

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

**ШПОРТА АННА ГРИГОРІВНА**



УДК 539.3

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЗБУРЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ  
КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ТА ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЛЯ  
ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

**Дніпро – 2021**

**Дисертація є рукописом.**

Роботу виконано у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка» Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник:** доктор фізико-математичних наук, професор  
**Кагадій Тетяна Станіславівна,**  
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка» Міністерства освіти і науки України,  
професор кафедри вищої математики.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук, професор,  
**Ніколаєв Олексій Георгійович,**  
Національний аерокосмічний університет імені  
М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний  
інститут», завідувач кафедри вищої математики та  
системного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор,  
**Говоруха Володимир Борисович,**  
Дніпровський державний  
аграрно-економічний університет,  
завідувач кафедри вищої математики та фізики.

Захист відбудеться «12» березня 2021 р. о 14:00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10 при Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за адресою:  
м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 35, корпус 3, ауд. 25.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці ім. О. Гончара Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара за адресою: 49107, м. Дніпро, вул. Казакова, 8.

Відгуки на автореферат просимо надсилати за адресою: 49010, м. Дніпро, просп. Гагаріна, 72, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, вченому секретарю спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10.

Автореферат розісланий «29» січня 2021 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,  
доктор технічних наук, доцент



А. Ю. Дреус

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Передача зусиль та тисків від одних деталей до інших відбувається при їх взаємному дотику. Проблема контакту має особливе значення при конструюванні машин та в будівництві, оскільки вона визначає процеси зносу, міцності, руйнування та довговічності деталей та споруд. Виникає необхідність у проведенні коректної попередньої оцінки напружено-деформованого стану поставленої задачі.

Практичні потреби розв'язання цих питань обумовили важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження конкретних задач. Суттєвий інтерес викликає клас задач, де потрібно дослідити напружено-деформований стан тіла з урахуванням анізотропних властивостей матеріалу, складної геометрії області контакту тощо. Запропоновану дисертаційну роботу присвячено розв'язанню цього важливого наукового питання, при цьому під час дослідження використовується метод малого параметра. Асимптотичний аналіз являє собою ефективний математичний апарат, що дозволяє побудувати адаптоване рівняння апроксимації і оцінити застосування різних гіпотез.

Також в даному дисертаційному дослідженні пропонується узагальнення методу збурень, розробленого в роботах А.В. Павленка, до розв'язання двовимірних контактних задач електропружності. Розглядаються електропружні матеріали з прямолінійною анізотропією. Активні матеріали, перш за все п'єзоелектричні і п'єзоелектромагнітні, часто використовуються в якості функціональних частин різних електронних пристроїв, включаючи датчики, перетворювачі і виконавчі механізми, оскільки ці матеріали здатні змінювати свою форму під дією електричного або магнітного полів. Різноманітні дослідження таких матеріалів є сучасними, актуальними та корисними.

Таким чином дисертаційна робота, що присвячена дослідженню контактної взаємодії штампа з анізотропною пластиною при різних умовах контакту та ускладненою геометрією, а також розробці нового підходу до вивчення напружено-деформованого стану п'єзоелектричних матеріалів, є актуальною.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Наукова робота виконувалась в рамках бюджетної наукової тематики кафедри вищої математики НТУ «Дніпровська політехніка», номер державної реєстрації 0114U000623 «Розробка методів математичного моделювання в задачах гірничого виробництва» (2017 – 2019 рр).

### **Мета і завдання дослідження.** *Метою* дисертаційної роботи є:

- поширення методу збурень для розв'язання контактних задач лінійної теорії пружності з урахуванням впливу неідеальних властивостей матеріалу тіл взаємодії і складної геометрії області контакту;
- узагальнення методу малого параметру на випадок двовимірних задач електропружності.

*Для досягнення поставленої мети необхідно:*

- побудувати модель задачі про дію жорсткого штампу на пружну ортотропну пластину з циліндричною анізотропією, при цьому врахувати силу тертя, що виникає під час взаємодії;

- за допомогою методу збурень отримати аналітичний розв'язок, а також розподіл напружень під штампом для поставленої задачі;

- побудувати модель задачі про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний напівнескінченний криволінійний сектор з циліндричною анізотропією, врахувати при цьому, що за умовою в області контакту штамп з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними;

- за допомогою методу збурень отримати аналітичний розв'язок і визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення;

- побудувати модель задачі про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний сектор скінченних розмірів з циліндричною анізотропією, врахувати при цьому, що за умовою в області контакту штамп з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними;

- за допомогою методу збурень отримати аналітичний розв'язок, визначити закони розподілу напружень під штампом, розмір ділянки зчеплення, а також величину, яка характеризує осідання штампу;

- провести дослідження впливу характеристик жорсткості матеріалу пластини на розподіл напружень під штампом при різних значеннях параметра (відношення розміру області контакту до кута розкриття пластини);

- показати, що крайові задачі теорії пружності та електропружності для плоских ортотропних тіл зводяться до задач теорії потенціалу, які можна послідовно розв'язати.

*Об'єкт дослідження* – криволінійна пластинка з циліндричною анізотропією, на яку діє жорсткий штамп з нормальним зусиллям.

*Предмет дослідження* – дослідження напружено-деформованого стану криволінійної пластинки з циліндричною анізотропією під дією жорсткого штамп.

*Методи дослідження.* Для розв'язання поставлених контактних задач теорії пружності був використаний метод збурень, запропонований у працях А.В. Павленка. Згідно з цим методом асимптотичний аналіз рівнянь теорії пружності для ортотропних середовищ відбувається з використанням параметра, що характеризує анізотропні властивості матеріалу пластинки (далі малий параметр).

*Достовірність* ґрунтується на використанні фундаментальних законів теорії пружності. Для забезпечення достовірності отриманих результатів застосовуються коректні підходи математичної теорії пружності, методи теорії функцій комплексного змінного. Використовується апробований асимптотичний метод. Проведені можливі граничні переходи та порівняння з відомими результатами, розв'язані модельні задачі.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Набув подальшого розвитку метод малого параметра, який дозволяє розв'язувати певний клас складних задач лінійної теорії пружності та електропружності.

В дисертаційній роботі отримані аналітичні розв'язки наступних нових важливих задач:

- розв'язано задачу про дію жорсткого штампу на пружну ортотропну пластину з циліндричною анізотропією. Враховується сила тертя, що виникає під час взаємодії.

- отримано новий аналітичний розв'язок задачі про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний напівнескінченний сектор з циліндричною анізотропією. В процесі розв'язання було враховане існування ділянок ковзання і зчеплення під штампом. Визначені закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

- розв'язано задачу про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний сектор скінченних розмірів з циліндричною анізотропією. У постановці задачі зазначено існування ділянок ковзання і зчеплення під штампом. Отримані закони розподілу напружень під штампом, розмір ділянки зчеплення.

- наведено узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності. Показано що, цілком можливо сформулювати відповідні крайові задачі для основних рівнянь, що дозволяє представити вихідну задачу електропружності у вигляді суперпозиції більш простих крайових задач, де механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, але мають взаємний вплив через крайові умови.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає у:

- можливості застосування запропонованого методу для дослідження напружено-деформованого стану пластин з урахуванням анізотропії, ускладненої геометрії, а також сил тертя, що виникають під час взаємодії пластини та штампів;

- можливості застосування асимптотичного методу для дослідження напружено-деформованого стану анізотропних пластин з урахуванням існування ділянок ковзання і зчеплення в області контакту під штампом;

- визначенні законів розподілу напружень під штампом і розміру ділянки зчеплення.

Одержані результати є корисними для розрахунку напружено-деформованого стану товстостінних конструкцій з підкріплюючими елементами, накладками, штампами та ін., а також при проектуванні гірничих виробок.

Матеріали дисертаційної роботи використовуються при читанні дисципліни «Спеціальні розділи з математики» для студентів та аспірантів факультету інформаційних технологій НТУ «Дніпровська політехніка».

**Апробація результатів дисертації.** Деякі результати праці були представлені та обговорювались на конференціях:

- Прикладні завдання математики та механіки ("ПЗММ" - 2012): матеріали XX міжнар. наук.-техн. конф. (Севастополь, 2011);

- Прикладні завдання математики та механіки ("ПЗММ" - 2012): матеріали XX міжнар. наук.-техн. конф. (Севастополь, 2012);

- конференція, присвячена 100-річчю кафедри вищої математики НГУ «Шлях сучасної математики: освіта, наука індустрія» (Дніпропетровськ, 2013);

- XX Ювілейна міжнародна конференція з математичного моделювання (Херсон, 2019);

- VII міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (Запоріжжя, 2019);

- Друга міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (до сторіччя від дня народження академіка Володимира Івановича Моссаковського) (Дніпро, 2019);

- XXVIII International Ukrainian-Polish Conference CAD in machinery design implementations and educational issues Lviv, Ukraine, 26-27 November 2020.

Результати дисертаційної роботи у повному обсязі доповідалися та були обговорені на:

- науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, 29 жовтня 2020, керівник – д. ф.-м. н., професор В.В. Лобода;

- науковому семінарі кафедри вищої математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».

**Публікації.** Основні наукові результати дисертаційного дослідження опубліковані у 10 наукових працях [1-10], у тому числі 4 статті у наукових журналах, що затверджені ВАК України, як фахові з механіки деформівного твердого тіла [1,6-8], 3 статті у науковому журналі, що індексується в найбільшій міжнародній реферативній наукометричній базі наукової періодики Scopus [2-4], 3 публікації у матеріалах та тезисах міжнародних наукових конференцій [5,9,10].

