних моделей й методів обчислювальної теорії потенціалу були вдосконалені математичні моделі і чисельні методи розрахунку гідродинамічних і тепломасообмінних явищ в умовах мікрогравітації. Запропоновані моделі та методи були застосовані для розрахунку процесів тепломасообміну у паливному баку космічного апарату у довготривалому інерційному польоті.

Достовірність і обґрунтування отриманих в дисертаційній роботі результатів забезпечується: використанням класичних, загальновизнаних математичних моделей гідродинаміки в'язкої рідини та теорії тепломасообміну; використанням суворих математичних перетворень; ретельним тестуванням запропонованих алгоритмів за спеціальними методиками; порівнянням отриманих результатів розрахунків з відомими аналітичними та чисельними результатами інших авторів.

Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості застосування побудованих математичних моделей, запропонованих чисельних методів та розробленого програмного забезпечення в якості інструментарію наукових досліджень для наступних областей науки та техніки:

- в дослідженнях космічного простору для аналізу процесів тепломасообміну з фазовими переходами, для аналізу течій рідини і процесів тепломасообміну в паливних баках космічних апаратів в умовах довготривалого інерційного польоту;
- в екології, гідрометеорології, хімічних та гірничозбагачувальних технологіях для розрахунку малих рухів частинок дисперсної фази, зважених в повітряному або водному середовищі з урахуванням фазових переходів та інших процесів тепломасообміну в околі частинок дисперсної фази.

Результати дисертаційної роботи були впроваджені в навчальний процес Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Результати роботи знайшли своє відображення впри підготовці лабораторного практикуму з курсу «Методи дослідження процесів тепломасообміну».

Результати дисертаційної роботи було впроваджено у науково-технічну діяльність Інституту геотехнічної механіки імені М. С. Полякова Національної академії наук України.

Результати передані до ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля» для використання під час виконання робіт з розробки перспективних ракет-носіїв та космічних літальних апаратів.

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні результати дослідження опубліковано в 39 наукових роботах, з них 7 статті [1 – 7] у фахових виданнях України, 4 публікації, що входять до наукометричних баз даних [8 – 11] (SCOPUS, WoS) ([11] є глава у зарубіжній монографії), 3 статті [2, 3, 7] проіндексовано у наукометричній базі даних «Index Copernicus», 1 колективна монографія в Україні [12], 26 інших публікацій та праць в матеріалах наукових конференцій і збірниках тез доповідей, що підтверджують апробацію роботи та науковий пріоритет автора [13 – 38], 1 навчальний посібник [39].

Наукові роботи [2, 8, 14, 15, 32, 34, 37, 38] опубліковані автором особисто, без співавторів. Наукові роботи [17, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 31, 33] виконані у співавторстві з науковим керівником професором М. В. Поляковим, у цих роботах науковий керівник приймав участь у постановці задачі та аналізі отриманих результатів, автор теж приймав участь у постановці задачі та аналізі отриманих результатів та, окрім того, виконував розробку алгоритму та підготовку програмного забезпечення, інші співавтори, якщо вони були, також приймали участь у програмуванні та проводили розрахунки. Роботи [22, 23, 28] носять оглядовий характер, в них всі співавтори приймали рівну участь. Автор приймав участь при підготовці всіх розділів монографії [12] та всіх лабораторних робіт, що увійшли у лабораторний практикум [39]. У решті наукових робіт особисто автору належать постановки задач та розробки алгоритмів, а підготовка програмного забезпечення, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів проводилися разом зі співавторами.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень, що включені в дисертацію, доповідалися і обговорювалися на наступних конференціях, симпозіумах і семінарах: Міжнародних симпозіумах «Метод дискретних особливостей в задачах аеродинаміки, електродинаміки та теорії дифракції» (1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019); Симпозіумі IUTAM «Нелінійні сингулярності в деформаціях і течіях» (Хайфа, Ізраїль, 1997); Щорічних наукових зборах Товариства механіки і прикладної математики (GAMM) (1998, Бремен, 2000, Геттінген, 2004, Дрезден, 2006, Берлін); Симпозіумі «Сучасні математичні та обчислювальні аспекти методу граничних елементів» (Краків, Польща, 1999); Симпозіумі міжнародної асоціації методу граничних елементів IABEM (2014, Китай); Щорічній міжнародній конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпродзержинськ - Дніпропетровськ, 2003 – 2020); Міжнародному конгресі з теоретичної та прикладної механіки ICTAM2004 (Варшава, Польща, 2004); Міжнародній конференції «Неперервні моделі і дискретні системи» (Шореш, Ізраїль, 2003); Міжнародних наукових конференціях «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасообміну» (Дніпропетровськ, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016 року); Міжнародних науково-технічних конференціях пам'яті академіка В.І. Массаковского «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпропетровськ, 2007, 2019); Міжнародній конференції «Нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних» (Дніпропетровськ, 2010); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та чисельних методів» (Рівне, Україна, 2015, 2018); підсумкових наукових конференціях Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара (1986 - 2019 рр.); наукових семінарах кафедри прикладної газової динаміки та тепломасообміну, кафедри диференціальних рівнянь та кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. В повному обсязі дисертаційна робота обговорювалася на об'єднаному семінарі Проблемної науково-дослідної лабораторії міцності і надійності конструкцій та кафедри аерогідромеханіки і енергомасопереносу механіко-математичного факультету Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Структура та об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається із анотацій, вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел, 7 додатків. Загальний обсяг роботи становить 298 сторінок. Основна частина викладена на 168 сторінках, містить 14 рисунків, 5 таблиць, список використаних джерел з 415 найменувань на 40 сторінках. Додатки займають 130 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дисертаційної роботи коротко описана загальна ситуація у області науки та техніки, до якої відноситься дослідження, обґрунтована актуальність теми дослідження, представлений зв'язок з науковими програмами, планами і темами, сформульовані мета та завдання роботи, перелічені методи дослідження, наведені наукова новизна та практичне значення результатів, обґрунтована достовірність отриманих результатів, представлено інформацію про апробацію результатів, публікації та особистий внесок здобувача, а також описано структуру та обсяг дисертації.

У першому розділі «Історія досліджень течій рідини при малих числах Рейнольдса та аналіз сучасного стану питання» виконано огляд публікацій з релевантних питань, Зазначено, що протягом тривалого часу дослідження таких течій пов’язувалося, в основному, з задачами зовнішнього обтікання, що пояснювалося потребами хімічних технологій, сільського господарства, гірничозбагачувального виробництва, деяких інших галузей індустрії. Лише у 80-ті роки минулого сторіччя з появою мікробіології, мікроелектроніки, а згодом й мікромеханіки виник прикладний інтерес до внутрішніх течій при малих числах Рейнольдса. У першому розділі виказана та обґрунтована думка про необхідність роздільного вивчення зазначених внутрішніх та зовнішніх течій за допомогою різного обчислювального інструментарію.

Другий огляд, що включено до першого розділу роботи, присвячений течіям в’язкої рідини та процесам тепломасообміну в умовах мікрогравітації, тобто у слабких полях масових сил. Незважаючи на очевидну малу швидкість слабкої вільної конвекції чи течії у багатофазному середовищі у слабкому полі масових сил, ці течії, як правило, не розглядають як течії Стокса. Причиною такого дивного становища представляється невдале обезрозмірювання у задачах вільної конвекції. Подолання цього недоліку має відкрити нові можливості у чисельному моделюванні процесів в умовах мікрогравітіції. Нарешті, в мікрогідродинаміці фактичним «корпоративним стандартом» стало застосування методів обчислювальної теорії потенціалу, щодо процесів в умовах мікрогравітації нічого подібного не відбувалося, та робота, що пропонується, є фактично першою спробою такого систематичного застосування.

У другому розділі «Нові алгоритми обчислювальної теорії потенціалу» описані основні наявні алгоритми методу граничних елементів щодо крайових задач для рівняння Лапласа, теплопровідності, бігармонійного рівняння, рівнянь Стокса. Також описані регулярні алгоритми обчислювальної теорії потенціалу з точкою коллокації всередині області розв‘язку та асимптотичний алгоритм методу граничних елементів, які запропоновані особисто автором та увійшли до наукової новизни роботи. Особлива увага приділена питанням точності чисельного розрахунку, зокрема непрямим методам контроля точності, частина з яких вперше запропонована автором. Ці питання розглянуті у Додатку 1.

