Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ЗЕЛЕНСЬКИЙ АНАТОЛІЙ ГРИГОРОВИЧ

УДК 539.3

ВАРІАНТ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИН І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ПРИ СТАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

01. 02. 04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дніпро – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі будівельної механіки та опору матеріалів ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури" Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Приварников Аркадій Костянтинович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Сторожук Євген Анатолійович,
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ;

доктор фізико-математичних наук, професор
Марчук Михайло Володимирович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
завідувач відділу моделювання композитних структур і складних систем;

доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв Володимир Іванович,
Національний університет "Запорізька політехніка",
професор кафедри механіки.

Захист відбудеться " 26 " лютого 2021 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10 при Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за адресою: м. Дніпро, проспект Д. Яворницького, 35, корпус. 3, ауд. 25.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці імені Олеся Гончара Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара за адресою: 49010, м. Дніпро, вул. Казакова, 8.

Відгук на автореферат надсилати за адресою: 49010, м. Дніпро,
пр. Гагаріна, 72, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
вченому секретарю спеціалізованої вченої ради Д 08.051.10.

Автореферат розісланий « 25.» …січня………………2021 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої радиД 08.051.10,
доктор технічних наук, професор А. Ю. Дреус

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

У роботі вирішена актуальна наукова проблема механіки деформівного твердого тіла, яка полягає в побудові нових ефективних варіантів математичної теорії (МТ) нетонких фізично лінійних і нелінійних за Каудерером однорідних і шаруватих пластин та пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні з позицій тривимірної теорії пружності (ТП), розробленні нових аналітичних точних і наближених методів розв'язання систем диференціальних рівнянь (СДР) високих порядків, отриманні частинних і загальних розв'язків граничних задач варіантів МТ вказаних елементів та числових залежностей напружено-деформованого стану (НДС) від механіко-геометричних характеристик (МГХ), типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах. Суттєвим у вирішенні наукової проблеми є те, що побудовані варіанти МТ дають реальну можливість аналітичного розв'язання граничних задач для вказаних елементів і визначення НДС з високою точністю.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Однорідні та шаруваті пластини і оболонки застосовуються в різних об'єктах енергетики, машинобудування, техніки, у будівництві та в інших галузях сучасної промисловості. Забезпечення надійної роботи таких конструкцій потребує залучення для їх розрахунку високоточних теорій та адекватних їм математичних методів розв'язування відповідних граничних задач, які б ураховували усі компоненти НДС, як функції трьох змінних, та крайові ефекти (КЕ) типу пограничного шару.

Відомо, що розрахунки на основі класичних теорій (КТ) нетонких пластин і оболонок та у випадках з великим градієнтом змінювання НДС дають результати, які можуть суттєво відрізнятися від точних, отриманих у тривимірній постановці.

Некласичні уточнені теорії пластин та оболонок, які основані на різних гіпотезах, зокрема, теорії типу Тимошенка-Рейснера, які на сьогодні в основному використовуються в працях вітчизняних і особливо зарубіжних авторів, також не можуть гарантовано з достатньою точністю описувати НДС пластин і оболонок, оскільки знаходження НДС з будь-якою точністю в принципі неможливо, що обумовлено рамками відповідних гіпотез; ці теорії потребують у кожному випадку обґрунтованого використання для розв'язання граничних задач, що пов'язано зі встановленням конкретних рамок придатності їх в залежності від класу задач.

З іншого боку, існуючі варіанти МТ, які основані на розвиненні компонент НДС у нескінченні ряди, потребують вдосконалення і підвищення ефективності по точності і можливості аналітичного розв'язання отримуваних СДР рівноваги (СДРР) з одержанням числових результатів. Розв'язання граничних задач для лінійно пружних пластин та оболонок довільної товщини в тривимірній постановці пов'язано з достатніми математичним труднощами. Тільки в обмежених випадках тривимірна задача ТП для пластин і оболонок допускає можливість знаходження аналітичного розв'язку. Складність розв'язання у точній тривимірній постановці значно підвищується, якщо розглядаються непрості крайові умови, шаруваті елементи або фізично нелінійні задачі. Числові результати на основі тривимірних рівнянь ТП для пластин і пологих оболонок отримані на сьогодні в обмеженій кількості і не дають повної можливості оцінити точність НДС вказаних елементів за різними теоріями.

Таким чином, розв'язання граничних задач статики для однорідних і шаруватих фізично лінійних і нелінійних пластин та пологих оболонок довільної сталої товщини в рамках КТ та уточнених теорій, що базуються на основі гіпотез, для широкого класу задач не дає гарантованих високоточних результатів, а з іншого боку – розв'язання їх на основі тривимірної ТП є занадто складною задачею математичної фізики, в якій невідомі функції залежать від трьох змінних.