**Особистий внесок здобувача.** Основні розв'язки та результати роботи, які виносяться на захист, отримані автором самостійно.

У працях [2,7], написаних у співавторстві здобувачу належить участь у постановці проблеми, визначенні методу дослідження та побудові математичної моделі, отриманні та обговоренні результатів, розв'язанні модельних задач.

У роботах [4,5], написаних разом з науковим керівником, доктором фізико-математичних наук, професором Т.С. Кагадій, здобувачу належить участь у постановці задачі, обговоренні математичної моделі поставленої задачі, аналізі отриманих аналітичних розв'язків, апробація результатів.

У роботах [3,6,8] співавтором самостійно побудовано математичні моделі, виконано застосування методу для розв'язування задач, отримано аналітичні та чисельні розв'язки, проведено аналіз отриманих результатів.

Роботу [1] опубліковано без співавторів.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, вона містить 10 рисунків, 9 таблиць. Загальний обсяг роботи складає 160 сторінок. Перелік посилань з 185 найменувань на 15 сторінках.

### **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

У **вступі** дисертаційної роботи подано обґрунтування актуальності розглянутої теми, сформульовано мету та поставлене завдання, висвітлено наукову новизну дослідження, показано достовірність і практичну значимість отриманих у даній роботі результатів, подано інформацію про публікації за темою дисертаційної роботи, апробацію результатів дисертації, особистий внесок здобувача, структуру та обсяг дисертації.

У **першому розділі** проведено огляд літератури, присвяченої дослідженню контактних задач теорії пружності. Зроблено висновок про те, що значну увагу дослідників викликають задачі, у яких вивчається напружено-деформований стан пластини під дією жорсткого штамп, або системи штампів. Багато дослідників для отримання розв'язків плоских контактних задач теорії пружності використовували математичний апарат, основою якого є застосування теорії функцій комплексного змінного: Н.І. Мухелішвілі, В.М. Абрамов, Д.А. Спенс, І.А. Солдатенков. Ю.О. Антипов, А.Ф. Улітко, В.І.Острик, В.М. Александров, М.І. Чебаков, В.Д. Кубенко, О.В. Нехайчук, J.E.Campbell, R.P.Thompson та ін. Дослідження контактних задач за допомогою метода парних інтегральних рівнянь було проведене А.М. Данилевським, Вайнштейном, З.С. Аграновичем, В.А. Марченком, В.П. Шестопаловим, Ноблом, та іншими авторами. Розв'язання задач про штамп, зчеплений з напівплощиною були отримані П.І. Клубіним, А.И. Бегіашвілі, М.Н. Афонькіним. Задача про штамп, що переміщується з постійною швидкістю на границі пружного тіла розв'язана Л.А. Галінім. Ним же вперше була поставлена і розв'язана задача, коли в області контакту були присутні ділянки зчеплення і ковзання. В.І. Мосаковський та В.В. Петров експериментальним шляхом досліджували зміну фактичних розмірів площадки контакту в залежності від навантаження, що прикладається.

Різноманітні підходи до розв'язання контактних задач розглянуті у роботах Г. Я. Попова та його учнів. Дослідженню напружено-деформованого стану пружних тіл з включеннями та багатокомпонентних тіл присвячені роботи О.Г. Ніколаєва, С.І. Гоменюка, О.Г. Спиці.

Серед досліджень, у яких приділяється увага методам розв'язання контактних задач з урахуванням п'єзоелектричної складової можна виділити роботи таких авторів: В.Т. Гринченка, А.Ф. Улитка, В. В. Лободи, В.Б. Говорухи, А.Є. Шевельової. Питання концентрації напружень у ізотропних та анізотропних тілах під дією силових, температурних та електромагнітних полів досліджуються в роботах С.О. Калоєрова та його учнів. Зроблені висновки щодо актуальності запропонованого в дисертаційній роботі узагальнення метода збурень.

У цьому ж розділі виконано огляд розвитку асимптотичних методів

розв'язання контактних задач. Вагомий внесок у розвиток асимптотичних методів зроблено багатьма авторами: С.Г. Лехницьким, В.М. Александровим, М. В. Вакуленком, А. В. Павленком, Л.А. Агаловяном, І.В. Андриановим та ін. Ідеї, що містяться в роботах А.С. Космодам'янського надали новий поштовх у розвитку асимптотичних методів. Для розв'язання пружно-пластичних задач першим застосував метод малого параметру А.П. Соколов. Застосування методу збурень до розв'язання задач нелінійної теорії пружності відображене у роботах Т.С. Кагадій.

Аналіз сучасного стану проблем контактної взаємодії підтверджує актуальність запропонованих в дисертаційній роботі підходів та отриманих розв'язків.

У першому розділі також наведені основи асимптотичного методу, запропонованого А.В. Павленком.

Основна ідея методу полягає в тому, що напружено-деформований стан ортотропного тіла розкладається на дві складові з різними властивостями, що пов'язані через крайові умови.

Щоб урахувати всі можливі співвідношення між компонентами вектора переміщень та швидкостями їх зміни вводяться афінні перетворення координат та функцій (1), (2).

$$\xi_1 = \alpha \varepsilon^{1/2} x; \quad \eta_1 = y, \quad u = U^{(1)}, \quad v = \varepsilon^{3/2} V^{(1)}; \quad (1)$$

$$\xi_2 = x, \quad \eta_2 = \beta \varepsilon^{1/2} y, \quad u = \varepsilon^{3/2} U^{(2)}, \quad v = V^{(2)}. \quad (2)$$

Ці перетворення залежать від малого параметра  $\varepsilon = \frac{G}{B_1}$  фізичного характеру (відношення характеристик жорсткості матеріалу пластини).

Розв'язок вихідної задачі знаходиться у вигляді суперпозиції зазначених складових, а функції  $U^{(n)}$ ,  $V^{(n)}$  ( $n=1,2$ ) розшуковуються у вигляді рядів за дробовими степенями параметра  $\varepsilon$  (3). При цьому вид асимптотичної послідовності визначається структурою рівнянь та порядком по  $\varepsilon$  похибки у крайових умовах, що виникає після розв'язання задачі у нульовому наближенні.

Для урахування усіх можливих випадків, функції  $U^{(n)}$  та  $V^{(n)}$  ( $n=1,2$ ) визначаються у вигляді рядів за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  (з перетворень (1), (2) видно, що менших степенів параметрів  $\varepsilon$  виникнути не може).

$$U^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} U^{n,j}, \quad V^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} V^{n,j}. \quad (3)$$

Коефіцієнти  $\alpha$  та  $\beta$  також представлені у вигляді рядів за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  (4):

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \alpha_j; \quad \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \beta_j, \quad (4)$$

причому,  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ , а коефіцієнти  $\alpha_j; \beta_j$  ( $j=1,2,\dots$ ) обчислюються у процесі розв'язання і використовуються для спрощення рівнянь у вищих наближеннях.

Доведена можливість формулювання граничних умов для знаходження основних функцій, відповідних напружено-деформованим станам першого та



другого типу. Це дозволяє звести розв'язання крайової задачі теорії пружності до розв'язання рівнянь Лапласа при відповідних граничних умовах.

У **другому розділі** наводиться розв'язання контактної задачі для пластини скінченних розмірів з криволінійною анізотропією та жорсткого штампа за умови, що між штампом та пластиною враховується тертя, яке підпорядковується закону Кулона.

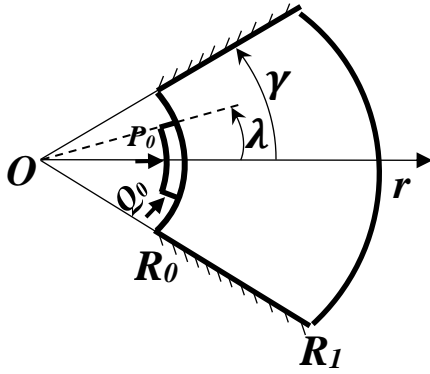


Рис.1 - пластина скінч. розм. під дією жорсткого штампа, за наявності сили тертя.

Розглядається задача про вдавлювання жорсткого штампа у вільну грань пружної ортотропної пластини, яка являє собою частину кругового кільця. Нехай пружна пластина  $R_0 \leq r \leq R_1$ ,  $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$ , закріплена за кромками  $\theta = \pm\gamma$ . На границю пластини  $r = R_0$  діє жорсткий штамп. Вдавлювання відбувається на ділянці  $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$  з основою, яка співпадає з границею  $r = R_0$ . Штамп діє нормальним зусиллям  $P_0$  і дотичним  $Q_0$  (рис.1). При цьому між штампом та пластиною враховується тертя, яке підпорядковується закону Кулона (розглядається стан граничної

рівноваги штампа). Інша границя  $r = R_1$  залишається вільною.

Пластина, товщиною  $\delta$ , працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Матеріал її є ортотропним, головні напрямки анізотропії співпадають з полярними координатами  $r, \theta$ . Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом.