Перший підрозділ другого розділу містить загальну характеристику методу граничних елементів, а також пов‘язаних з ним алгоритмів, та обґрунтований висновок про обмежений характер областей ефективного застосування цього методу. Однак стверджується, що у задачах, де таке ефективне застосування можливо, методи обчислювальної теорії потенціалу забезпечують значні переваги по точності та суттєві по ефективності у порівнянні з конкуруючими методами розрахунку. У тому ж підрозділі наведено описи алгоритмів, що були реалізовані у авторському комплексі програм, але не увійшли до наукової новизни роботи, що пропонується.

Другий підрозділ того ж розділу присвячено регулярним алгоритмам методу граничних елементів. Розглянемо регулярні граничні рівняння з точками коллокації всередині області. Розгляд запропонованих підходів проведемо на прикладі інтегрального аналога плоского рівняння Лапласа в деякій області D, обмеженій ляпуновською кривою Γ

$$\Delta u = 0\,, \tag{1}$$

де u – шукана функція. Крайові умови або Діріхлє $u|_{\Gamma_D} = f_D$, (2)

або Неймана:
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_N} = f_N\,. \tag{3}$$

Гранично-інтегральний аналог рівняння (1) має вигляд:

$$C(X_0)u(X_0) = \int_\Gamma \varphi(X,X_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds(X) - \int_\Gamma u(X)\frac{\partial\varphi(X,X_0)}{\partial n}ds(X)\,, \tag{4}$$

де X – точка джерела; X_0 – точка спостереження; φ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в плоскому випадку:

$$\varphi(X,X_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\,, \tag{5}$$

Решта позначень розуміється у традиційному сенсі. Візьмемо на межі Γ деяку контрольну точку X_0' (у даному алгоритмі контрольна точка не збігається із точкою коллокації $X_0' \neq X_0$), та виберемо точку колокації X_0 на перпендикулярі до межі Γ в точці X_0' на відстані η. У точці X_0 інтегральне співвідношення (4) може бути скільки завгодно разів продиференційовано по координатах точки X_0 як по параметрах. Тоді уздовж осі n шукана функція u може бути розкладена в ряд Тейлора в околі точки X_0 по координаті ξ, що відлічувана від точки X_0 у напрямку до точки X_0'. Очевидно, що при $\xi = \eta$ маємо значення функції u в точці X_0':

$$u(X_0') = u(X_0) - \eta\frac{\partial u}{\partial n}(X_0) + \frac{\eta^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X_0) + \ldots + (-1)^k\frac{\eta^k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial n^k}(X_0) + \ldots\,. \tag{6}$$

Зневажаючи у ряді (6) членами до другого порядку малості включно, отримаємо наступне наближене співвідношення:

$$u(X_0) \approx u(X_0') + \eta\frac{\partial u}{\partial n}(X_0')\,, \tag{7}$$

яке й підставимо в інтегральне співвідношення (4)

$$u(X_0') + \eta\frac{\partial u}{\partial n}(X_0') = \int_\Gamma \varphi(X,X_0)\frac{\partial u}{\partial n}(X_0')ds(X) - \int_\Gamma u(X)\frac{\partial\varphi(X,X_0')}{\partial n}ds(X). \tag{8}$$

Отримане співвідношення (8) є наближеним регулярним граничним інтегральним рівнянням із точкою колокації, розташованою всередині області розв'язку. Структура лівої частини рівняння (8) забезпечує шукану властивість – при будь-яких крайових умовах інтегральне рівняння (8) є інтегральним рівнянням другого роду. Застосування до рівняння

(8) методу граничних елементів може бути проведено у відповідності до стандартного підходу чи с певними модифікаціями

$$u(X'_0)+\eta\frac{\partial u}{\partial n}(X'_0)=\sum_{k=1}^{M}\int_{\Gamma_k}\varphi(X,X_0)\frac{\partial u}{\partial n}(X'_0)h_k(s(X))ds-$$
$$-\int_{\Gamma_k}u(X)\frac{\partial\varphi(X,X'_0)}{\partial n}h_k(s(X))ds, \tag{9}$$

де M – кількість граничних елементів; $h_k(s(X))$ – функція, що відображає форму k-го граничного елементу, взагалі кажучи, апроксимовано, але для регулярного випадку, до якого належить (8), дана функція може бути вибрана такою, що співпадає з аналогічною функцією неапроксимованої межі області розв‘язку; такий метод отримав назву метода граничних елементів з інтегруванням по реальній (неапроксимованій) межі. Цей прийом значно підвищує точність розрахунку особливо для точок поблизу межі області розв‘язку.

Наведений вище підхід легко поширюється й на інший чисельний метод обчислювальної теорії потенціалу – метод дискретних особливостей:

$$u(X'_{0i})+\eta_i\frac{\partial u}{\partial n}(X'_{0i})=\sum_{k=1}^{M}\varphi(X'_{0k},X_{0i})W_2(X'_{0k})-\sum_{k=1}^{M}\frac{\partial\varphi(X'_{0k},X_{0i})}{\partial n}W_1(X'_{0k}), \tag{10}$$

де $W_2(X'_{0k})\approx\frac{\partial u}{\partial n}(X'_{0k})\,S_k$, $W_1(X'_{0k})\approx u(X'_{0k})\,S_k$ – інтенсивності дискретних особливостей, тобто сумарні по граничному елементу інтенсивності шуканої функції або її нормальної похідної; тут S_k – довжина k-го граничного елемента. Рівняння (10) представляє собою принципово новий прямий, завжди регулярний метод дискретних особливостей, який точніший за традиційні і має більші можливості, наприклад, у випадку змішаних крайових умов.

Питання тестування та опис відповідних методик віднесені до Додатку 1. В Таблиці 1 наведено аналіз точності чисельного розв‘язку для тестової задачі Діріхлє для функції $u_1(x,y)=(x+y)/2$ у колі одиничного радіуса із центром у початку координат сингулярним методом граничних елементів (№ 1), запропонованим алгоритмом методу граничних елементів (№ 2) і запропонованим прямим методом дискретних особливостей (№ 3).

Таблиця 1 – Похибка чисельного розв'язку задачі Діріхлє для функції $u_1(x,y)=(x+y)/2$

Кількість граничних елементів	Похибка методу №1 максимальна/ середньо-квадратична	Похибка методу №2 максимальна/ середньо-квадратична	Похибка методу №3 максимальна/ середньо-квадратична
50	.852108E-03 .310123E-05	.325322E-03 .107606E-05	.317632E-01 .904395E-04
100	.208497E-03 .778348E-06	.460147E-04 .168899E-06	.271041E-01 .101137E-03
200	.523328E-04 .194279E-06	.846386E-05 .291107E-07	.285408E-01 .106590E-03
400	.138282E-04 .481405E-07	.309944E-05 .596552E-08	.292825E-01 .109357E-03

Аналогічні алгоритми були розроблені для розв'язання параболічних крайових задач, для яких вдалося розробити аналог «явної схеми», тобто виключити з алгоритму формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв‘язання. Запропоновані регулярні алгоритми ґрунтуються на регулярних граничних інтегральних рівняннях другого роду, які є коректними за Фредгольмом, тобто переважають звичайні алгоритми з точки зору надійності. Окрім наведених вище випадків, регулярні алгоритми були застосовані до крайових задач для бігармонічного рівняння та рівнянь Стокса. Тестування підтвердило приблизно ті ж самі тенденції, однак за дещо нижчої точності.

Наступний підрозділ присвячено розвитку асимптотичних алгоритмів методу граничних елементів. Нехай у параметри, що визначають крайову задачу внесені збурення $\varepsilon f(X)$, де ε – мала величина, $f \sim 1$ – деяка функція від координат X. Тоді будемо відшукувати розв‘язок крайової задачі у вигляді наступного ряду

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \; . \tag{11}$$

Ідея полягає в тому, щоб визначити u_i за допомогою методу граничних елементів Нехай задані незбурене (12) та збурене (12) граничні інтегральні рівняння

$$\begin{aligned} c(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \int_\Gamma \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x,y) - \\ - \int_\Gamma u(x,y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x,y), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} c(x_0, y_0)u^*(x_0, y_0) = \int_\gamma \frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n^*} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds^*(x,y) - \\ - \int_\gamma u^*(x,y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n^*} ds^*(x,y). \end{aligned} \tag{13}$$

Представимо функцію форми збуреної межі у вигляді наступного розкладання в ряд

$$h^*(t) = h^{*0}(t) + \varepsilon h^{*1}(t) + \varepsilon^2 h^{*2}(t) + \cdots + \varepsilon^k h^{*k}(t) + \cdots, \tag{14}$$