Звідси і випливає обґрунтування вибору актуальної наукової проблеми для дослідження, вирішення якої полягає в побудові нових високоточних варіантів МТ нетонких пластин і пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні, розробленні ефективних аналітичних методів інтегрування отримуваних СДРР високих порядків, і щоб аналітичне розв'язання граничних задач для вказаних елементів було простішим від розв'язку відповідних тривимірних задач ТП і давало реальну можливість отримання числових залежностей НДС цих елементів від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень варіантів МТ.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури" (ПДАБА) на кафедрі будівельної механіки та опору матеріалів (БМОМ) за планами наукових досліджень держбюджетної науково-дослідної тематики: "Розробка математичних моделей ітераційних теорій, точних та асимптотичних методів розрахунку тонкостінних конструкцій" (№ держреєстрації 0197U001652, 1997-1999 рр.), "Розроблення математичних моделей та ітераційних теорій розрахунку однорідних та шаруватих оболонок і пластин із фізично лінійних та нелінійних матеріалів (№ держреєстрації 0100U003689, 2000-2001 рр.), "Розроблення математичних моделей і уточнених теорій розрахунку пружних основ та фізично нелінійних пологих оболонок" (№ держреєстрації 0102U005582, 2002-2003 рр.), "Розробка методик розрахунку фізично лінійних та нелінійних оболонок, пластин і балок на основі уточнених теорій" (№ держреєстрації 0104U000230, 2004-2006 рр.), "Напружено-деформований стан, стійкість і коливання стержневих систем, однорідних і неоднорідних пластин та оболонок з урахуванням реальних властивостей матеріалів" (№ держреєстрації 0106U005339, 2006-2010 рр.), "Напружено-деформований стан, стійкість і коливання стержневих систем, однорідних і неоднорідних пластин та оболонок з урахуванням реальних властивостей матеріалів" (№ держреєстрації 0111U606484, 2011-2015 рр.), "Міцність, жорсткість, стійкість і коливання однорідних і неоднорідних стержнів, пластин, оболонок та композиційних конструкцій, включаючи об'єкти біологічного походження" (№ держреєстрації 0116U006049, 2016-2020 рр.) та за планом досліджень теми докторської дисертації. Результати докторської дисертації висвітлювались у розділах по розв'язанню граничних задач для нетонких лінійно і нелінійно пружних пластин і пологих оболонок.

Мета і задачі дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є: 1) побудова нових варіантів МТ однорідних і шаруватих лінійно та нелінійно пружних за Каудерером пластин і пологих оболонок довільної сталої товщини з позицій тривимірної ТП на основі методології, яка поєднує метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов на бічній поверхні, як функцій трьох змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра, точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення між шарами, використання варіаційного принципу Рейснера (ВПР), узагальнення методики взаємозв'язаних рівнянь (МВР); 2) розроблення нових аналітичних точних і наближених методів розв'язання СДРР високих порядків, до яких зводяться граничні задачі статики варіантів МТ; 3) отримання частинних і загальних розв'язків граничних задач для вказаних елементів та числових залежностей НДС від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах МТ.

Досягнення поставленої мети передбачає:

– нову постановку граничних задач статики для вказаних пластин та пологих оболонок при їх довільному статичному поперечному навантаженні з позицій тривимірної ТП і зведення їх до розв'язання двовимірних крайових задач;

– побудову нових варіантів МТ: 1) нетонких однорідних транстропних пластин та пологих оболонок у високих наближеннях; 2) нетонких однорідних ортотропних і ізотропних фізично нелінійних пластин (ФНП) та пологих фізично нелінійних оболонок (ФНО), основаних на комплексному методі зведення тривимірних задач ТП до двовимірних, який базується на ВПР, поєднанні методу розвинення компонент НДС у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра і методу збурень пружних властивостей матеріалу з використанням МВР; 3) нетонких шаруватих лінійно і нелінійно пружних пластин та пологих оболонок симетричної і несиметричної структур, які базуються на методі зведення тривимірних задач ТП до двовимірних, основаному на розвиненні компонент НДС в межах кожного шару у ряди за комбінаціями поліномів Лежандра в поєднанні (для фізично нелінійних елементів) з методом послідовних наближень (МПН);

– узагальнення і розробку єдиної методики математичних перетворень отриманих СДРР високих порядків до зручних (визначальних) СДР;

– аналіз і дослідження отриманих СДРР з частинними похідними для різних наближень МТ, які описують внутрішній НДС (ВНДС), вихровий і потенціальний КЕ (ВКЕ, ПКЕ);

– обґрунтування єдиності розв'язків другої граничної задачі і збіжності рядів за поліномами Лежандра та за малим параметром;

– розробку нового і узагальнення операторного методу зведення неоднорідних ДР високих порядків із частинними похідними МТ нетонких пластин до неоднорідних ДР 2-го порядку;

– розробку нового методу інтегрування одержаних СДРР високих порядків нетонких пластин і отримання частинних і загальних розв'язків;

– побудову: 1) нових наближених методів розв'язання отриманих СДР високих порядків для пластин і пологих оболонок довільної товщини, які спрощували б знаходження частинних і загальних розв'язків; 2) аналітичних розв'язків граничних задач для вказаних елементів в одинарних та подвійних тригонометричних рядах;

– отримання аналітичних розв'язків граничних задач варіанта МТ товстих транстропних пластин при переривчастих і локальних навантаженнях, та побудову фундаментальних розв'язків одержаних СДРР високих порядків;

– розвинення методу спеціальних функцій (у граничних задачах для круглих пластин) і інтегральних перетворень для розв'язання СДРР високих порядків;

– розробку алгоритмів і пакетів математичних програм для визначення НДС і крайових ефектів та дослідження НДС і КЕ в залежності від МГХ, типу навантаження та наближення варіанта МТ і аналіз збіжності розвинень компонент НДС у ряди.