Для розв'язання поставленої задачі використовується метод малого параметра. Якщо замість полярних координат  $r, \theta$  ввести безрозмірні координати  $\xi, \eta$  за допомогою співвідношень  $r = R_0 e^\xi$ ,  $\theta = \eta$ , то поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь пластини у переміщеннях

$$B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0,$$

$$G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} - G (u_\eta - v) = 0$$

при наступних граничних умовах:

$$\sigma_1 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2 (v_\eta + u)) = 0,$$

$$\tau = G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0, \quad (\xi = 0, \quad \lambda < |\eta| < \gamma),$$

$$u = c_0 = const, \quad \tau = \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, \quad |\eta| < \lambda),$$

$$\sigma = \tau = 0, \quad (\xi = h, \quad |\eta| < \gamma),$$

$$u = v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma),$$

Крім того, повинні виконуватись умови рівноваги штампа

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0, \eta) d\eta + P_0 = 0, \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \tau(0, \eta) d\eta + Q_0 = 0.$$

За допомогою застосованого методу розв'язання поставленої проблеми напружено-деформований стан пластини розкладено на дві складові, зв'язані між собою через граничні умови.

Для *напруженого стану першого типу* (що повільно змінюється у напрямку координати  $\xi$ ) розв'язання у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (5)$$

при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{1,0} &= 0 && \left( \begin{array}{l} \xi = 0, \quad \lambda < |\eta| < \gamma \\ \xi = h, \quad |\eta| < \gamma \end{array} \right); \\ u^{1,0} &= C_0 = \text{const} && (\xi = 0, \quad |\eta| < \lambda) \\ u^{1,0} &= 0 && (\eta = \pm \gamma) \end{aligned} \quad (6)$$

Нормальне напруження  $\sigma_1^0$  та складова дотичного напруження  $\tau^{1,0}$ , що відповідає функції  $u^{1,0}$ , знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= B_1 (R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\xi}^{1,0} = \sqrt{GB_1} (R_0 e^{\xi})^{-1} u_{x_1}^{1,0}, \\ \tau^{1,0} &= G u_{\eta}^{1,0} (R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\xi}^{1,0} = G (R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\eta}^{1,0}. \end{aligned}$$

Напруження під штампом у першому наближенні виражається наступним чином:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0 \pi}{2C_1 B} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} \quad (7)$$

а функція  $u_{y_1}^{1,0}$  при  $\xi_1 = 0$ ,  $|\eta_1| > l_1$  знаходиться за формулою

$$u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}}. \quad (8)$$

Складова  $v^{1,0}$  компоненти вектора переміщень  $v^0$ , відповідна даному напруженому стану, у цьому наближенні визначається з рівняння  $v_{\eta}^{1,0} + u^{1,0} = 0$ .

Аналогічним чином отримано розв'язок для напруженого стану другого типу. Вплив тертя на розподіл напружень під штампом враховується лише у третьому наближенні.

Розв'язок задачі у околі особливих точок  $\eta_1 = l_1$  визначається формулою

$$\sigma = -B \left( 1 - \frac{\eta_1}{l_1} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{B_1}{A} \rho_0 l_1},$$

де  $A$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $\rho_0$  - деякі сталі.

Проведено дослідження впливу характеристик жорсткості матеріалу пластини на розподіл напружень під штампом при різних значеннях параметра  $\lambda / \gamma$  (відношення розміру області контакту до кута розкриття пластини).

Для випадку  $(G/B_1)^{1/2} = 0,348107$ ,  $h_1/\gamma = 0,29$  (рис. 2) результати наведено графічно. У розрахунках в процесі встановлення залежності нормального напруження під штапом в залежності від значення відношення розміру області контакту до розміру вільної грані пластини використовуються результати таб.1.

Таблиця 1

Залежність  $l_1 = sn(K(k_1)\lambda/\gamma; k_1)$  від відношення  $\lambda/\gamma$ 

$\lambda/\gamma$	0,006	0,064	0,128	0,333	0,409	0,59	0,872	0,971
$l_1$	0,035	0,353	0,628	0,958	0,982	0,998	0,99995	1

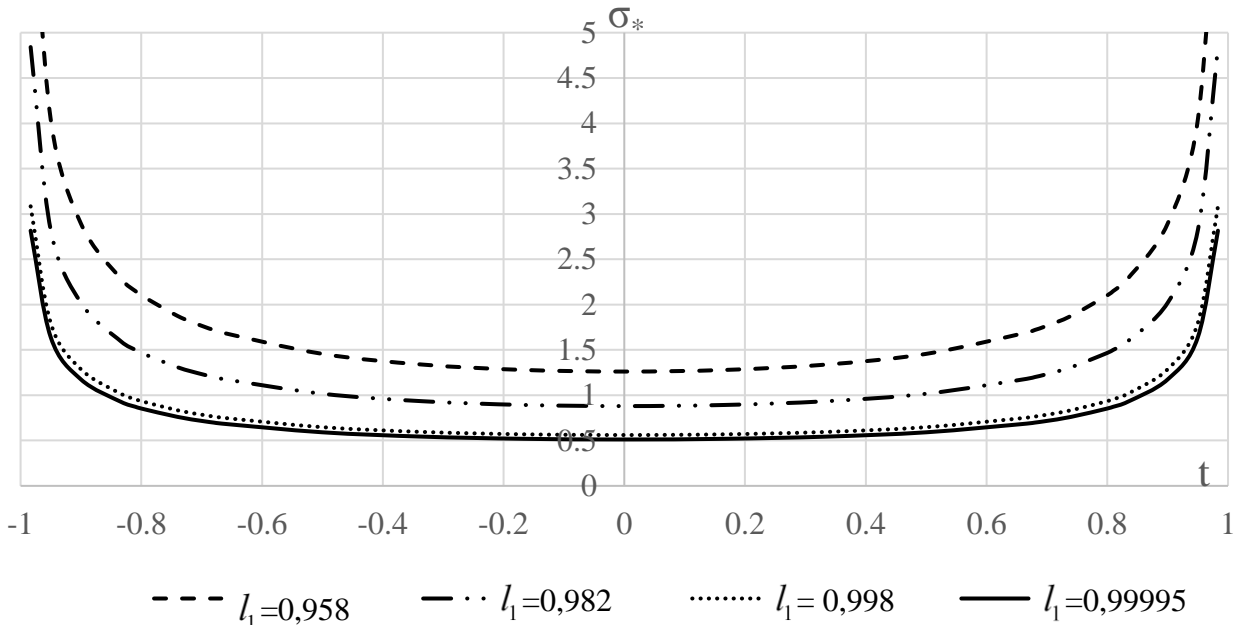


Рис. 2 - Розподіл нормальних напружень під штапом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту для  $(G/B_1)^{1/2} = 0,348107$  (склопластик) і  $h_1/\gamma = 0,29$ .

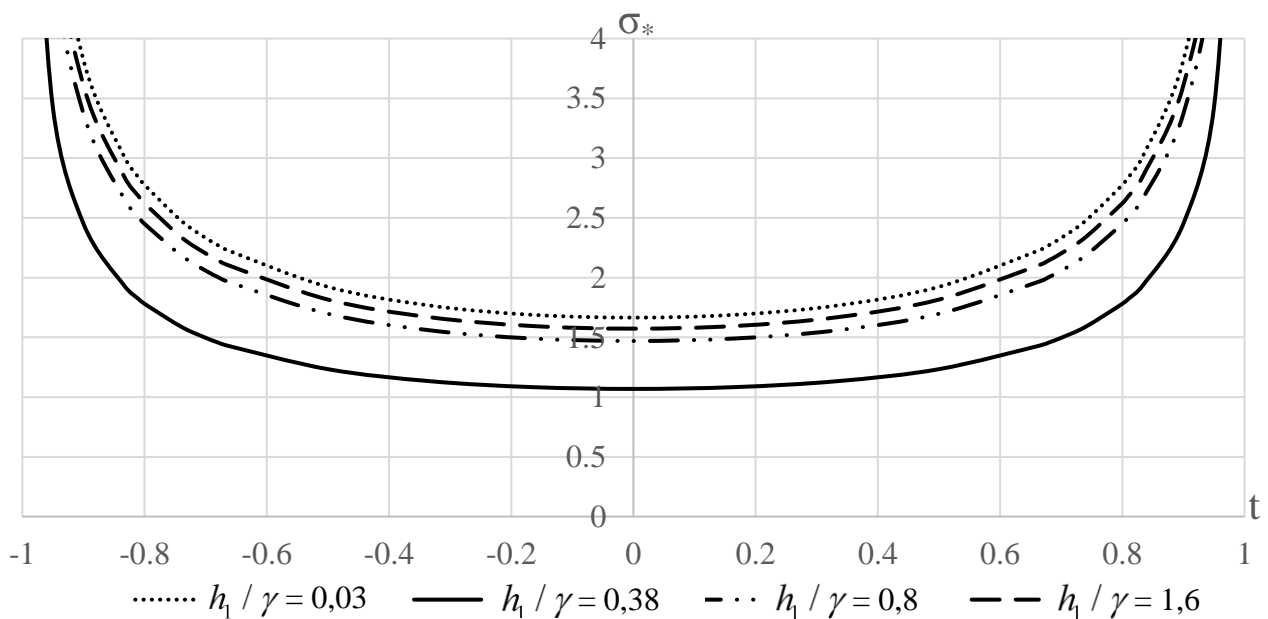


Рис. 3. - Розподіл нормальних напружень під штапом в залежності від розмірів пластини  $h_1/\gamma$  для  $(G/B_1)^{1/2} = 0,348107$  (склопластик) і  $\lambda/\gamma = 0,409$ .