де t – внутрішній параметр кривої. Збурені крайові умови

$$u^*(t) = u^{*0}(t) + \varepsilon u^{*1}(t) + \varepsilon^2 u^{*2}(t) + \cdots + \varepsilon^k u^{*k}(t) + \cdots, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial n} = \frac{\partial u^{*0}(t)}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial u^{*1}(t)}{\partial n} + \varepsilon^2 \frac{\partial u^{*2}(t)}{\partial n} + \cdots + \varepsilon^k \frac{\partial u^{*k}(t)}{\partial n} + \cdots. \tag{16}$$

Після підстановки представлень (14) - (16) у рівняння (13) одержимо послідовність

$$\begin{aligned} c(x_0, y_0)u^{*0}(x_0, y_0) = \int_\Gamma \frac{\partial u^{*0}(x,y)}{\partial n} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) h^{*0}(x,y) ds(x,y) - \\ - \int_\Gamma u^{*0}(x,y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} h^{*0}(x,y) ds(x,y). \end{aligned} \tag{17}$$

Інтегрування в рівнянні (17) виконується уздовж незбуреної межі Γ, оскільки h^{*0} збігається з функцією форми незбуреної межі. Наступні наближення:

$$c(x_0,y_0)u^{*m}(x_0,y_0)=$$

$$=\int_\gamma\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial u^{*k}(x,y)}{\partial n}h^{*m-k}(x,y)\right)\varphi_0(x,x_0,y,y_0)ds(x,y)- \tag{18}$$

$$-\int_\gamma\left(\sum_{k=0}^{m}(u^{*k}(x,y)h^{*m-k}(x,y)\right)\frac{\partial\varphi_0(x,x_0,y,y_0)}{\partial n}ds(x,y).$$

Таким чином, послідовність задач (17), (18)… дає змогу розраховувати малі збурення межі області розрахунку та крайових умов будь-якого порядку малості, якщо, навіть, вони локалізовані на частині межі, менший за граничний елемент. Якщо зазначені вище малі збурення зв‘язати з граничними елементами, а параметр ε трактувати як співвідношення геометричного масштабу граничного елементу до геометричного масштабу області розрахунку, то запропонований вище підхід забезпечує реалізацію нового адаптивного методу граничних елементів, названого а-адаптивним методом.

У третьому розділі «Задачі мікрогідродинаміки та течії Стокса» описані рівняння Стокса як математичні моделі повільної течії в‘язкої рідини з точки зору асимптотичного аналізу рівнянь Нав‘є-Стокса та основні алгоритмів теорії потенціалу щодо відповідних задач. Також описані багатофазні течії Стокса.

Нехай число Рейнольдса є достатньо малим, тоді розглянемо розкладання Уайтхеда:

$$\vec V=\vec V^0+\mathrm{Re}\,\vec V^1+\mathrm{Re}^2\,\vec V^2+..., \tag{19}$$

аналогічне розкладання можна запропонувати й для тиску p. Підставимо розкладання (19) у систему рівнянь Нав‘є-Стокса для нестисливої рідини:

$$\frac{\partial\vec V}{\partial\tau}+(\vec V\nabla)\vec V=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\vec F+\nu\Delta\vec V,\quad \mathrm{div}\,\vec V=0, \tag{20}$$

з крайовими умовами прилипання та початковими умовами $\vec V\big|_\Gamma=\vec V_e,\quad \vec V(\tau=0)=\vec V_0$.

Тут всі позначення розуміються в традиційному сенсі. Отримаємо

$$\mathrm{grad}\,p^1=\mu\Delta\vec V^1+\vec F,\ \mathrm{div}\,\vec V^1=0,\quad \vec V^1\Big|_\Gamma=\vec V_e,\ldots\ldots \tag{21}$$

$$\mathrm{grad}\,p^i=\mu\Delta\vec V^i+\vec\Phi,\ \mathrm{div}\,\vec V^i=0,\quad \vec V^i\Big|_\Gamma=0,\ldots\ldots. \tag{22}$$

де векторна функція $\vec\Phi$ відбиває вклад доданків, не врахованих у попередніх наближеннях. Перша задача (21) є класичним наближенням Стокса, а вся послідовність визначає розкладання Уайтхеда й при обмежених областях розв‘язання та малих числах Рейнольдса має збігатися до точного розв‘язку. На жаль, для задач про зовнішнє обтікання, тобто у необмежених областях, розкладання Уайтхеда розходиться. Цей факт отримав назву парадоксу Уайтхеда.

Розглянемо випадок, коли в системі є ще й перенос деякої субстанції, тоді рівняння переносу, наприклад, для температури T (у безрозмірному вигляді):

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}+(\vec V\nabla)T=\frac{1}{Pe}\Delta T, \tag{23}$$

де число Пеклє $Pe=\dfrac{UL}{a}=RePr$. Звідки очевидно, що при обмеженому числі Прандтля з умови $Re<<1$ слідує $Pe<<1$, тобто рівняння (23) можна розкласти в ряд

$$T=T^0+PeT^1+Pe^2T^2+..., \quad (24)$$

і далі за процедурою методу малого параметру отримаємо наближення Уайтхеда

$$\Delta T^0=0, \quad \frac{\partial T^1}{\partial \tau}+(\vec{V}^1\nabla)T^0=\Delta T^1, \ldots\ldots \quad (25)$$

У наступному підрозділі були розглянуті локалізовані впливи на суцільне середовище при малих числах Рейнольдса, для чого були розглянуті альтернативні формулювання систем рівнянь Стокса та побудовані матриці фундаментальних розв'язків для них. Був обраний метод формального оберненого оператора – метод Хьормандера. Розглянемо систему рівнянь Стокса у плоскому випадку:

$$\begin{cases} \mu\Delta u=\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu\Delta v=\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0. \end{cases} \quad (26)$$

Відповідна матриця фундаментальних розв'язків має вигляд:

$$U_{11}=\frac{1}{8\pi\mu}\left(\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)+\frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-1\right),$$

$$U_{12}=U_{21}=-\frac{1}{4\pi\mu}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad (27)$$

$$U_{13}=U_{31}=\frac{1}{2\pi}\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

$$U_{22}=\frac{1}{8\pi\mu}\left(\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)+\frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-1\right),$$

$$U_{23}=U_{32}=\frac{1}{2\pi}\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

$$U_{33}=\mu\delta.$$

Аналогічним шляхом було отримано матриці фундаментальних розв'язків для плоских рівнянь Стокса, сформульованих у змінних швидкість-тиск (з рівнянням Лапласу для тиску) та швидкість-завихренність, а також їх просторових аналогів. Крім того аналогічні матриці фундаментальних розв'язків було отримано для нестаціонарних аналогів зазначених задач з урахуванням сили Попова-Ері-Релея. Ці результати було винесено у Додаток 2.

Однією з найбільш цікавих та стимулюючих дослідження проблем гідромеханіки при малих числах Рейнольдса є багатофазна течія у стоксовському режимі, що стало темою наступного підрозділу. Об'єкти дисперсної фази у багатофазних потоках практично завжди рухаються у стоксовському режимі, але зазначена задача передбачає, що в такому ж режимі рухається основна суцільна фаза. В таких задачах доводиться віддати перевагу лагранжевим (об'єктно-траєкторним) методам. Історично склалося, що лагранжевий підхід до багатофазної течії Стокса називається методом М. Смолуховського.

Якщо кожний з об'єктів має відносну швидкість $V_i(x_i, y_i, z_i)$ і абсолютну швидкість $V_i^a(x_i, y_i, z_i)$, що дорівнює $V_i^a = U + V_i$, де U – повна швидкість потоку в точці (x_i, y_i, z_i); то й рух об'єкту описується наступними рівняннями руху матеріальної точки

$$\frac{dx_i}{d\tau} = V_{ix}^a, \ _i\frac{dy_i}{d\tau} = V_{iy}^a, \ \frac{dz_i}{d\tau} = V_{iz}^a, \tag{28}$$

$$m_i \frac{dV_{ix}^a}{d\tau} = F_{ix}, \ m_i \frac{dV_{iy}^a}{d\tau} = F_{iy}, \ m_i \frac{dV_{iz}^a}{d\tau} = F_{iz}, \tag{29}$$

де F_i – сила, що діє на i-у частинку; m_i – її маса. Нехай $F_i = F_{mi} + F_{Di}$, де F_{mi} – як правило, задана масова сила; F_{Di} – сила гідродинамічного опору об'єкта, що, як відомо, для течії Стокса пропорційна відносній швидкості. Відповідно до методу М. Смолуховського апроксимуємо вплив об'єкта на потік аналітичним виразом для його обтікання необмеженим потоком $V_i(x, y, z)$. Тоді в першому наближенні використовуємо $U^0(x_i, y_i, z_i, \tau)$ – швидкість незбуреного потоку – у $V_i^a = U + V_i$, та одержимо відносну швидкість кожного об'єкта. Для i-го об'єкту $N-1$ об'єктів, що залишилися, у точці (x_i, y_i, z_i) індукують збурення швидкості

$$\delta U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} V_j(x_i, y_i, z_i), \tag{30}$$