Об'єкт дослідження – процес пружного деформування нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних пластин і пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні.

Предмет дослідження – побудова нових ефективних варіантів МТ нетонких однорідних фізично лінійних (транстропних і ортотропних) і нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок, та шаруватих пластин і пологих оболонок з транстропними та нелінійно пружними шарами при довільному статичному поперечному навантаженні; розробка аналітичних методів розв'язання граничних задач варіантів МТ, які зводяться до СДРР високих порядків; отримання загальних розв'язків, аналітичних та числових залежностей НДС вказаних елементів від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах МТ.

Методи дослідження. Дослідження здійснювалися з використанням:
створеної методології побудови варіантів МТ, яка поєднує метод розвинення компонент НДС і граничних умов, як функцій трьох змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при

допомозі поліномів Лежандра (для однорідних пластин та пологих оболонок) або ж їх комбінацій у межах кожного шару (для шаруватих елементів) і МВР; методу збурень лінійно пружних та ізотропних властивостей матеріалу (для фізично нелінійних і ортотропних пластин та пологих оболонок); операторного методу (при перетворенні СДРР і отриманні форм загальних розв'язків), нового розробленого і узагальненого операторного методу зведення неоднорідних ДР високих порядків із частинними похідними до неоднорідних ДР 2-го порядку; нового розробленого методу інтегрування систем ДРР високих порядків; методів одинарних та подвійних тригонометричних рядів (для розв'язання граничних задач); методу осереднення (в МТ пологих оболонок); прямих методів інтегрування звичайних ДР; методів математичної фізики (знаходження частинних і загальних розв'язків); методу інтегрального перетворення Ганкеля (при знаходженні частинних розв'язків ДР); методу спеціальних функцій (в задачах з переривчастими і локальними навантаженнями); нових розроблених наближених методів розв'язання СДР високого порядку для пластин і пологих оболонок; МПН (у варіантах МТ пологих транстропних оболонок та фізично нелінійних шаруватих пластин і пологих оболонок), методу колокацій (для шаруватих пластин).

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1. *Розроблено нову методологію* побудови нових варіантів МТ однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок довільної товщини, основану на комплексному методі зведення тривимірної задачі ТП до двовимірної, який поєднує ВПР, метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов, як функцій 3-х змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних елементів) і їх комбінацій у межах кожного шару (для шаруватих елементів симетричної і несиметричної структур), точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення шарів, узагальнену МВР, метод збурень (для однорідних ортотропних і ізотропніх фізично нелінійних пластин і пологих оболонок) і МПН (для однорідних транстропних пологих оболонок і шаруватих нелінійно пружних пластин і пологих оболонок).

2. *Уперше* на основі створеної методології *побудовані нові варіанти* МТ: нетонких однорідних транстропних пластин та пологих оболонок у високих наближеннях, нетонких однорідних ортотропних та ізотропних фізично нелінійних пластин та пологих оболонок, шаруватих транстропних і фізично нелінійних пластин і пологих оболонок симетричної та несиметричної структур.

3. *Уперше* отримані в явному вигляді СДРР у вищих наближеннях варіантів МТ указаних елементів, що дає можливість визначати їх НДС з високою точністю.

4. *Уперше* тривимірна задача статики для нетонких ортотропних і ізотропних фізично нелінійних пластин та пологих оболонок на основі МТ методом збурень пружних властивостей зведена у явному вигляді до нескінченної рекурентної послідовності двовимірних лінійних крайових задач, у яких праві частини ДР залежать лінійно (для ортотропних елементів) і нелінійно (для фізично нелінійних елементів) від компонент НДС попередніх наближень, що дає реальну можливість розв'язувати прикладні задачі.

5. *Розроблено новий і узагальнено операторний метод* зведення неоднорідних ДР з частинними похідними високих порядків до неоднорідних ДР 2-го порядку.

6. *Уперше розроблено новий метод інтегрування неоднорідних СДРР* нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних і нелінійних пластин, оснований на алгебраїчних, диференціальних та операторних перетвореннях СДР і методі зведення їх до однорідних (для лінійних елементів) і неоднорідних (для лінійних і нелінійних елементів) ДР 2-го порядку.

7. *Уперше в МТ* нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних і нелінійних пластин новим розробленим методом отримані загальні розв'язки неоднорідних СДРР через загальні розв'язки однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку.

8. *Уперше розроблені нові наближені аналітичні методи* розв'язання СДР високих порядків МТ пластин і пологих оболонок довільної товщини, згідно з якими СДР для пластин порядку $4N$ зводяться до послідовного розв'язання N ДР 4-го порядку, а СДР для оболонок порядку $4N$ – до розв'язання ДР 8-го порядку і $(N-2)$ ДР 4-го порядку.

9. *Уперше в МТ розроблені нові наближені методи* зведення систем ДРР пологих оболонок довільної сталої товщини (з використанням методів збурень і МПН) до рекурентної послідовності систем ДРР для кососиметричного і симетричного деформування пластин, розв'язання яких визначаються диференціальними рівняннями 2-го порядку.