У третьому розділі наводиться розв'язання контактної задачі для пластини з криволінійною анізотропією. Враховується, що під час взаємодії в області контакту виникають ділянка зчеплення та ділянки ковзання (аналог задачі Галіна).

Розглянемо взаємодію жорсткого штампу та півнескінченної пружної анізотропної пластини.

Нехай пружна пластина  $R_0 \leq r < \infty$ ,  $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$  закріплена за кромками  $\theta = \pm\gamma$ .

На границю  $r = R_0$  на ділянці  $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$  діє жорсткий штамп з основою, яка співпадає з границею  $r = R_0$ , навантаженою нормальним зусиллям  $P_0$  (штамп переміщується поступально, паралельно осі  $r$ ).

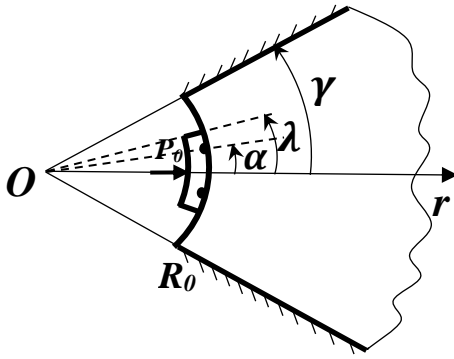


Рис.4 - півнескінченна пластина під дією жорсткого штамп, за наявності ділянок ковзання та зчеплення

Припускається, що в області контакту штамп з пластинною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. У зонах ковзання зсувні зусилля направлені у протилежні боки. Граничні точки ділянки зчеплення ( $\theta = \pm\alpha$ ), які необхідно визначити у ході розв'язання задачі, розташовані симетрично відносно осі  $r$  (рис. 4). Напруження в цих точках повинні бути обмежені та безперервні.

Пластина товщиною  $\delta$  працює в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Матеріал її є ортотропним, головні напрямки анізотропії співпадають з полярними координатами  $r, \theta$ . Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

Якщо замість полярних координат  $r, \theta$  ввести безрозмірні координати  $\xi, \eta$  співвідношеннями  $r = R_0 e^\xi$ ,  $\theta = \eta$ , то поставлена задача може бути зведена до інтегрування рівнянь рівноваги пластини у переміщеннях

$$B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0,$$

$$G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) = 0$$

при наступних граничних умовах:

– зовні штампу  $\sigma_1 = B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \mathcal{G}_2(v_\eta + u)) = 0$

$$\tau = G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma),$$

$$u = v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma);$$

– під штампом

$$u = \text{const} = c_0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda),$$

$$v = 0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha),$$

$$\tau = \text{sign}(\eta)\rho\sigma_1 \quad (\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda),$$

– на нескінченності переміщення та напруження дорівнюють нулю.

Крім того, повинні бути виконані умови рівноваги штампу.

Метод, за допомогою якого виконується розв'язання поставленої проблеми, дозволяє розкласти напружено-деформований стан пластини на дві складові, зв'язані між собою через граничні умови.

Визначення **напруженого стану першого типу** (що повільно змінюється у напрямку координати  $\xi$ ) у першому наближенні зводиться до інтегрування рівняння (5) при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{1,0} = B_1 R_0^{-1} u_\xi^{1,0} &= 0 & (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma); \\ \sigma_1^{1,0} = B_1 R_0^{-1} u_\xi^{1,0} &= 0 & (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma); \\ u^{1,0} &= \text{const} & (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \\ u^{1,0} &= 0 & (\eta = \pm \gamma); \end{aligned} \quad (9)$$

на нескінченності виконуються умови рівності нулю для шуканої функції та її похідних.

Нормальне напруження  $\sigma_1^0$  та складова дотичного напруження  $\tau^{1,0}$ , відповідна функції  $u^{1,0}$ , знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} u_\xi^{1,0} = (R_0 e^\xi)^{-1} \sqrt{GB_1} u_{x_1}^{1,0}, \\ \tau^{1,0} &= G (R_0 e^\xi)^{-1} u_\eta^{1,0} = G (R_0 e^\xi)^{-1} u_{y_1}^{1,0}. \end{aligned}$$

Напруження під штампом у першому наближенні виражається наступним чином:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0 \pi}{4\gamma K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (10)$$

а дотичне напруження  $\tau^{1,0}$  при  $\xi_1 = 0$ ,  $|\eta_1| > l_1$  знаходиться за формулою

$$\tau^{1,0}(\eta_1) = -\frac{P_0}{4\gamma K(l_1)} \sqrt{\frac{G}{B_1}} (\eta_1^2 - l_1^2)^{-1/2}. \quad (11)$$

Дотичне напруження під штампом ( $\xi = 0$ ,  $|\eta| < \lambda$ ) у першому наближенні визначається за формулами

$$\begin{aligned} \tau &= \text{sign}(\eta)\rho\sigma_1^0 & (\alpha \leq |\eta| < \lambda), \\ \tau &= GR_0^{-1} v_\xi^{2,0} = R_0^{-1} \sqrt{GB_2} v_{x_2}^{2,0} & (|\eta| \leq \alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Наведемо значення параметра  $\alpha_*$  у залежності від коефіцієнта тертя  $\rho$  для декількох значень величини  $(G/B_1)^{1/2}$ : 0.134 (вуглепластик КМУ-1), 0.348 (склопластик), 0.524 (свинець) (табл.2). У табл.3 записані значення  $\alpha_*$  при

$\rho = 0.5$  для декількох значень  $(G / B_1)^{1/2}$ .

Таблиця 2

Значення параметра  $\alpha_*$  у залежності від коефіцієнта тертя  $\rho$  для декількох значень величини  $(G / B_1)^{1/2}$

$\rho$ $\sqrt{G/B_1}$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.134	0	0.458248	0.992872	0.999934	0.99997	0.99999
0.348	0	0.0168766	0.584593	0.915952	0.985666	0.997628
0.524	0	0.0010584	0.253	0.669	0.886234	0.964

Таблиця 3

Значення  $\alpha_*$  при  $\rho = 0.5$  для декількох значень  $(G / B_1)^{1/2}$

$\sqrt{G/B_1}, \rho = 0.5$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\alpha_*$	0.9999	0.9576	0.7068	0.4228	0.2332

На основі отриманих результатів можна відмітити, якщо коефіцієнт тертя  $\rho$  дорівнює нулю, то  $q = 0$ ,  $\alpha_*^0 = 0$ , тобто ділянка зчеплення зникає. Зі зростанням  $\rho$  вона зростає, окрім того, вона залежить від характеристик жорсткості матеріалу пластини (величина  $(G / B_1)^{1/2}$ ). Так, при зменшенні  $(G / B_1)^{1/2}$  та постійному  $\rho \neq 0$  розмір ділянки зчеплення збільшується.

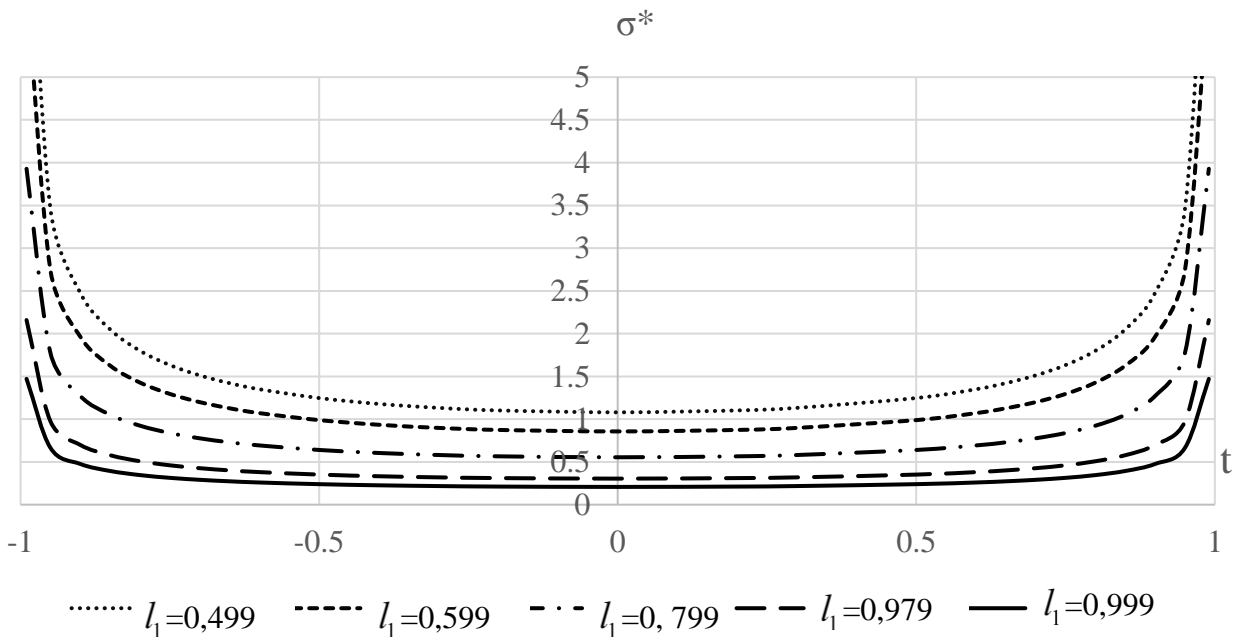


Рис. 5 - Розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту.

Як видно з рис.5, розмір штампа також впливає на значення нормальних напружень, які виникають у області контакту.