яке, будучи підставлене знову в $V_i^a = U + V_i$, дасть нове значення відносної швидкості. Нехай збільшення відносної швидкості δV_i визначено для кожного об'єкта, за аналогією з (30)

$$\delta U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \delta V_j(x_i, y_i, z_i). \tag{31}$$

Використовуючи δU_i з (31) за аналогією з попереднім, продовжуємо процес до того моменту, коли δU_i стане досить малим. В загальному випадку задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (28) - (29) було розв'язано схемою Ейлера. Застосування методу граничних елементів разом з методом М. Смолуховського забезпечує можливість аналізу об'єктів дисперсної фази довільної форми, крім того, в даній роботі вперше метод М. Смолуховського було застосовано для розрахунку тепломасообміну в системі. Зазначені переваги дозволили застосувати розроблений алгоритм до низки актуальних задач, що описують технологічні процеси у багатофазних середовищах з подрібненою твердою фазою при збагаченні корисних копалин, у хімічній промисловості та промисловості будівельних матеріалів.

З відповідними режимами обтікання часто пов‘язана течія Пуазейля, тобто ламінарна течія у каналі постійного поперечного перерізу, яка не обов‘язково відбувається при малих числах Рейнольдса, однак у багатьох випадках оказується течією у «макромасштабі», оскільки описує течію в капілярах. Відповідні матеріали включено до Додатку 3.

Четвертий розділ роботи **«Асимптотичні задачі тепломасообміну»** присвячено застосуванню методів обчислювальної теорії потенціалу до таких задач. З тематикою даного дослідження тісно пов‘язані фазові переходи, особливо повільні фазові переходи. Для таких фазових переходів була сформульована задача Стефана, та проведено її асимптотичний аналіз, в результаті якого початкову задачу було зведено до двох послідовностей еліптичних крайових задач та задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, котре описує просування межі фазового переходу. Задача розв‘язувалася покроковим за часом просування міжфазної межі алгоритмом, при чому на кожному кроку за часом методом граничних елементів розв‘язувалася необхідна кількість з послідовностей еліптичних крайових задач. Оскільки задача Стефана не передбачає руху рідинних чи газоподібних фаз, вона розглядалася як допоміжна, та її опис та розгляд були наведені у Додатку 4. Наведемо тут тільки деякі визначення: Безрозмірний час та число Стефана St

$$\tau_{st} = \frac{\tau\lambda_1(T_n - T_{ф.п.})}{L^2\sigma\rho}. \quad St = \frac{\tau_{st}}{Fo_1} = \frac{\dfrac{\tau\lambda_1(T_n - T_{ф.п.})}{L^2\sigma\rho}}{\dfrac{\tau a_1}{L^2}} = \frac{\lambda_1(T_n - T_{ф.п.})}{a_1\sigma\rho} = \frac{C(T_n - T_{ф.п.})}{\sigma}, \quad (32)$$

де всі позначення розуміються у традиційному сенсі. Як правило, $St < 1$, а для повільних фазових переходів $St << 1$.

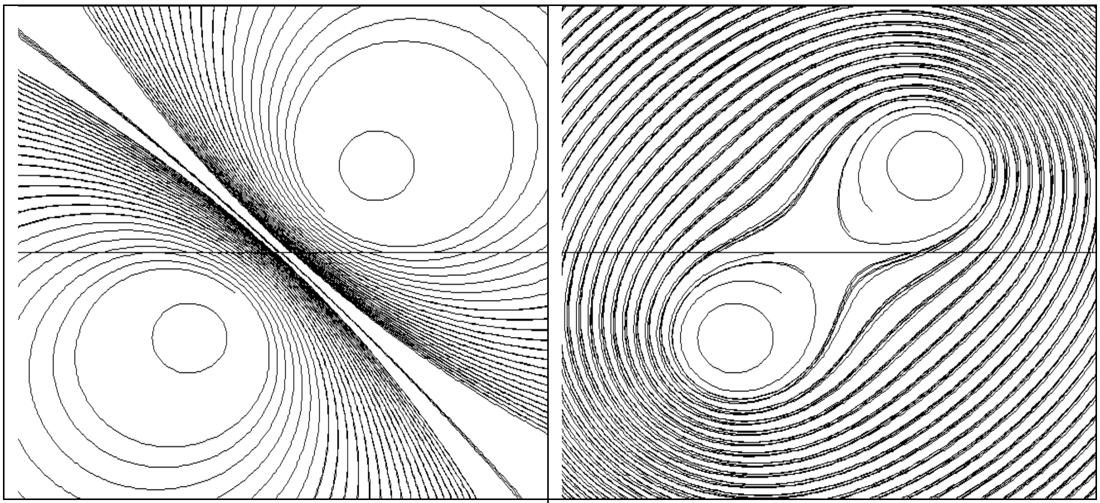
Були також розглянуті особливості задачі Стефана для повільного фазового переходу на поверхні краплі (бульбашки). На поверхні крапель (бульбашок) діють сили поверхневого натягу, в результаті, краплі і бульбашки прагнуть прийняти ідеальну сферичну форму. Такі задачі відносяться до так званих задач гомотетичного зростання, якім притаманна зміна розмірів тіла без зміни його геометричної форми. Детальне викладення цього питання також наведене у Додатку 4 разом з прикладом актуальної для технологій теплоенергетики задачі про зростання парової бульбашки на нагрівачі.

Наступний підрозділ роботи пов‘язаний з урахуванням стрибка густини при повільному фазовому переході, який може викликати рух рідинних або газоподібних фаз Такий рух фаз історично отримав назву стефанівської течії. Обмежимося прикладом одновимірного фазового переходу зі стрибком густини, оскільки ця задача допускає досить просте аналітичне дослідження. Вдалося показати, що число Рейнольдса для такої течії

$$Re = \frac{(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1)\dfrac{\partial\eta}{\partial\tau_{St}}St}{Pr}. \quad (33)$$

Звідкіля очевидно, що малість числа Стефана означає малість числа Рейнольдса, та навпаки. Це означає, що течія Стефана повільного фазового переходу є течією

Стокса (у припущенні $\Pr \sim 1$). Зроблений висновок розповсюджується на випадки двох та трьох вимірювань, за деякими очевидними виключеннями.



а) б)

а) – ізобари; б) – ізотерми

Рис. 1 – Фазовий перехід на поверхні двох крапель

Приклад такого фазового переходу на поверхні двох крапель показано на рисунку 1. Добре помітна симетрія картини, посередині між крапель знаходиться максимум градієнту тиску та мінімум градієнту температури.

Наступний підрозділ роботи було присвячено розробці методів розв‘язання системи рівнянь Онзагера – найбільш загальної математичної моделі термодифузійних процесів. Метод граничних інтегральних рівнянь вперше було застосовано до розв‘язання системи рівнянь Онзагера здобувачем, якому вдалося побудувати фундаментальні розв‘язки для цієї системи. Системою рівнянь Онзагера в загальному вигляді будемо називати наступну систему N параболічних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^{N} \alpha'_{ij} \operatorname{div} q_j, \quad i = \overline{1, N}, \tag{34}$$

де узагальнений потік $q_j = \lambda_j \operatorname{grad} u_j$; α'_{ij} – коефіцієнти Онзагера. Під функціями u_i в (34) маються на увазі відповідні концентрації, температура і, можливо, тиск. Коефіцієнти покладалися постійними, що відповідає досить вузькому діапазону зміни шуканих величин. Початкові та крайові умови для системи рівнянь (34) ставляться традиційним чином. Помноживши систему рівнянь Онзагера на матрицю, утворену з власних векторів матриці Онзагера, отримаємо систему рівнянь теплопровідності, після чого побудова матриці фундаментальних розв‘язків та граничноінтегрального аналога системи рівнянь Онзагера очевидна. Однак у загальних випадках чи у випадках канонічної форми областей слід застосовувати асимптотичний підхід. По фізичному сенсу елементів матриці Онзагера: $\alpha'_{ij} \langle\langle \alpha'_{ii}$, $i \neq j$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$. Зробимо припущення про те, що діагональні елементи матриці Онзагера мають однаковий порядок, та позадіагональні елементи теж мають однаковий, але менший порядок $\frac{\alpha'_{ij}}{\alpha'_{ii}} \sim \varepsilon$, $i \neq j$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$, де ε – мала величина, що буде використовуватися як малий параметр, тобто, $\alpha'_{ij} = \varepsilon \alpha'^{*}_{ij}$, $\alpha'^{*}_{ij} \sim \alpha'_{ii}$. Відповідно до методу малого параметра:

$$u_i = u_i^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_i^k, \; i = \overline{1,N}, \tag{35}$$