10. *Доведені теореми* про збіжність рядів для напружень за поліномами Лежандра, переміщень (у методі збурень), обґрунтована однозначність розв'язків другої основної граничної задачі.

11. *У новій постановці отримані аналітичні розв'язки СДР* варіантів МТ нетонких транстропних пластин та пологих оболонок в одинарних і подвійних тригонометричних рядах при плавних, швидкозмінюваних по області, локальних і зосереджених навантаженнях.

12. *Уперше в МТ товстих транстропних пластин:*

а) *отримані частинні і загальні розв'язки систем ДР високих порядків* при вісесиметричних перервчастих і зосереджених навантаженнях (по колу, кільцю, кругу, в центрі) з використанням інтегрального перетворення Ганкеля до отриманих неоднорідних ДР 2-го порядку;

б) *одержані аналітичні розв'язки граничних задач* з урахуванням крайових ефектів для півнескінченних, круглих і кільцевих пластин при різних граничних умовах на бічній поверхні і різних поперечних навантаженнях;

в) *розроблено нову методологію знаходження фундаментальних розв'язків ДР* у високих наближеннях; отримані фундаментальні розв'язки з полюсом у довільній точці, які використані для знаходження розв'язків при довільних навантаженнях.

13. *Уперше в МТ* поставлені граничні задачі для ортотропних і ізотропних ФНП та ФНО і отримані загальні розв'язки в тригонометричних рядах; у новій постановці отримані аналітичні розв'язки для ФНП і ФНО при граничних умовах Нав'є.

14. *Розроблені алгоритми і створені пакети математичних програм* на мові ФОРТРАН для розв'язання в *новій постановці* граничних задач по знаходженню внутрішнього НДС однорідних пластин і пологих оболонок (транстропних, ортотропних, фізично нелінійних), двошарових і тришарових транстропних пластин довільної сталої товщини при різних поперечних навантаженнях і КЕ однорідних пластин. Отримані числові результати дали можливість оцінити НДС залежно від МГХ та типу навантаження, установити якісний вплив КЕ на НДС пластин, визначити межі застосування теорії Тимошенка-Рейснера та наближень варіантів МТ в залежності від МГХ та типу навантаження, одержати нові якісні ефекти та важливі висновки.

Обгрунтованість і достовірність отриманих результатів забезпечуються: математичною та фізичною коректністю формулювання граничних задач; строгим математичним підходом до їх розв'язування з формулюванням і доведенням необхідних теорем про збіжність рядів і єдиність розв'язку; дослідженням точності розв'язків; аналітичними граничними переходами, які приводять до відомих теорій пластин і оболонок; перевіркою на тестових задачах; порівняннями з деякими точними результатами та для окремих частинних випадків порівняннями з відомими в літературі результатами, які одержані з рамках інших теорій.

Теоретичне і практичне значення отриманих результатів.

Теоретичне значення дисертаційної роботи полягає в побудові нових високоточних варіантів МТ, розробленні на їх основі нових аналітичних математичних методів розв'язання граничних задач теорії нетонких однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних пластин і пологих оболонок, які дають можливість звести СДРР високих порядків до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку з подальшим використанням методів математичної фізики для отримання їх загальних розв'язків і дослідження НДС та КЕ з високою точністю, що особливо є важливим при наявності локальних навантажень, отворів, та у випадках немалої товщини вказаних елементів. Одержані матеріали дисертаційної роботи впроваджені в наукові програми і теми ДВНЗ "ПДАБА" на кафедрі БМОМ за планами наукових досліджень держбюджетної науково-дослідної тематики (є довідка, у додатку Ж). Теоретичні результати впроваджені в навчальному процесі з курсу ТП для студентів будівельного факультету ДВНЗ "ПДАБА" (є акт впровадження, у додатку Ж), можуть бути також використані в курсах теорії пластин і оболонок, спецкурсах, як матеріал навчального посібника та в науковій роботі аспірантів, магістрів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання їх в НДІ, проектних організаціях та в інших дослідних установах високоточних розрахунків і проектування сучасних конструкцій. Це дасть змогу створювати надійні та довговічні споруди і конструкції з високою питомою міцністю і жорсткістю. Впровадження в практичних цілях матеріалів дисертаційної роботи підтверджено актом впровадження результатів досліджень у ООО "Укррезервуарсервіс", у додатку Ж).

Особистий внесок здобувача. Основні положення роботи, що представлені до захисту, отримані здобувачем самостійно. У наукових публікаціях із співавторами особистий внесок здобувача полягає в наступному. У [44, 46] побудовано варіант МТ нетонких трансотропних пластин високого наближення, отримані основні рівняння, розроблено метод розв'язання СДРР та числові алгоритми і програми, отримані числові результати, разом зі співавтором здійснювалась постановка задач і обговорювались результати. У [6, 8, 84, 85] виведені ДР, розроблені методи їх розв'язання, отримані аналітичні розв'язки; у [10–12, 60–65] розроблені метод розв'язання СДРР та числові алгоритми і програми; разом з науковим консультантом і співавторами здійснювалась постановка задач і обговорювались результати. Наведені публікації повною мірою відображають основні положення та висновки роботи.