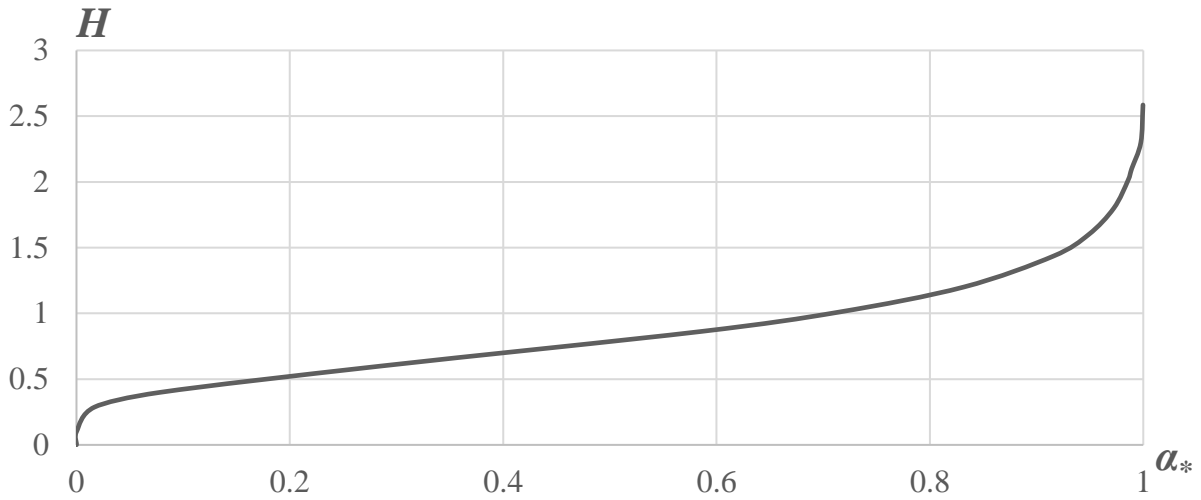


Рис. 6 - Залежність розміру ділянки зчеплення  $\alpha_*$  від параметру  $H = \rho(G/B_1)^{-1/2}$  для  $(G/B_1)^{1/2} = 0.348$  та наступних значень коефіцієнта тертя  $\rho: 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$ .

Далі у **третьому розділі** допомогою того ж самого підходу досліджується взаємодія жорсткого штампу та пружної анізотропної пластини скінченних розмірів.

Нехай пружна пластина  $R_0 \leq r \leq R_1$ ,  $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$  закріплена за кромками  $\theta = \pm\gamma$ . На границю  $r = R_0$  на ділянці  $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$  діє жорсткий штамп з основою, яка співпадає з границею  $r = R_0$ , навантаженою нормальним зусиллям  $P_0$  (штамп переміщується поступально, паралельно осі  $Ox$ ). Інша границя,  $r = R_1$ , залишається вільною (рис.7).

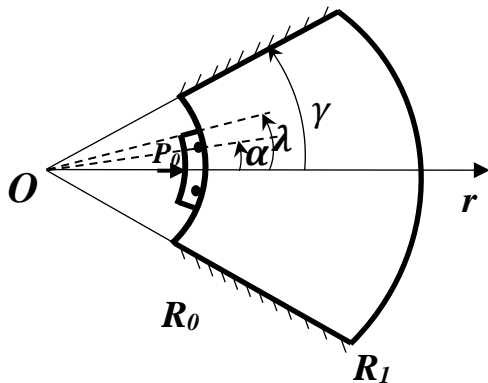


Рис.7 - скінченна пластина під дією жорсткого штампа, за наявності ділянок ковзання та зчеплення.

Припускається, що в області контакту штампа з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. Потрібно визначити закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

Задачу розв'язано аналогічним чином і з застосуванням асимптотичного методу.

Для цього випадку знайдено величину, яка описує осідання штампа:

$$c_0 = -\frac{P_0 R_0}{\pi} K(k_1) \ln(l_1) \left[ \sqrt{GB_1} B \cos(\pi\lambda / 2\gamma) \right]^{-1}. \quad \text{Нехай} \quad C_0^* = -\frac{\pi}{P_0 R_0} C_0, \quad \text{тоді}$$

вираз для обчислення шуканої сталої набуває вигляду  $C_0^* = K(k_1) \ln(l_1) \left[ \sqrt{GB_1} B \cos(\pi\lambda / 2\gamma) \right]^{-1}$ .

Обчислено значення  $C_0^*$  для різних значень характеристик жорсткості матеріалу  $(G/B_1)^{1/2}$ , при цьому обрано конкретне значення параметра  $\lambda/\gamma=0,409$  (відношення розміру області контакту до кута розкриття пластини). Результати обчислень наведено у табл.4.

Таблиця 4

Осідання штампу  $C_0^*$  для різних значень характеристик жорсткості матеріалу  $(G/B_1)^{1/2}$  ( $\lambda/\gamma=0,409$ ).

$(G/B_1)^{1/2}$	B	K(k1)	$\lambda/\gamma$	$l_l$	$C_0$
0,524401	2,99	3,36	0,409	0,882338	-0,02109
0,348107	5,03	4,86	0,409	0,963352	-0,00541
0,134264	11,32	16,06	0,409	0,999996	$-8,5 \cdot 10^{-7}$

У четвертому розділі пропонується застосування методу збурень до розв'язання контактних задач електропружності.

Нехай через кожену точку однорідної анізотропної пластини проходять дві взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії. Припускаючи, що ці площини перпендикулярні відповідно декартовим координатним осям  $x, y$  отримаємо наступні рівняння рівноваги, електростатики, електропружного стану і співвідношень Коші:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} = 0; \quad (14)$$

$$e_x = s_{11}^D \sigma_x + s_{12}^D \sigma_y + g_{11}^{\sigma_0} D_x;$$

$$e_y = s_{21}^D \sigma_x + s_{22}^D \sigma_y + g_{12}^{\sigma_0} D_x;$$

$$\gamma_{xy} = s_{66}^D \tau_{xy} + g_{26}^{\sigma, D} D_y;$$

$$\mathcal{E}_x = -g_{11}^{\sigma, D} \sigma_x - g_{12}^{\sigma, D} \sigma_y + \beta_{11}^{\sigma} D_x; \quad \mathcal{E}_y = -g_{26}^{\sigma, D} \tau_{xy} + \beta_{22}^{\sigma} D_y; \quad (15)$$

$$e_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (16)$$

З першого рівняння системи (14) випливає, що існує деяка скалярна функція  $\phi = \phi(x, y)$ , така, що

$$D_1 = D_x = \frac{\partial \phi}{\partial y};$$

$$D_2 = D_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Розв'язання тієї чи іншої крайової задачі може бути зведено до інтегрування системи рівнянь



$$\begin{aligned}
U_{xx} + \varepsilon U_{yy} + \varepsilon m V_{xy} - (a_{11} - \varepsilon a_{26}) \phi_{xy} &= 0; \\
\varepsilon V_{xx} + q V_{yy} + \varepsilon m U_{xy} + \varepsilon a_{26} \phi_{xx} - q a_{12} \phi_{yy} &= 0; \\
-(a_{11} - \varepsilon a_{26}) U_{xy} + \varepsilon a_{26} V_{xx} - q a_{12} V_{yy} + \\
+ \varepsilon b_{22} \phi_{xx} + b_{11} \phi_{yy} &= 0; \\
\varepsilon = \frac{G}{B_1}; \quad q = \frac{B_2}{B_1}; \quad m = 1 + \frac{v_2 B_1}{G} = 1 + \frac{v_1 B_2}{G}; \\
a_{11} = g_{11}^{\sigma, D} + v_2 g_{12}^{\sigma, D}; \\
a_{26} = g_{26}^{\sigma, D}; \quad a_{12} = g_{12}^{\sigma, D} + v_1 g_{11}^{\sigma, D}; \\
b_{22} = a_{26}^2 + \beta_{22}^{\sigma} \frac{\sigma}{G}; \\
b_{11} = g_{11}^{\sigma, D} a_{11} + g_{12}^{\sigma, D} a_{12} \frac{B_2}{B_1} + \beta_{11}^{\sigma} \frac{\sigma}{B_1},
\end{aligned} \tag{17}$$

при відповідних граничних умовах.

Компоненти тензора напружень і вектора напруженості в цьому випадку записуються наступним чином:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= B_1 (U_x + v_2 V_y - a_{11} \phi_y); \\
\sigma_2 &= B_2 (v_1 U_x + V_y - a_{12} \phi_y); \\
\tau &= G (U_y + V_x + a_{26} \phi_x); \\
\mathcal{E}_1 &= -B_1 a_{11} U_x - B_2 a_{12} V_y + B_1 b_{11} \phi_y; \\
\mathcal{E}_2 &= -G a_{26} U_y - G a_{26} V_x + G b_{22} \phi_x.
\end{aligned} \tag{18}$$

У реальних ортотропних матеріалах величина  $\varepsilon = \frac{G}{B_1}$  завжди значно менша за одиницю. Величину  $\varepsilon$  можна розглядати як малий параметр при асимптотичному інтегруванні системи (17). Таке припущення можна зробити тому, що відношення  $q = \frac{B_2}{B_1}$  може бути різним ( $q \leq 1$  або  $q \geq 1$ ), але завжди залишається більше за  $\varepsilon$ . Тому значення  $q$  в подальшому будемо вважати порядку одиниці.