де u_i^k – функції, що підлягають визначенню. Щоб проілюструвати запропонований підхід була обрана найпростіша крайова задача для системи рівнянь Онзагера з двох рівнянь в одномірному по просторі середовищі з постійним властивостями. Тобто:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial \tau} = \alpha_{11} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \alpha_{12} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial \tau} = \alpha_{21} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \alpha_{22} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{36}$$

$$u_1(\tau = 0) = C_1 \neq 0, \quad u_2(\tau = 0) = 0, \tag{37}$$

$$u_1(x = x_1) = C_2 \neq C_1, \;\; u_1(x = x_2) = C_2, \quad u_2(x = x_1) = 0, \quad u_2(x = x_2) = 0. \tag{38}$$

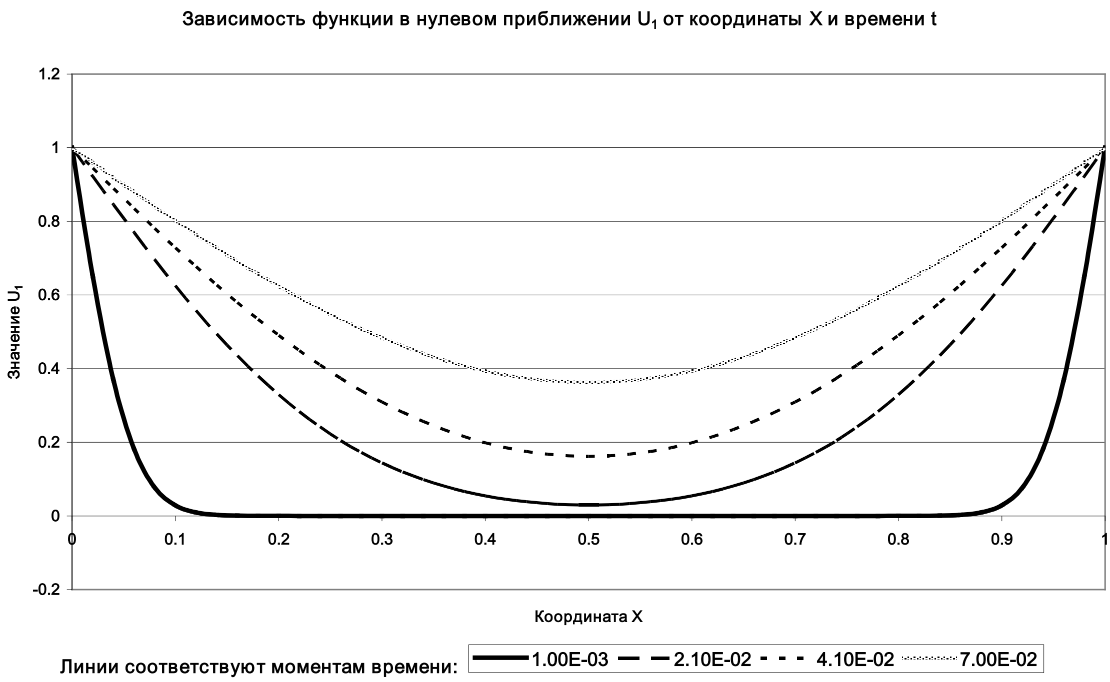


Рис. 2 – Залежність у першому наближенні функції u_1 від координати.

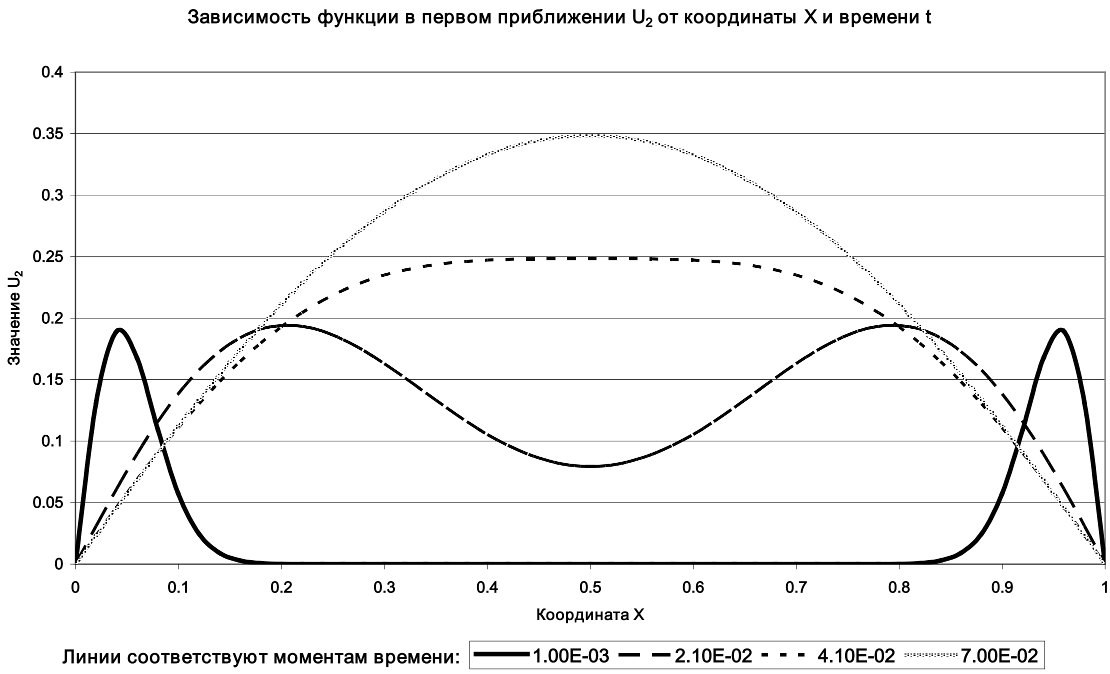


Рис. 3 – Залежність у першому наближенні функції u_2 від координати.

На рисунках 2, 3 приведені результати чисельного розв‘язку задачі (36) - (38) за допомогою запропонованого вище алгоритму. Зміна функції u_1 в залежності від часу відповідає типовому поводженню розв‘язку рівняння теплопровідності. Однак у графіках функції u_2 спостерігаються два максимуми, які рухаються в напрямку до середини розрахункової області та потім зливаються в один. Подібна немонотонність, невластива розв‘язкам лінійних параболічних задач, є специфічною особливістю розв‘язків системи рівнянь Онзагера.

П‘ятий розділ **«Течії в‘язкої рідини та процеси тепломасообміну в умовах мікрогравітації»** розглядає застосування методу граничних елементів до задач, пов‘язаних з процесами на борту космічних апаратів в умовах тривалого інерційного польоту. З даною тематикою тісно пов‘язана задача про сталий розподіл фаз у баку космічного літального апарату, яка стала предметом розгляду у Додатку 5.

Перший підрозділ присвячений математичним моделям слабкої вільної конвекції. Очевидно, що конвективні потоки субстанції (тепла і маси) у цьому випадку істотно менше, дифузійних, з урахуванням зроблених вище припущень і, зневажаючи в нульовому наближенні конвективними членами, одержимо для стаціонарного поля температур:

$$\mu\Delta\vec{V}^0 = \operatorname{grad} p^0 + \gamma\vec{g}(T^0 - T_0), \tag{39}$$

$$\Delta T^0 = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{V}^0 = 0. \tag{40}$$

Крайові умови для системи (39) - (40) ставляться традиційним чином. Слабка вільна конвекція, по визначенню, – це не механізм переносу субстанції, основний перенос субстанції в даному випадку, здійснюється дифузійним шляхом. Слабка вільна конвекція – це специфічний гідродинамічний ефект, що виникає в системах з малими масовими силами. Для системи рівнянь (39) - (40) вдалося побудувати матрицю фундаментальних розв'язків, яка описує локальні впливи на середовище і дозволяє застосовувати до відповідних крайових задач метод граничних елементів.