Тема докторської дисертації не співпадає з темою кандидатської дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фіз.-мат. наук "Влияние истории активного нагружения на бифуркацию процесса деформирования прямоугольных пластинок и цилиндрических оболочек" (Дн-вськ, 1980 р.) і не є її розвиненням. Всі наукові праці, що склали докторську дисертацію, опубліковані після захисту кандидатської дисертації.

Апробація результатів дисертації. Результати наукових досліджень, що наведені в дисертації, доповідались та обговорювались на 2-х Всеукраїнських і 55-х міжнародних наукових конференціях: ІІ-му Інтернаціональному симпозіумі "Механічні і фізичні руйнування будівельних матеріалів і конструкцій" (Львів, 1996); Польсько-Українських міжнародних наукових семінарах "Теоретичні основи будівництва" (Варшава: 1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2007, 2011 рр.; Дніпропетровськ: 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2008, 2010, 2012 рр.); Всеукраїнських наукових конференціях "Математичні проблеми технічної механіки" (Дніпропетровськ, 2003, 2004 рр.); Міжнародних наукових конференціях "Математичні проблеми технічної механіки" (Дніпропетровськ, 2005, 2014, 2015, 2016, 2018 рр.; Дніпро, 2019 р.); XII-й Міжнародній науково-практичній конференції "Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я" (Харків, 2004 р.); Міжнародних наукових конференціях "Проблемы современного материаловедения, машиностроения" (Дніпропетровськ, 2001 р.), "Строительство, материаловедение, машиностроение" (Дніпропетровськ, 2002, 2003 рр.); X-й Міжнародній конференції "Математика, экономика, образование" (Ростов-на-Дону, 2002 р.); Міжнародній конференції "Актуальные проблемы механики сплошных сред" (Донецьк, 2002 р.); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки" (Київ, 2003 р.); Міжнародних науково-технічних конференціях пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського "Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій" (Дніпропетровськ, 2007 р.; Дніпро, 2019 р.); Міжнародних наукових конференціях "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2008, 2018 рр.); 10 – 18-й міжнародних наукових конференціях ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2015, 2016, 2017 рр.); Міжнародних науково-технічних конференціях "Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій" (м. Ялта, 2011 р.; м. Запоріжжя, 2012, 2015, 2019 рр.); III, V, VI, VII міжнародних конференціях "Актуальні проблеми інженерної механіки" (Одеса, 2016, 2018, 2019, 2020 рр.); V Міжнародній науково-практичній конференції (Харків, 2018 р.); 18-й Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції "Перспективні напрями розвитку науки та техніки" (м. Вінниця, 2018 р.); I-й Міжнародній науково-технічній конференціїї "Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні" (Харків, 2018 р.); 2-й Інтернаціональній науково-практичній конференції (Іспанія, м. Барселона, 2020 р.).

Основна частина роботи доповідалась і здобула позитивну оцінку на міжвузівському науковому семінарі кафедри обчислювальної механіки і міцності конструкцій Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара при Придніпровському науковому центрі та науковій раді з механіки деформівного твердого тіла НАН України (наукові керівники семінару: чл.- кор. НАН України, д. т. н., проф. В. С. Гудрамович; д. т. н., проф. А. П. Дзюба, 2009 р.); на міжвузівському науковому семінарі "Проблеми нелінійної механіки" (Дніпропетровськ, кафедра БМОМ ДВНЗ "ПДАБА"; наукові керівники семінару: д. т. н., проф. А. І. Маневич; д. т. н., проф. Е. М. Кваша, 2009 р.); на об'єднаному науковому семінарі кафедр динаміки і міцності машин, теоретичної механіки, опору матеріалів і прикладної математики у Харківському національному технічному університеті (ХПІ) (головуючий семінару д. ф.-м. н, проф. Ю. В. Міхлін, 2009 р.).

У повному обсязі робота доповідалась і здобула позитивну оцінку на Міжнародній науково-технічній конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського "Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій" (Дніпро, жовтень 2019 р.); науково-технічному семінарі "Проблеми нелінійної механіки" (Дніпро, кафедра БМОМ ДВНЗ "ПДАБА", голова семінару д. т. н., проф. В. В. Данішевський, 2020 р.); науковому семінарі "Математичні проблеми механіки" Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (м. Дніпро, ДНУ, керівники семінару: д. ф.-м. н., проф. В. В. Лобода; д. ф.-м. н., проф. Ю. А. Черняков, 2020 р.); науковому семінарі відділу моделювання композитних структур і складних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача (Львів, ІППММ, керівник семінару д. ф.-м. н., проф. М. В. Марчук, 2020 р.); апробована і схвалена на міжвузівському науковому семінарі "Актуальні проблеми прикладної математики і механіки"(Запоріжжя, Запорізький національний університет; керівник семінару д. т. н., проф. В. З. Грищак, 2020 р.); на об'єднаному науковому семінарі кафедр "Прикладна математика" і "Механіка суцільних середовищ та опір матеріалів" Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (Харків, НТУ "ХПІ"; голова семінару д. ф.-м. н,, проф. Ю. В. Міхлін, 2020 р.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 100 наукових праць (85 праць в одноосібному авторстві), з яких 64 наукові статті (52 статті в одноосіб. авт.): 51 стаття –у фахових виданнях України з фізико-математичних і технічних наук (46 в одноосіб. авт.), з яких 29 статей у фахових виданнях України з фізико-математичних наук (26 в одноосіб. авт., 1-а з яких входить у міжнародні наукометричні бази); 6 статей (5 в одноосіб. авт.) у зарубіжних англомовних виданнях: 1 стаття в **Scopus (**в одноосіб. авт.); 3 статті (в одноосіб. авт.), які входять до міжнародних наукометричних баз: **Index Copernicus, RS Global, Google Scholar** та ін.; 2 статті (1 стаття в одноосіб. авт.) у зарубіжних колективних **англомовних монографіях** сумарним об'ємом 56 с.; 2 статті у виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз (1 стаття в одноосіб. авт.); 5 статей (у співавторстві) у наукових виданнях України і 36 тез доповідей (33 тези в одноосіб. авт.).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи–503 сторінки, з яких основного тексту дисертації – 305 сторінок. Вона містить також 47 рисунків, 70 таблиць, список використаних джерел із 453 найменувань на 38 сторінках та 8 додатків на 117 сторінках.