Щоб урахувати усі можливі відмінності між величинами шуканих функцій та їх швидкостями зміни вздовж координат  $x$ ,  $y$  у пружних матеріалах вводяться афінні перетворення координат та шуканих функцій.

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha \varepsilon^{1/2} x; \quad \eta_1 = y; \quad U = U^{(1)}; \\
V &= \varepsilon^{3/2} V^{(1)}; \quad \phi = \varepsilon^{3/2} \phi^{(1)};
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= x; \quad \eta_2 = \beta \varepsilon^{1/2} y; \quad U = \varepsilon^{3/2} U^{(2)}; \\
V &= V^{(2)}; \quad \phi = \varepsilon^2 \phi^{(2)}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Із перетворень (19), (20) видно, що розв'язки системи рівнянь, отриманої

з (17) після введення перетворень (19) (або (20)), відносно повільно змінюються вздовж координати  $x$  (або  $y$ ) в порівнянні з аналогічними розв'язками системи, отриманої після застосування інших перетворень. При цьому в напруженому стані першого типу (повільно змінюється уздовж координати  $x$ ; перетворення (19)) основну роль грають компоненти переміщення  $u$ , нормальне напруження  $\sigma_1$ , складова дотичного напруження  $\tau$ , що залежить від переміщення  $U$ . У напруженому стані другого типу (перетворення (20)) переважає переміщення  $V$ , напруження  $\sigma_2$  і складова дотичного напруження  $\tau$ , що залежить від компоненти переміщення  $V$ . Повне дотичне напруження складається з суми обох складових; через нього ж і здійснюється зв'язок між цими двома типами напружених станів. Залежно від навантаження, одне з них має характер приграничного шару.

Таким чином, при механічному навантаженні п'єзоматеріалів, коли граничні умови задаються в напружених, переміщеннях або їх комбінаціях, розв'язки відповідних крайових задач будемо представляти у вигляді суперпозиції розв'язків цих двох типів напружено-деформованого стану:

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}; \quad V = V^{(1)} + V^{(2)}; \quad \phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}.$$

Розшукуючи функції  $U^{(n)}$ ,  $V^{(n)}$ ,  $\phi^{(n)}$  ( $n=1,2$ ) у вигляді ряду за степенями параметра  $\varepsilon$ , необхідно вибрати відповідні асимптотичні послідовності. Вид асимптотичної послідовності визначається структурою рівнянь (17) і порядком по  $\varepsilon$  похибки в крайових умовах, що виникає після розв'язання задачі в нульовому наближенні ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Щоб урахувати всі можливі випадки, ці функції визначатимемо у вигляді рядів за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  (з перетворень (19), (20) видно, що рядів за меншими степенями параметра  $\varepsilon$  виникнути не може):

$$\begin{aligned} U^{(n)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} U^{n,j}; \\ V^{(n)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} V^{n,j}; \\ \phi^{(n)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{n,j}, \quad (n=1,2). \end{aligned} \tag{21}$$

Коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$  також представимо у вигляді рядів по параметру  $\varepsilon^{1/2}$   
 $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \alpha_j$ ,  $\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \beta_j$  причому  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ , а коефіцієнти  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j=1,2,\dots$ )

знаходяться з тих же умов, що і для пружних матеріалів, а саме: в кожному з наближень в лівій частині рівнянь для визначення основних функцій  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$  повинні залишатися оператори Лапласа цих функцій, а в правій частині відсутні компоненти вектора переміщень або їх похідні (в пружній задачі для визначення основних функцій в кожному з наближень праві частини обертаються на нуль). Допоміжні ж функції  $V^{1,j}$ ,  $U^{2,j}$ ,  $\phi^{1,j}$ ,  $\phi^{2,j}$  через основні

виражаються простим інтегруванням. Зокрема, при  $q=1$  коефіцієнти  $\alpha_j = \beta_j$  ( $j=1,2,\dots$ ) визначаються за формулою

$$\alpha_j = \frac{1}{2} m^2 \left( \omega_{j-4} + \sum_{k=0}^{j-4} \alpha_k \omega_{j-4-k} \right);$$

$$\omega_s = \alpha_s + (1-m) \sum_{n=0}^{s-2} (2\alpha_n - c_n) \omega_{s-n-2}, \quad (22)$$

$$c_n = \sum_{s=0}^n \alpha_s \alpha_{n-s}, \quad (s \geq 1; \text{ при } s < 0, \omega_s = 0).$$

З цієї формули випливає, що коефіцієнт  $\alpha$  розкладається в ряд по степенях  $\varepsilon$ , а не  $\varepsilon^{1/2}$ . Якщо  $m=1$  (при цьому коефіцієнти Пуассона приймаються рівними нулю),  $\alpha$  розкладається в ряд за степенями  $\varepsilon^2$ .

Підставимо перетворення (19) в систему (17) і використаємо відповідні розкладання з урахуванням (22). Після розщеплення отриманої системи по параметру  $\varepsilon^{1/2}$  прийдемо до нескінченної системи рівнянь щодо функцій  $U^{1,j}$ ,  $V^{1,j}$ ,  $\phi^{1,j}$  ( $j=0,1,\dots$ ). При цьому будемо вважати, що  $\alpha_{11} \sim \varepsilon \beta_{11}$ ,  $b_{22} \sim \varepsilon^2 b_{11}$ ,  $a_{12} \sim a_{26} \sim \varepsilon^3 b_{11}$ . Наведемо ці рівняння для перших трьох наближень ( $j=0,1,2$ ).

При  $j=0$ :

$$U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} = 0; \quad qV_{\eta\eta}^{1,0} + mU_{\xi\eta}^{1,0} = 0; \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,0} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{1,0} = 0;$$

При  $j=1$ :

$$U_{\xi\xi}^{1,1} + U_{\eta\eta}^{1,1} = 0; \quad qV_{\eta\eta}^{1,1} + mU_{\xi\eta}^{1,1} = 0; \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,1} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{1,1} = 0; \quad (23)$$

При  $j=2$ :

$$U_{\xi\xi}^{1,2} + U_{\eta\eta}^{1,2} - a_{11}\phi_{\xi\eta}^{1,0} = 0; \quad qV_{\eta\eta}^{1,2} + mU_{\xi\eta}^{1,2} = 0; \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,2} + \varepsilon b_{11}\phi_{\eta\eta}^{1,2} = 0.$$

Тут і далі прийнято, що диференціювання (індекси  $\xi$ ,  $\eta$ ) виконуються за тими координатами  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  ( $n=1,2$ ), індекси яких збігаються з першими верхніми індексами функцій.

Після підстановки перетворень (20) в систему (17) з використанням відповідних розкладів і розщеплення за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій  $U^{2,j}$ ,  $V^{2,j}$ ,  $\phi^{2,j}$  ( $j=0,1,\dots$ ), які визначають рішення другого типу.

Із системи (23) випливає, що в перших двох наближеннях ( $j=0,1$ ) основні функції  $U^{1,j}$  ( $V^{2,j}$  для другого напруженого стану) визначаються з рівнянь Лапласа (при  $q=1$  або очевидній заміні однієї зі змінних), а допоміжні функції виражаються простим інтегруванням через основні.

У третьому наближенні ( $j=2$ ) і далі для напруженого стану першого типу функції  $U^{1,j}$  знаходяться з рівняння Пуассона при відомій правій частині, яка містить тільки функцію  $\phi$ , знайдену в попередніх наближеннях. Аналогічна ситуація має місце в напруженому стані другого типу для функції  $V^{2,j}$ , але

починаючи з четвертого наближення ( $j=3$ ) і далі. Використовуємо перетворення (19), (20) і розкладання в виразах для переміщень, напружень і напруженостей (18) і представимо їх у вигляді рядів:

$$\begin{aligned}
U &= U^{1,0} + \varepsilon^{1/2}U^{1,1} + \varepsilon U^{1,2} + \dots; \\
V &= V^{2,0} + \varepsilon^{1/2}V^{2,1} + \varepsilon V^{2,2} + \varepsilon^{3/2}(V^{2,3} + V^{1,0}) + \dots; \\
\sigma_1 &= \sigma_{1,0} + \varepsilon^{1/2}\sigma_{1,1} + \varepsilon\sigma_{1,2} + \dots = \\
&= B_1\varepsilon^{1/2}\left[U_\xi^{1,0} + \varepsilon^{1/2}(U_\xi^{1,1} + \nu_2 U_\eta^{2,0}) + \varepsilon(U_\xi^{1,2} + U_\xi^{2,0} + \nu_2 U_\eta^{2,1} - a_{11}\phi_\eta^{1,0}) + \dots\right]; \\
\sigma_2 &= \sigma_{2,0} + \varepsilon^{1/2}\sigma_{2,1} + \varepsilon\sigma_{2,2} + \dots = B_2\varepsilon^{1/2}\left[V_\eta^{2,0} + \varepsilon^{1/2}(V_\eta^{2,1} + \nu_1 U_\xi^{1,0}) + \dots\right]; \\
\tau &= \tau_0 + \varepsilon^{1/2}\tau_1 + \varepsilon\tau_2 + \dots = G\left[U_\xi^{1,0} + V_\xi^{2,0} + \varepsilon^{1/2}(U_\eta^{1,1} + V_\xi^{2,1}) + \varepsilon(U_\eta^{1,2} + V_\xi^{2,2}) + \dots\right]; \\
\mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_{1,0} + \varepsilon^{1/2}\mathcal{E}_{1,1} + \varepsilon\mathcal{E}_{1,2} + \dots = -B_1 a_{11} \varepsilon^{1/2}\left[U_\xi^{1,0} + \varepsilon^{1/2}U_\xi^{1,1} + \varepsilon(U_\xi^{1,2} + U_\xi^{2,0}) + \dots\right] - \\
&\quad - B_2 a_{12} \varepsilon^{1/2}V_\eta^{2,0} + B_1 b_{11} \varepsilon \varepsilon^{1/2}\left[\phi_\eta^{1,0} + \varepsilon^{1/2}\phi_\eta^{1,1} + \varepsilon(\phi_\eta^{1,2} + \phi_\eta^{2,0}) + \dots\right]; \quad (24) \\
\mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_{2,0} + \varepsilon^{1/2}\mathcal{E}_{2,1} + \varepsilon\mathcal{E}_{2,2} + \dots = -G a_{26} \left[(U_\eta^{1,0} + V_\xi^{2,0}) + \varepsilon^{1/2}(U_\xi^{1,1} + U_\xi^{2,1}) + \right. \\
&\quad \left. + (U_\eta^{1,0} + V_\xi^{2,0}) + \varepsilon^{1/2}(U_\xi^{1,1} + U_\xi^{2,1}) + \dots\right] - G b_{22} \varepsilon^2 \left[(\phi_\xi^{1,0} + \phi_\xi^{2,0}) + \varepsilon^{1/2}(\phi_\xi^{1,1} + \phi_\xi^{2,1}) + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon(\phi_\xi^{1,2} + \phi_\xi^{2,2}) + \dots\right];
\end{aligned}$$

При цьому враховувалося, що коефіцієнти Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  порядку  $\varepsilon^{1/2}$ ,  $a_{12}$  порядку  $\varepsilon^2 b_{11}$ ,  $a_{11}$  порядку  $\varepsilon b_{11}$ . Зі співвідношень (23), (24) видно, що напружено-деформовані стани першого і другого типів пов'язані тільки через граничні умови. Оскільки основні функції  $U^{2,j}$ ,  $V^{2,j}$  визначаються з рівнянь Лапласа (Пуассона), то ефективність методу залежить від того, чи вдається сформулювати відповідні крайові задачі для знаходження цих функцій.

**Аналіз граничних умов.** Нехай на лінії, яка обмежує (наприклад,  $x = const$ ,  $V^{2,j}$ ) відомі нормальні  $\sigma_1$  і дотичні  $\tau$  напруження

$$\sigma_1 = f_1(y); \quad \tau = f_2(y).$$

Припускаємо, що ці функції можуть бути представлені рядами

$$f_n(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_{n,j}(y), \quad (n=1,2).$$

(У іншому випадку усі коефіцієнти при  $\varepsilon^{j/2}$  обертаються на нуль.)

Тоді на лінії, що обмежує  $x = const$

$$\sigma_{1,j} = f_{1,j}; \quad \tau_j = f_{2,j}.$$

Для наочності докладно розглянемо нульове наближення ( $j=0$ ). Використовуючи результати попереднього пункту, приходимо до інтегрування рівнянь напруженого стану:

- першого типу (24) ( $j=0$ ) при наступних граничних умовах для функції

$$U_\xi^{1,0}: \quad U_\xi^{1,0} = (B_1 \varepsilon^{1/2})^{-1} f_{1,0};$$

- другого типу (25) ( $j=0$ ) з крайовими умовами для функції  $V^{2,0}$ :  
 $V_{\xi}^{2,0} = G^{-1} f_{2,0} - U_{\eta}^{1,0}$ .

Якщо на лінії, що обмежує  $x = const$  задані зміщення, маємо

$$U = \psi_1(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{1,j}, \quad V = \psi_2(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{2,j}.$$

На цій лінії ( $x = const$ )  $U_j = \psi_{1,j}$ ,  $V_j = \psi_{2,j}$  та з (25) граничні умови для функцій  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$  при  $j=0$  запишуться відповідно

$$U^{1,0} = \psi_{1,0}, \quad V^{2,0} = \psi_{2,0}.$$

Аналогічним чином неважко отримати крайові умови для функцій  $U^{1,0}$ ,  $V^{2,0}$  в разі мішаної задачі. Аналіз граничних умов показує, що для всіх крайових задач граничні умови в нульовому наближенні ( $j=0$ ) напруженого стану першого типу не залежать ні від більш високих наближень, ні від рішень рівнянь напруженого стану другого типу. Тому функція  $U^{1,0}$  знаходиться незалежно від інших. Потім простим інтегруванням через  $U^{1,0}$  визначаються функції  $V^{1,0}$ ,  $\phi^{1,0}$ . Після цього повністю визначаються граничні умови для знаходження функції  $V^{2,0}$  також з рівняння Лапласа. Розв'язавши це рівняння і визначивши функції  $U^{2,0}$  і  $\phi^{2,0}$ , отримаємо граничні умови для знаходження функції  $U^{1,1}$  і так далі.

Зауважимо, що отримані вище результати повністю відповідають задачам магнітопружності, якщо виконати відповідні заміни.

Якщо відбувається лише електрична взаємодія, то компоненти вектора переміщень будуть суттєво меншими, ніж при механічному навантаженні. Припускаючи, що ці компоненти порядку  $\varepsilon^2$ , а диференціювання за координатами не змінює порядку, у нульовому наближенні ( $j=0$ ) у вихідних змінних  $x$ ,  $y$  функція  $\varphi^{\exists}(x, y)$  визначається з рівняння

$$\varepsilon b_{22} \varphi_{xx}^{\exists} + b_{11} \varphi_{yy}^{\exists} = 0 \quad (25)$$

при відповідних граничних умовах, а компоненти вектора переміщень  $U^{\exists}$ ,  $V^{\exists}$  через функцію  $\varphi^{\exists}(x, y)$  знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} U_x^{\exists} &= a_{11} \varphi_y^{\exists}, \quad V_y^{\exists} = a_{12} \varphi_y^{\exists}, \\ U_y^{\exists} &= -a_{11} k^{-2} \varphi_x^{\exists}, \quad V_x^{\exists} = a_{12} \varphi_x^{\exists}, \end{aligned} \quad (26)$$

звідки

$$\text{де} \quad k^2 = \frac{b_{11}}{\varepsilon b_{22}}.$$

Якщо ж урахувати, що  $\varepsilon b_{22} < b_{11}$ , то у рівнянні (25) у першому наближенні взагалі може залишитись лише другий доданок. Але, оскільки граничні умови для функції  $\varphi^{\exists}(x, y)$  можуть бути довільними, її слід знаходити з рівняння (25).

При комбінованому, механічному та електричному (або ж магнітному), навантаженні завдяки лінійності можна розглядати ці дві задачі (три види

напружених станів) окремо. Повний же розв'язок представляти у вигляді суперпозиції розв'язків окремих задач.

Узагальнення асимптотичного методу на двовимірні задачі електропружності перевірено для ряду окремих модельних задач:

1. Прямокутна пластина  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  розтягується у напрямку осей  $Ox$  і  $Oy$  зусиллями  $p_1$  і  $p_2$  відповідно. Дотичні зусилля, а також індукція на сторонах пластини дорівнюють нулю. Тоді при  $x=0, x=a$ :  $\sigma_1 = p_1, \tau = 0, D_1 = 0$ ; при  $y=0, y=b$ :  $\sigma_2 = p_2, \tau = 0, D_2 = 0$ .

2. Якщо при  $x=0, x=a$ :  $\sigma_1 = \tau = 0, D_1 = d_1^0$ ; при  $y=0, y=b$ :  $\sigma_2 = \tau = 0, D_2 = d_2^0$ , то у цьому випадку  $U = V = 0$  (при  $C_2 = 0$ ),  $\varphi^{\exists} = -d_2^0 x + d_1^0 y$ , а напруження, які виникають від електричного впливу, і компоненти вектора напруженості електричного поля визначаються за формулами

$$\sigma_1^{\exists} = -B_1 a_{11} d_1^0, \sigma_2^{\exists} = -B_2 a_{12} d_1^0, \tau^{\exists} = -G a_{26} d_2^0;$$

$$\Xi_1^{\exists} = B_1 b_{11} d_1^0, \Xi_2^{\exists} = G b_{22} d_2^0.$$

3. Якщо на границі півплощини  $x \geq 0, |y| < \infty$  у початку координат заданий вектор індукції електричного поля

$$D_1 = \varphi_y^{\exists} = d_1^0 \delta(y), D_2 = -\varphi_x^{\exists} = d_2^0 \delta(y), (x=0),$$

то розв'язання рівняння (4.14) при вказаних граничних умовах має вигляд

$$D_1 = \frac{1}{\pi k} \frac{d_1^0 k^2 x - d_2^0 y}{k^2 x + y^2}, D_2 = \frac{k}{\pi} \frac{d_1^0 y + d_2^0 x}{k^2 x + y^2}, k^2 = \frac{B_1 b_{11}}{G b_{22}}.$$

4. Нехай на границю півплощини  $x \geq 0, |y| < \infty$  у початку координат  $(0;0)$  діє нормальна зосереджена сила  $P_0$ , дотичні напруження при  $x=0$  відсутні, на нескінченності похідні компонент вектора переміщень обертаються на нуль, тобто граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_1 = -P_0 \delta(y), \tau = 0 (x=0),$$

на нескінченності усі умови нульові.

## ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науковою роботою, у якій за допомогою методу збурень отримані розв'язки нових складних контактних задач лінійної теорії пружності з урахуванням неідеальних властивостей матеріалу досліджуваного тіла та складної геометрії області контакту, запропоноване узагальнення методу дозволило провести асимптотичний аналіз двовимірних задач електропружності. Розроблений в роботі підхід та отримані розв'язки вирішують актуальні питання механіки деформівного твердого тіла.

Результати дисертаційного дослідження дають підставу сформулювати відповідні висновки:

- отримані аналітичні розв'язки для задачі про дію жорсткого штампу на

пружну ортотропну пластину скінченних розмірів з циліндричною анізотропією. В процесі розв'язання враховано силу тертя, що виникає під час взаємодії.

- проведено дослідження впливу характеристик жорсткості матеріалу пластини на розподіл напружень під штампом при різних значеннях параметра  $\lambda/\gamma$  (відношення розміру області контакту до кута розкриття пластини). Графічно побудовано відповідні залежності.

- в процесі розв'язання контактної задачі асимптотичним методом зроблено висновки щодо зв'язку між розмірами області взаємодії, кута розкриття сектора та коефіцієнтом тертя.

- отримані аналітичні розв'язки для задачі про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний напівнескінченний сектор з циліндричною анізотропією. В процесі розв'язання було враховане існування ділянок ковзання і зчеплення під штампом. Визначені закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

- для цієї задачі наведені значення параметра  $\alpha_*$  (розмір ділянки зчеплення) у залежності від коефіцієнта тертя  $\rho$  для декількох значень величини  $(G/B_1)^{1/2}$ : 0.134 (вуглепластик КМУ-1), 0.348 (склопластик), 0.524 (свинець).

- знайдено розподіл нормальних напружень під штампом в залежності від розмірів вільної грані пластини і області контакту.

- отримані аналітичні розв'язки для задачі про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний сектор скінченних розмірів з циліндричною анізотропією. У постановці задачі зазначено існування ділянок ковзання і зчеплення під штампом.

- для цієї задачі отримані закони розподілу напружень під штампом, розмір ділянки зчеплення, обчислено значення  $C_0^*$  (величину осідання штамп) для різних значень характеристик жорсткості матеріалу  $(G/B_1)^{1/2}$ .

- наведено узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності.

- показано що, цілком можливо сформулювати відповідні крайові задачі для основних функцій, що дозволяє представити вихідну задачу електропружності у вигляді суперпозиції більш простих крайових задач, де механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, але мають взаємний вплив через крайові умови.

- за допомогою запропонованого узагальненого методу розв'язаний ряд модельних задач.

З використанням застосованого підходу можливе проведення попередньої оцінки напружено-деформованого стану конструкцій, механізмів або деталей при різних умовах контакту, можуть бути отримані аналітичні розв'язки різноманітних практично важливих задач.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Шпорта А.Г. Контактна взаємодія стрингера та ортотропної пластини з криволінійною анізотропією. *Проблеми механіки суцільного середовища*. Дніпро, 2020. Вип. 30. С. 185-194. DOI: <https://doi.org/10.15421/4219037>.

2. Shporta A., Kagadiy T., Onopriyenko O. Asymptotic method in two-dimensional problems of electroelasticity. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2020. № 1. P. 130-134. DOI: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/130>.

3. Kagadiy T., Shporta A. Mathematical modeling in the calculation of reinforcing element. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2019. № 5. P. 60-64. DOI: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/10>.

4. Kagadiy, T. S., Shporta, A. H. The asymptotic method in problems of the linear and nonlinear elasticity theory. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. Dnipro, 2015. № 3. P. 76-81.

URL: <http://nvngu.in.ua/index.php/ru/component/jdownloads/finish/54-03/8331-2015-03-shporta/0>.

5. Шпорта А., Кагадій Т. Застосування методу збурень до розв'язання деяких контактних задач. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій* : матеріали міжнародної наук.-тех. конф., присвяч. 100-й річниці з дня народження акад. В. І. Моссаковського (м. Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.) Дніпро, 2019. С.136-137.

6. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Урахування тертя та зчеплення у контактній задачі для криволінійного сектора. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2019. № 1. С. 126-133.

7. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні питання математичного моделювання*. Т. 3. № 2.1, 2020. С. 107–116. DOI: <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.10>

8. Шпорта А.Г., Кагадій Т.С. Математичне моделювання в задачах електропружності. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2019. № 2(69). Ч.3. С. 216-221.

9. Решение задач для пластин с эллиптическим и гипотрохоидным отверстием, А. Г. Шпорта, Т.С. Кагадий, 2012 р., *СевНТУ, конференція*

10. Шпорта А.Г., Кагадий Т.С. Точные решения некоторых задач для пластин с отверстием. 2013р, *конференція, присвячена 100-чю кафедри вищої математики НГУ*.



## АНОТАЦІЯ

**Шпорта А. Г. Застосування методу збурень до розв'язання контактних задач та його узагальнення для електропружних матеріалів.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» (фізико-математичні науки). – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено узагальненню методу збурень та його застосуванню для дослідження напружено-деформованого стану у двовимірних задачах теорії пружності та електропружності.

Розв'язано контактну задачу теорії пружності про дію жорсткого штампу на пружну ортотропну пластину з циліндричною анізотропією. У процесі розв'язання враховується сила тертя, що виникає під час взаємодії. Отримано розподіл напружень під штампом. Встановлено зв'язок між розмірами області взаємодії, кута розкриття сектора та коефіцієнтом тертя. Досліджено вплив розмірів пластини на розподіл нормальних напружень під штампом для окремих значень параметрів жорсткості матеріалу.

Наведено розв'язання контактної задачі теорії пружності про дію жорсткого штампу на пружний ортотропний криволінійний напівнескінченний сектор з циліндричною анізотропією. При цьому враховано, що в області контакту штамп з пластиною існують дві ділянки ковзання, які примикають до кінцевих точок області контакту, та ділянка зчеплення, розташована між ними. Визначено закони розподілу напружень під штампом і розмір ділянки зчеплення.

Також розглянуто більш складний випадок для кругової пластини скінченних розмірів. Аналогічним чином враховано існування ділянок ковзання та зчеплення в області контакту штамп з пластиною. Для задачі у такій постановці обчислено значення осідання штамп при різних значеннях характеристик жорсткості матеріалу.

Проведено узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності. Показано, що цілком можливо звести такі задачі до послідовного розв'язування крайових задач теорії потенціалу. Розв'язано ряд модельних задач.

**Ключові слова:** теорія пружності, контактні задачі, вдавлювання штамп, криволінійна анізотропія, тертя та зчеплення, ковзання, асимптотичний метод, напружено-деформований стан, електропружність та електромагнітопружність.

## ABSTRACT

**Shporta A. H. Perturbation method application to solving contact problems and its generalization for electroelastic materials.** – Qualification research paper, manuscript copyright.

Thesis for Science Candidate Degree in Physics and Mathematics by speciality 01.02.04 “Mechanics of the Deformable Solids” (Physics and Mathematics). – Oles Honchar Dnipro University, Dnipro, 2021.

The dissertation is devoted to the generalization of the perturbation method and its application for the study of the stress-strain state in two-dimensional problems of the theory of elasticity and electroelasticity.

The contact problem of the theory of elasticity about the action of a rigid stamp on an elastic orthotropic plate with cylindrical anisotropy is solved. The solution takes into account the friction force that occurs during the interaction. The stress distribution under the stamp is obtained. The relationship between the size of the interaction area, the angle of opening of the sector and the coefficient of friction is obtained. The influence of plate sizes on the distribution of normal stresses under the stamp for individual values of material stiffness parameters was investigated.

The solution of contact problem of the theory of elasticity about the action of a rigid stamp on an elastic orthotropic curvilinear semi-infinite or finite sector with cylindrical anisotropy is given. It is taken into account that in the area of the contacts of the stamp with the plate there are two areas of slip, which are adjacent to the end points of the area of contacts, and the area of adhesion located between them. The laws of stress distribution under the stamp and the size of the coupling section area determined.

A more complex case for a circular plate of finite dimensions is also considered. Similarly, the existence of areas of slip and adhesion in the area of contact of the stamp with the plate is taken into account. For the problem the value of the settling of the stamp at different values of the stiffness characteristics of the material is calculated.

The generalization of the small parameter method to two-dimensional problems of electroelasticity is carried out. It is shown that it is quite possible to formulate the corresponding boundary value problems of the theory of elasticity for the basic equations and in the future, they are reduced to simpler boundary value problems. A number of model problems have been solved.

**Keywords:** elasticity theory, contact problems, stamp indentation, curvilinear anisotropy, friction and adhesion, sliding, asymptotic method, stress-strain state, electroelasticity and electromagnetic elasticity.

**ШПОРТА Анна Григорівна**

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЗБУРЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ  
КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ТА ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЛЯ  
ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ**

(Автореферат)

Підписано до друку 25.01.2021. Формат 60x90/16.  
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 2,3 Обл.-вид. арк.2,4  
Тираж 100 прим. Зам. №1139  
Віддруковано ФОП «Кучугурний Ю.М.»,  
свідоцтво про державну реєстрацію №2 224 000 0000 073863  
49000, вул. Воскресенська, 11, м. Дніпро.  
тел.: (096) 423-60-71