Подальший аналіз стосується фізичних явищ флотації, седиментації, термофорезу, дифузіофорезу і ефекту Марангоні. Термофорез і дифузіофорез, з одного боку, і ефект Марангоні явища аналогічні. Силу, з якою рідина діє на відокремлений об'єкт, можна підставити у вигляді

$$\vec{F}_p = -\sum_{k=1}^{2M} \alpha_{u_k} \operatorname{grad} u_k \, S_M \,, \tag{41}$$

де S_M – площа миделевого перетину об'єкта перпендикулярно до відповідного градієнта. Тоді рух об'єкта опишемо рівнянням

$$\left(m + m_{ai}\right)\ddot{x}_i = F_{mi} + F_{pi} - F_{di}, \tag{42}$$

де m – маса об'єкта; m_{ai} – приєднана маса у відповідному напрямку; F_{mi} – відповідна компонента масових сил; F_{di} – відповідна компонента сил гідродинамічного опору. Для рівняння (42) можуть бути поставлені початкові умови, і відповідна задача Коші може бути розв‘язана чисельно. Однак у повільних течіях малі і прискорення, тому найчастіше лівою частиною рівняння (42) просто зневажають. Тоді, з огляду на те, що в течії Стокса сила гідродинамічного опору пропорційна швидкості, одержимо $C\vec{V} = \vec{F}_m + \vec{F}_p$, де C – коефіцієнт опору. Особливо простий цей підхід для сферичних об'єктів, опір яких визначається формулою Стокса: $6\pi\mu R\vec{V} = \vec{F}_m + \vec{F}_p$. Для випадку багатофазного середовища може бути задіяний описаний вище метод М. Смолуховського.

Однією з найбільш актуальних технічних проблем сучасного етапу розвитку ракетно-космічної техніки є побудова математичної моделі та методів розрахунку гідродинамічних та тепломасообмінних процесів у паливних баках та інших ємностях космічних літальних апаратів, частково заповнених рідиною, під час тривалого інерційного польоту. Вважаємо бак циліндричним, ефектами на торцях баку нехтуємо. Нехай компонента палива розподілена у вигляді шару біля стінки баку. Всередині баку міститься певний газ, що включає пару компоненти палива. Одним боком бак повернутий до Сонця та нагрівається сонячним випромінюванням, а протилежна сторона охолоджується за рахунок теплового випромінювання у космічний простір. Завдяки зазначеному процесу всередині баку виникає перепад температур на внутрішній поверхні паливного шару. Враховуючі відносно тонку стінку баку та відносно тонкий шар палива біля неї, можна отримати асимптотичне представлення розподілу температури в них. Розроблена здобувачем методика побудови такого асимптотичного представлення наведена у Додатку 6. Окрім теплопровідності можливо перенесення теплоти шляхом дифузії пари компоненти палива. Дійсно, якщо на внутрішній поверхні паливного шару має місце термодинамічна квазірівновага між рідинним паливом та його парою, то концентрація пари над шаром дорівнює концентрації насиченої пари, яка при заданій температурі відома (позначимо її як c_{sat} (T)), а дифузійні потоки, що підводяться до чи відводяться від міжфазової межі, корегуються фазовим переходом випаровування чи концентрації, який, у власну чергу, являється джерелом чи стоком тепла. В системі виникають два види течій: стефанівська течія внаслідок стрибка густини при фазовому переході та термокапілярна течія внаслідок різниці тисків, що виникають внаслідок дії сил поверхневого натягу, через залежність коефіцієнту поверхневого натягу від температури. Тоді у першому наближенні отримаємо систему (нехтуємо конвективними членами у порівнянні з дифузійними) для температури:

$$\Delta T_g = 0, \quad T_g\Big|_{\Gamma_{gf}} = T_f\Big|_{\Gamma_{gf}}, \quad \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_{gf}} = \lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial n}\Bigg|_{\Gamma_{gf}} + q, \qquad (43)$$

де T_g, T_f – температури газу та компоненти палива; λ_g, λ_f – їхні теплопровідності; Γ_{gf} – межа між ними; q – тепловий ефект фазового переходу. Для концентрації пари компоненти палива:

$$\Delta c_v = 0, \quad c_v\Big|_{\Gamma_{gf}} = c_{sat}(T_g\Big|_{\Gamma_{gf}}), \qquad (44)$$

де c_v – концентрація пари компоненти палива. Оскільки задача сформульована як лінійна, стефанівську та термокапілярну течії можна розглядати як окремі незалежні течії. Обидві течії вважаємо течіями Стокса, вони різняться лише крайовими умовами: для течії Стефана у швидкостях, а у термокапілярній течії – одна умова для тиску. Всі наведені задачі розв‘язувалися методом граничних елементів. Якщо течія Стефана була суттєвою для задачі по внеску у загальну схему переносу, то потрібен був ітераційний процес, оскільки інтенсивність фазового переходу суттєво залежить від температури на межі фазового переходу.

ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науково-дослідною роботою, у якій розв’язана актуальна наукова задача про створення теоретичних засад інженерного розрахунку гідродинамічних та тепломасообміних процесів при малих числах Рейнольдса, зокрема, у багатофазних середовищах, у задачах мікрогідродинаміки та в умовах мікрогравітації, із застосуванням сучасних методів обчислювальної теорії потенціалу, асимптотичного аналізу та лагранжевих методів гідромеханіки

Основними науковими і практичними результатами є:

– Проаналізовано сучасний стан чисельного аналізу та показано, що методи обчислювальної теорії потенціалу не можна вважати універсальними, їх доцільно використовувати для вузьких класів задач, де вони демонструють високу ефективність завдяки притаманним їм певним перевагам.

– Запропоновано принципово новий клас регулярних алгоритмів методу граничних елементів з точками колокації всередині області розв‘язку. Переваги цих алгоритмів полягають у тому, що вони ґрунтуються на наближених регулярних граничних інтегральних рівняннях другого роду, які завжди коректні, тобто такі алгоритми мають високу функціональну надійність.

– Запропоновано новий клас алгоритмів методу дискретних особливостей прямі регулярні методи з точками коллокації всередині області розв‘язку, які мають гіршу точність у порівнянні з запропонованими алгоритмами граничних елементів, але більшу швидкість розрахунку.

– Запропоновано новій асимптотичний алгоритм методу граничних елементів для визначення малих збурень межі області розв’язку чи крайових умов та новий асимптотичний адаптивний алгоритм методу граничних елементів.

– Запропонована вдосконалена методика тестування алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу.

– Побудовано розкладання Уайтхеда для течій в’язкої рідини у обмежених областях та показано, що наближення Стокса співпадає з першим членом цього розкладання.

– Методом Хьормандера побудовані матриці фундаментальних розв’язків для системи рівнянь Стокса у різних формулюваннях.

– Для розрахунку багатофазних течій Стокса було застосовано метод М. Смолуховського, який було узагальнено та вдосконалено.

– Побудовано асимптотичну математичну модель повільних фазових переходів, до якої потім успішно застосовано метод граничних елементів. Запропоновано математичну модель гомотетичного зростання тіл при повільних фазових переходах.

– Показано, що течія Стефана повільного фазового переходу є течією Стокса.

– Вперше побудована матриця фундаментальних розв’язків для системи рівнянь Онзагера та проведено її асимптотичний аналіз.

– Сформульована та розв’язана за допомогою методу граничних елементів задача про міжфазову рівновагу у паливному баку ракети у тривалому інерціальному польоті.

– Побудована інтегральна математична модель та запропоновано метод розрахунку слабкої вільної конвекції. Для розрахунку багатофазних течій Стокса в умовах мікрогравітації було запропоновано математичну модель з урахуванням ефектів флотації, седиментації, термофорезу, дифузіофорезу, ефекту Марангоні.

– Розглянута технічна проблема течій рідини та тепломасообміну у паливному баку космічного апарату у довготривалому інерційному польоті.

ПЕРЕЛІК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у вітчизняних наукових фахових виданнях:

1. Гончаренко М. П. Решение задач гидродинамического взаимодействия малых частиц методом М. Смолуховского / М. П. Гончаренко, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту, 2014, № 3(50). – с. 249-253.

2. Евдокимов Д. В. Разработка прямых регулярных алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения / Д. В. Евдокимов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2015, №2/7 (74). – С. 16-25. (**Index Copernicus**)

3. Бразалук, Ю. В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов, О. А. Коваленко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Вып. 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56. (**Index Copernicus**)

4. Бразалук Ю. В. Асимптотическая математическая модель аблирующих теплозащитных покрытий / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов, М. А. Стояновский // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – №3 (62) т.2, 2017. С.47 – 55.

5. Бразалук Ю. В. Применение метода граничных элементов для расчета течения Пуазейля в каналах сложного поперечного сечения / Ю. В. Бразалук, Д. В.