Автор вшановує пам'ять д. т. н., професора О. П. Прусакова, який допоміг визначити напрям наукових досліджень та підтримував їх на початковому етапі виконання даної роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, визначені проблема для вирішення і мета, сформульовані об'єкт і предмет дослідження, обрані методи досліджень, відзначено наукову новизну одержаних результатів, їх обґрунтованість, достовірність та наукове і практичне значення, зазначено зв'язок з науковими програмами, планами і темами, наведено відомості про публікації та апробацію за темою дисертації і особистий внесок здобувача.

У **першому** розділі проведено огляд наукових досліджень, виконаних вітчизняними та зарубіжними авторами в області теорії і методів розрахунку пластин та оболонок. Фундаментальний вклад у розвиток цього напрямку механіки внесли А. Я. Александров, С. А. Амбарцумян, Й. Я. Аміро, В. А. Баженов, Й. А. Біргер, В. В. Болотін, М. Г. Бондарь, Я. Й. Бурак, Д. В. Вайнберг, П. М. Варвак, І. Н. Векуа, В. З. Власов, А. С. Вольмір, Й. І. Ворович, К. З. Галімов, Б. Г. Гальоркін, А. Л. Гольденвейзер, Е. І. Григолюк, Я. М. Григоренко, В. Т. Грінченко, В. С. Гудрамович, О. М. Гузь, Б. Я. Кантор, А. В. Кармішин, М. О. Кільчевський, Г. С. Кіт, А. Д. Коваленко, М. А. Колтунов, Б. Г. Коренєв, М. С. Корнішин, В. І. Корольов, О. С. Космодаміанський, В. Д. Кубенко, Р. М. Кушнір, С. Г. Лехницький, А. І. Лур'є, А. Ляв, В. І. Моссаковський, Х. М. Муштарі, А. А. Назаров, Ю. М. Неміш, В. В. Новожилов, І. Ф. Образцов, П. М. Огібалов, Б. Л. Пелех, Я. С. Підстригач, О. П. Прусаков, В. Л. Рвачов, Ю. К. Рудавський, Г. М. Савін, С. П. Тимошенко, К. Ф. Черних, Р. М. Швець, Ю. А. Шевляков, В. П. Шевченко, Ю. М. Шевченко, М. О. Шульга, P. M. Naghdi, W. Nowacki, E. Reissner, K. Stamm та інші вчені.

Вагомі результати в розвиненні і побудові уточнених теорій лінійно пружних елементів конструкцій, основаних на гіпотезах, отримані в наукових працях С. А. Амбарцумяна, П. П. Баєва, В. В. Болотіна, Л. Е. Брюккера, А. Т. Василенка, В. В. Васильєва, Ш. К. Галімова, Е. І. Григолюка, Я. М. Григоренка, С. Н. Кана, В. Г. Карнаухова, М. А. Колтунова, Л. М. Куршина, О. В. Максимука, М. В. Марчука, В. М. Москаленка, Х. М. Муштарі, Ю. В. Немировського, Ю. М. Новічкова, В. М. Паймушина, Б. Л. Пелеха, В. Г. Піскунова, А. О. Рассказова, Ю. К. Рудавського, О. Ф. Рябова, А. С. Сахарова, А. В. Саченкова, М. А. Сухорольського, М. Г. Тамурова, Л. П. Хорошуна, П. П. Чулкова, М. П. Шереметьєва, К. І. Шнеренка, H. Altenbach, R. M. Christensen, A. Kromm, K. H. Lo, K. Zimmer, J. Peradze і інших вчених.

Фундаментальний вклад у розробку методів збурень у механіці деформівного твердого тіла внесли О. М. Гузь, Л. В. Єршов, Д. Д. Івлєв, А. А. Ільюшин, О. С. Космодаміанський, В. А. Ломакін, Ю. М. Неміш, П. М. Огібалов, Г. М. Савін, І. А. Цурпал, В. І. Шейнін та інші. Важливе значення в розвинені асимптотичних методів та методів малого параметра в задачах механіки мають дослідження Л. А. Аголовяна, О. К. Аксентяна, І. В. Андріанова, М. М. Боголюбова, М. Г. Бондаря, Й. І. Воровича, А. Л. Гольденвейзера, В. З. Грищака, В. Г. Карнаухова, Я. Ф. Каюка, Л. І. Маневича, Ю. А. Митропольського, Ю. В. Міхліна, А. В. Павленка, М. А. Шленьова, K. O. Fridrichs, A. H. Nayfeh і інших вчених.