Евдокимов, А. А. Кочубей, Р. А. Шульга // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – № 3(66). Том 1. – 2018. – С. 24–31.
6. Амуров А. В. Численное исследование процесса эволюции жидкого контура / А. В. Амуров, Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов // Вісник Херсонського нац. техн. ун-ту. – Херсон: ХНТУ, 2019. – № 2(69), частина 2. – С. 140–152.
7. Бразалук Ю. В. Математическое и численное моделирование систем теплоизоляции тел сложной геометрической формы / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, А. В. Давыдова, Д. В. Евдокимов, Ю. А. Малая, М. А. Стояновский // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпро, 2019. – Випуск 2 (121). – С. 64–76 (**Index Copernicus**)

Публікації у наукових виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз даних SCOPUS та Web of Science:

8. Yevdokymov D.V. Boundary element and discrete vortices method for ideal fluid flow calculations / D. V. Yevdokymov // D. Durban and A. R. J. Pearson (Eds.) Non-linear singularities in deformation and flow. Proceeding of IUTAM Symposium held in Haifa, Israel, 17-21 March, 1997. Kluwer Academic Publisher. - pp. 217-230. **(WoS)**.
9. Brazaluk Iu. Asymptotic Approach and Boundary Element Method for Calculation of Slow Phase Transitions / Iu. Brazaluk, D. Yevdokymov / 4 th International Conference on Computational Methods for Thermal Problems, 2016, Georgia Tech, Atlanta, USA.- p.286-289. http://www.thermacomp.com/public/index.php?node=16&nm=ThermaComp. **(SCOPUS)**.
10. Brazaluk Iu. V. Generalized Onsager's Equation System as Mathematical Model of Heat and Mass Transfer in Microgravity Conditions / Iu. V. Brazaluk, D. V. Yevdokymov // Fifth International Conference on Computational Methods for Thermal Problems. July 9-11, 2018. Bangalor. India. – P. 342–345. **(SCOPUS)**.
11. Yevdokymov D. V. Mathematical Modeling and Numerical Simulation of Diffusive Processes in Slow Changing Domains / D. V. Yevdokymov, Yu. L. Menshikov // Modeling and Simulation in Engineering - Selected Problems. – Електронний ресурс, доступ за адресою: https://www.intechopen.com/online-first/mathematical-modelling-and-numerical-simulation-of-diffusive-processes-in-slow-changing-domains

Інші публікації та матеріали конференцій:

12. Бразалук Ю. В. Метод граничних елементів в задачах гідродинаміки та теплопровідності / Ю. В. Бразалук, О. Г. Гоман, Д. В. Євдокимов, О. О. Кочубей, М. В. Поляков // Дніпро: Ліра, 2019. – 228 с. (монографія).
13. Беляев Н. М. Применение метода граничных элементов в задачах теплопроводности / Н. М. Беляев, Д. В. Евдокимов // Численно-аналитическое исследование процессов тепломассообмена. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 12-18.
14. Евдокимов Д. В. Интегральные уравнения процесса сушки капиллярнопористого тела / Д. В. Евдокимов // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДДУ, 1998. – С. 52-55.
15. Евдокимов Д. В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов / Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Механіка. Випуск 2. Том 1, 1999. – С. 150-156.
16. Бевза Э. К. Применение метода граничных элементов для решения задач межфазового взаимодействия с неизвестными границами фаз / Э. К. Бевза, Д. В.

Евдокимов, А. А. Кочубей // Вісник Дніпропетровського ун-ту, 2001. сер. ”Механіка”, вып.5, том 1. – С. 109-116.
17. Евдокимов Д. В. Гидродинамическое взаимодействие малых объектов в потоке / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник Донецкого ун-та. Серия А. Естественные науки, 2002, № 1. – С. 157-161.
18. Бевза Э. К. Математическое моделирование процессов фазовых переходов в условиях микрогравитации / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник Донецкого ун-та. Серия А. Естественные науки, 2002, № 2. – С. 249-253.
19. Бевза Э. К. Применение метода граничных элементов для решения задачи Стефана в случае медленных фазовых переходов / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник Харьковского нац. ун-та, 2003, № 590. Сер. “Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”, вып. 1. – С. 26-31.
20. Евдокимов Д. В. Об одном интегральном представлении для уравнений Стокса в плоском случае / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Дифернціальні рівняння та їх застосування. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2003. – С. 3-9.
21. Поляков Н. В. Матрицы фундаментальных решений для плоских нестационарных уравнений Стокса / Н. В. Поляков, Н. Г. Зинченко, Д. В. Евдокимов // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д.: Изд-во ДНУ, 2005. – С. 3-11.
22. Поляков Н. В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 1. Линейные задачи. / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка. 2006, №2/1. – С. 7 – 25.
23. Поляков Н. В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 2. Нелинейные задачи. / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка. 2006, №2/1. – С. 25 – 42.
24. Бевза Э. К. Математическая модель медленного фазового перехода на поверхности пузырьков и капель / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Д. Н. Сербиченко, Т. Э. Смоленская // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 157-166.
25. Евдокимов Д. В. Расчет стационарных температурных полей в областях с малыми возмущениями границы / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Т. И. Тарасова // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 167-176.
26. Бевза Э. К. Об одном адаптивном алгоритме метода граничных элементов / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 27-32.
27. Евдокимов Д. В. Математическое моделирование гидродинамических эффектов медленных фазовых переходов / Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Д. Н. Сербиченко // Вестник ХНТУ. – 2007. – № 2 (28). – С. 114-119.
28. Евдокимов Д. В. Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования / Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Вісник Дніпропетровського університету, № 8, серія “Моделювання”, Випуск 1, 2009. с. 5 – 17.
29. Дидинская Е. О. Гомотетичный рост ансамбля пузырей (капель) / Е. О. Дидинская, А. В. Дидинский, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей // Вестник ХНТУ. – 2010. – № 3 (39). – С. 153-158.

30. Дидинская Е. О. Об одной модельной задаче теории кипения / Е. О. Дидинская, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Д. Н. Сербиченко// Вестник ХНТУ. – 2010. – № 3 (39). – С. 159-164.
31. Дидинский А. В. Асимптотический анализ системы уравнений Онзагера / А. В. Дидинский, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Вісник ДНУ. Серия: Моделирование. – ДНУ, 2010. – Вып. 2. – №8. – С. 36-44.
32. Yevdokymov D. V. Boundary element method application to calculation of fluid flow and heat and mass transfer in microgravity / D. V. Yevdokymov // Symposium on Advanced Math. and Comput. Aspects of BEM, Cracow, Poland, May 30 - June 3, 1999. – P. 92-93.
33. Polyakov M. V. Boundary element method application to the steady-state three-phase system calculation / M. V. Polyakov, D. V. Yevdokymov // IABEM2000, Symposium of the International Association for BEM, Brescia, Italy, July 4-7, 2000. – p. 189-191.
34. Yevdokymov D. V. Boundary element method accuracy investigation by numerical experiment / D. V. Yevdokymov // Annual Scientific Conference GAMM 2000, Gottingen, Germany. – p. 166-167.
35. Bevza E. K. Effect of Density Jump during Slow Phase Transition / E. K. Bevza, O. O. Kochubey, D. V. Yevdokymov // Annual Scientific Conference GAMM 2004, Dresden 2004. – p. 173.
36. Bevza E. K. Hydrodynamic Effect of Slow Phase Transitions in Microgravity / E. K. Bevza, O. O. Kochubey, D. V. Yevdokymov // International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM 2004, Warsaw 2004. – p. 38.
37. Yevdokymov D. Potential Theory Application to Onsager's Equation System. / D. Yevdokymov // Book of Abstracts. 77th Annual Meeting of the GAMM. March 27th - 31th, 2006, Technische Universitet Berlin. – p. 491.
38. Yevdokymov D. Boundary element method with collocation points inside the solution domain / D. Yevdokymov // IABEM 2014, Zhengzhou, China, August 13-15, 2014. Book of Abstracts. – p. 173-174.
39. Бабич А. П. Лабораторний практикум із курсу «Методи дослідження процесів тепломасообміну» / А. П. Бабич, Д. В. Євдокимов, О. В. Хамініч // Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2012. – 64 с.

АНОТАЦІЯ

Євдокимов Д. В. Математичні моделі та чисельні методи теорії потенціалу для задач гідродинаміки і тепломасообміну при малих числах Рейнольдса – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, 2021.

Дисертаційна робота присвячена застосуванню методів обчислювальної теорії потенціалу та асимптотичних методів до задач про течії рідини при малих числах Рейнольдса та тепломасообмін у таких течіях, створенню надійних та високоточних розрахункових методик і використанню останніх для вирішення інженерно-технічних проблем, пов'язаних з технологіями обробки багатофазних середовищ та процесами в умовах мікрогравітації.