Значний вклад у розроблення математичних методів розв’язання граничних задач для лінійно пружних пластин і оболонок у тривимірній постановці внесли А. Т. Василенко, Б. Ф. Власов, В. А. Галіч, Б. Г. Гальоркін, Я. М. Григоренко, В. Т. Грінченко, О. М. Гузь, І. Ю. Бабіч, А. Д. Коваленко, О. С. Космодаміанський, А. А. Мукоєд, Ю. М. Неміш, Н. Д. Панкратова, В. Г. Піскунов, Ю. М. Подільчук, В. І. Пожуєв, К. В. Соляник-Красса, С. П. Тимошенко, А. Ф. Улітко, В. О. Шалдирван, G. Jemielita, N. I. Pagano, K. Stamm, S. Strinivas та інші. У зв’язку з великими математичними трудощами використання тривимірних рівнянь ТП знайшли своє розвинення МТ, в яких компоненти НДС розвивалися у різні ряди за поперечною координатою. Основоположний вклад у розвиток теорій розрахунку вказаних елементів і методів розв’язання задач з використанням поліномів Лежандра внесли В. А. Баженов, І. Н. Векуа, Н. К. Галімов, В. І. Гуляєв, М. О. Кільчевський, Л. І. Лібреску, П. П. Лізунов, А. В. Плеханов, В. В. Понятовський, О. П. Прусаков, М. А. Сухорольський, І. Г. Терегулов, І. Ю. Хома, В. Є. Чепіга, В. К. Чибіряков, R. Cikala, A. Soler. При цьому тривимірні задачі зводились до двовимірних із застосуванням деяких варіаційних принципів або ж проекційних методів.

Вагоме значення в розробці методів розв’язання нелінійних задач для тонких пластин та оболонок мають наукові праці К. З. Галімова, Н. С. Ганієва, В. С. Гудрамовича, О. М. Гузя, Б. Я. Кантора, Г. Каудерера, С. М. Клойзнера, Ю. І. Койфмана, Р. М. Кушніра, В. А. Максимюка, М. В. Марчука, Х. М. Муштарі, М. М. Николишина, В. А. Осадчука, В. Г. Піскунова, Г. М. Савіна, Є. А. Сторожука, М. Г. Тамурова, Ю. М. Тамурова, І. С. Чернишенка, М. О. Шульги та інших.

Суттєвий вклад у розробку та розвинення аналітичних і аналітико-числових методів розв’язання задач механіки пластинкових та оболонкових конструкцій внесли В. А. Баженов, П. М. Варвак, В. Є. Веріженко, Г. Г. Влайков, В. В. Гайдайчук, Л. І. Голуб, А. В. Гондлях, Є. А. Гоцуляк, Я. М. Григоренко, А. Я. Григоренко, В. І. Гуляєв, А. І. Гуляр, А. В. Кармішин, Е. М. Кваша, Л. В. Курпа, П. П. Лізунов, А. І. Маневич, А. П. Мукоєд, В. І. Мяченков, В. І. Пожуєв, А. С. Сахаров, Є. А. Сторожук, І. С. Чернишенко, D. Rudiger, W. M. Schafer, E. A. Reis та інші вчені.

Із аналізу огляду зроблені висновки: 1) про необхідність побудови нових високоточних варіантів МТ лінійно і нелінійно пружних однорідних і шаруватих пластин і пологих оболонок довільної товщини, які б ураховували всі компоненти НДС і граничні умови на бічній поверхні, як функції трьох змінних, і КЕ; 2) про розроблення ефективних аналітичних методів розв’язання СДРР високих порядків вказаних елементів, і щоб застосування цих варіантів МТ і методів давало реальну можливість аналітичного розв’язку граничних задач і отримання числових результатів.

У **другому** розділі обґрунтовується вибір аналітичного напрямку досліджень, сформульована методологія побудови варіантів МТ нетонких однорідних і шаруватих лінійно та нелінійно пружних пластин і пологих оболонок при довільних поперечних навантаженнях; наведені нові розроблені аналітичні методи розв'язання неоднорідних СДРР високих порядків для вказаних елементів, які дають можливість звести їх до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку.

Методологія побудови нових варіантів МТ однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних пластин і пологих оболонок довільної сталої товщини основана на комплексному методі зведення тривимірної задачі ТП до двовимірної, який поєднує ВПР, метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов, як функцій 3-х змінних, у нескінченні ряди при допомозі поліномів Лежандра за поперечною координатою (для однорідних елементів) і їх комбінацій в межах кожного шару (для шаруватих елементів симетричної і несиметричної структур), точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення шарів, узагальнену МВР, якою ураховуються одночасно всі відповідні члени частинних сум рядів для переміщень і напружень, метод збурень (для однорідних транстропних, ортотропних і ізотропніх фізично нелінійних пластин і пологих оболонок) і МПН (для шаруватих нелінійно пружних пластин і пологих оболонок). На основі цієї методології побудовані нові варіанти МТ для названих елементів.