Запропоновано два нових сімейства алгоритмів методу граничних елементів, перше з яких забезпечує високу надійність обчислювального підходу, а друге

дозволяє розраховувати впливи малих збурень форми області та крайових умов. Для обмежених областей, де не має місце парадокс Уайтхеда, побудовано розкладання Уайтхеда для рівнянь Нав'є-Стокса. Завдяки побудованим матрицям фундаментальних розв'язків системи рівнянь Стокса та її модифікацій вирішена проблема малого локалізованого впливу на рідинне середовище. Для розрахунку процесів у багатофазних середовищах запропоновані вдосконалення та узагальнення методу М. Смолуховського, а також комбінація методів граничних елементів та М. Смолуховського. На основі асимптотичного розкладання в ряд за малим числом Стефана та застосування методу граничних елементів запропоновано високоефективний алгоритм розрахунку повільного фазового переходу, в тому числі на поверхнях бульбашок та крапель, які зберігають сферчну форму у процесі фазового переходу завдяки силам поверхневого натягу (гомотетичне зростання). Показано, що течія Стефана для повільного фазового переходу завжди є течією Стокса. Побудовано асимптотичну математичну модель та матрицю фундаментальних розв'язків для неї у випадку слабкої вільної конвекції в умовах мікрогравітації. Методом граничних елементів у комбінації з методом М. Смолуховського проаналізовано багатофазне середовище в умовах мікрогравітації з урахуванням ефектів флотації, седиментації, термофорезу, діфузіофорезу, ефекту Марангоні.

Метод граничних елементів сумісно з методом М. Смолуховського було застосовано до аналізу технологій опрацювання багатофазного середовища у хімічних та гірничозбагачувальних технологіях. Побудовано математичну модель та запропоновано методи розрахунку процесів тепломасообміну у паливному баку космічного апарату у довготривалому інерційному польоті.

Результати дослідження впроваджені у практиці підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля, у науково-технічній діяльності Інституту геотехнічної механіки імені М. С. Полякова Національної академії наук України та у навчальний процес Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Ключові слова: течія Стокса, парадокс Уайтхеда, асимптотичне розкладання Уайтхеда, парадокс Стокса, метод граничних елементів, повільні фазові переходи, багатофазна течія Стокса, течія Стефана, флотація, седиментація, термофорез, система рівнянь Онзагера, паливний бак космічного апарату, довготривалий інерційний політ.

АННОТАЦИЯ

Евдокимов Д. В. Математические модели и численные методы теории потенциала для задач гидродинамики и тепломассообмена при малых числах Рейнольдса – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы, Днепровский национальной университет имени Олеся Гончара, г. Днепр, 2021.

Диссертационная работа посвящена применению методов вычислительной теории потенциала и асимптотических методов к задачам о течении жидкости при малых числах Рейнольдса и тепломассообмене в таких течениях, созданию надежных и высокоточных расчетных методик и использованию последних для

решения инженерно-технических проблем, связанных с технологиями обработки многофазных сред и процессами в условиях микрогравитации.

Предложено два новых семейства алгоритмов метода граничных элементов, первое из которых обеспечивает высокую надежность расчетного подхода, а второе позволяет рассчитывать влияние малых возмущений формы области и граничных условий. Для ограниченных областей, где не выполняется парадокс Уайтхеда, построено разложение Уайтхеда для уравнений Навье-Стокса. Благодаря построенным матрицам фундаментальных решений системы уравнений Стокса и ее модификаций решена проблема малого локализованного воздействия на жидкую среду. Для расчета процессов в многофазных средах предложены усовершенствования и обобщения метода М. Смолуховского, а также комбинация методов граничных элементов и М. Смолуховского. На основе асимптотического разложения в ряд по малому числу Стефана и применения метода граничных элементов предложен высокоэффективный метод расчета медленного фазового перехода, в том числе на поверхности пузырьков и капель, которые сохраняют сферическую форму в процессе фазового перехода благодаря силам поверхностного натяжения (гомотетический рост). Показано, что течение Стефана для медленного фазового перехода всегда является течением Стокса. Построена асимптотическая математическая модель и матрица фундаментальных решений для случая слабой свободной конвекции в условиях микрогравитации. Методом граничных элементов в комбинации с методом М. Смолуховского проанализирована многофазная среда в условиях микрогравитации с учетом эффектов флотации, седиментации, термофореза, диффузиофореза, эффекта Марангони.

Метод граничных элементов совместно с методом М. Смолуховского были применены для анализа обработки многофазной среды в химических и горно-обогатительных технологиях. Построена математическая модель и предложены методы расчета процессов тепломассообмена в топливном баке космического аппарата в долговременном инерциальном полете.

Результаты исследования внедрены в практике предприятия «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля», в научно-техническую деятельность Института геотехнической механики имени Н. С. Полякова Национальной академии наук Украины и в учебный процесс Днепровского национального университета имени Олеся Гончара.

Ключевые слова: течение Стокса, парадокс Уайтхеда, асимптотическое разложение Уайтхеда, метод граничных элементов, медленные фазовые переходы, многофазное течение Стокса, течение Стефана, флотация, седиментация, термофорез, система уравнений Онзагера, топливный бак космического аппарата, долговременный инерциальный полет.

ABSTRACT

Yevdokymov D. Mathematical models and numerical methods of potential theory for problems of hydrodynamics and heat and mass transfer under small Reynolds numbers. – Manuscript.

A Dissertation for a Candidate Degree in Technical sciences in the specialty 01.02.05 – Mechanics of fluid, gas and plasma, Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2021.

The dissertation work is devoted to application of computational potential theory methods and asymptotic methods to problems of fluid flows under small Reynolds numbers and heat and mass transfer in such flows, creation of reliable and high accurate computational schemes and using them for the solution of engineering and technical problems connected with handling of multiphase media and processes in microgravity conditions.

Two new families of boundary element algorithms are proposed. The first one provides a high reliability and accuracy of computational approach; the second one gives an opportunity to calculates influences of small disturbances of the domain shape and the boundary conditions. Whitehead's expansion for Navier-Stokes equation is constructed in restricted domains, where Whitehead's paradox does not take place. A problem of small localized action on a liquid media is solved because of the constructed matrices of fundamental solutions Stokes equation system and its modifications. Improvements and generalizations of M. Smoluchowski's method are proposed for calculations of processes in multiphase media, combination of boundary element method and M. Smoluchowski's method is proposed too. A high effective algorithm of slow phase transition calculation is proposed on the base of series expansion with respect to small Stefan number and boundary element method application, including a case of bubbles and drops, which save spherical shape during phase transition process due to surface tension forces (homothetic growth). It is shown, that the Stefan flow of slow phase transition is always Stokes flow. Matrices of fundamental solutions of Onsager's equation system are constructed, integral analogs of this system are obtained and asymptotic approach is developed to analyze this system. The obtained numerical solutions of Onsager's equation system show the behavior, which is not specific for usual solutions of parabolic equations. An asymptotic mathematical model and matrix of its fundamental solutions is constructed for weak free convection in microgravity conditions. Multiphase media in microgravity conditions is investigated by boundary element method together with M. Smoluchowski's method taking into account flotation, sedimentation, thermophoresis, diffusiophoresis phenomena and Marangoni's effects.

Boundary element method together with M. Smoluchowski's method are applied to investigation of multiphase media working in chemical and re-dressing technologies. A mathematical model is constructed and numerical methods are proposed for heat and mass transfer processes in fuel tank of space vehicle during long-time inertial flight.

The results of the research were embedded in practice of the enterprise "Design Office "Yuzhnoye" named after M. K. Yangel", in the scientific and technical activity of Institute of Geotechnical Mechanics named after N. Poljakov of National Academy of Science of Ukraine and in educational process of Oles Honchar Dnipro National University.

Key words: Stokes flow, Whitehead paradox, Whitehead asymptotic expansion, Stokes paradox, boundary element method, slow phase transitions, multiphase Stokes flow, Stefan flow, flotation, sedimentation, thermophoresis, Onsager's equation system, fuel tank of space vehicle, long-time inertial flight.

Підписано до друку 21.05.2021.
Формат 60х84/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 1,4. Наклад 100 прим. Замовлення № 113.

Видавництво та друкарня ПП «Ліра ЛТД».
вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49107.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготовлювачів
та розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 6042 від 26.02.2018.

dnipro.lira@gmail.com | +38 (067) 561-57-05 | lira.dp.ua