Якщо враховувати в тангенціальних компонентах переміщень (6) складові з індексами 0, 1, 2, …,N (складові $u_0, v_0, u_1, .v_1, w_1, ..., u_N, .v_N, w_N$), де N вважатимемо надалі непарним натуральним числом, то таке наближення називатимемо наближенням К0-N (НК0-N); якщо враховувати складові з індексами 1, 3, …,N – наближенням К13…N (НК13 N).

Теорії пластин Тимошенка-Рейснера, пологих оболонок і уточнена теорія пластин Тимошенка-Рейснера є частинними випадками побудованих варіантів МТ в наближеннях К1, К01, К01 відповідно.

НДС розглядуваних елементів складається з ВНДС, ВКЕ і ПКЕ. ВНДС повільно змінюється і розповсюджується на всю область, ВКЕ і ПКЕ у вигляді пограншарів локалізуються біля країв і швидко згасають при віддаленні від них.

Проблема в МТ взагалі та в побудованих варіантах МТ полягає в розв'язанні СДРР високих порядків і побудові їх частинних та загальних розв'язків, що давало б можливість аналітичного розв'язання граничних задач для вказаних нетонких елементів.

В роботі розроблено новий метод інтегрування СДРР високих порядків, суть якого для граничних задач пружних пластин довільної сталої товщини полягає в наступному.

1) Початкові СДРР зводились узагальненою методикою алгебраїчних, диференціальних і операторних перетворень до незалежних однорідних підсистем ДР (описували ВКЕ) і неоднорідних (описували ВНДС і ПКЕ) при симетричному і кососиметричному деформуванні відносно серединної площини. Однорідна підсистема ДР зводилась операторним методом до одного визначального однорідного ДР, а неоднорідна–до визначальних ДР з однаковими лівими частинами відносно нових шуканих функцій, що суттєво спрощувало знаходження її розв'язків, хоча складність і залишалась з причини високого порядку ДР.

2) Структура ДР була така, що ліві частини однорідних ДР ВКЕ зображувались у вигляді добутку операторів Гельмгольца над шуканою вихровою функцією, а однакові ліві частини кожного з визначальних ДР ВНДС і ПКЕ зображувались у вигляді добутку операторів бігармонічного і Гельмгольца над деякими іншими шуканими функціями.

3) Визначальне ДР ВКЕ розщеплювалось на однорідні ДР Гельмгольца, а неоднорідні ДР ВНДС з ПКЕ новим розробленим або розвинутим операторним методом зводились до неоднорідних ДР 2-го порядку (Пуассона і Гельмгольца), для яких відшукувались загальні розв'язки, а потім зворотними математичними операціями визначались загальні розв'язки для початкових СДРР, для переміщень і напружень.

Уперше розроблено новий метод зведення неоднорідних ДР високих порядків з частинними похідними до неоднорідних ДР 2-го порядку [8, 55-59, 81-84]. Суть методу полягає в тому, що частинний розв'язок неоднорідного ДР високого порядку з частинними похідними визначається послідовним інтегруванням неоднорідних ДР 2-го порядку, праві частини яких в свою чергу знаходяться як частинні розв'язки інших неоднорідних ДР 2-го порядку.

Узагальнено і розвинуто операторний метод зведення неоднорідних ДР високих порядків з частинними похідними до неоднорідних ДР 2-го порядку. Показано, що частинні розв'язки $\varPhi_r(x, y)$ ДР порядку $2(N+1)$:

$$D_0 D_0 D_1 D_2 \cdots D_{N-2} D_{N-1}.\varPhi(x, y) = s_{p0} D_{p0}\, q(x, y) \qquad (1)$$

(s з індексами–механіко-геометричні параметри (МГП); $D_0 = \nabla^2$–оператор Лапласа; $D_i = \nabla^2 - s_i$, $(i = 1, 2, ..., N-1)$; D_{p0}–довільний оператор; $q(x, y)$– довільна функція (неперервна або переривчаста)) виражаються у вигляді диференціального оператора D_{p0} від лінійної комбінації частинних розв'язків неоднорідних ДР 2-го і 4-го порядків:

$$\varPhi_r(x, y) = s_{p0} D_{p0}((f_{1r} - f_{0r})/(s_1^2 s_{1,2} s_{1,3} ... s_{1,n}) + (f_{2r} - f_{0r})/(s_2^2 s_{2,1} s_{2,3} ... s_{2,n}) +$$
$$+ (f_{nr} - f_{0r})/(s_n^2 s_{n,1} s_{n,2} ... s_{n,n-1}) + f_{00r})/(s_1 s_2 ... s_n)), (n = N-1; N = 3, 5, ...). \qquad (2)$$

Тут $s_{m,l} = s_m - s_l$; $f_{ir}(x, y)$, $f_{0r}(x, y)$, $f_{00r}(x, y)$ –частинні розв'язки ДР Гельмгольца $(\nabla^2 - s_i) f_{ir}(x, y) = q(x, y)$, Пуассона $\nabla^2 f_{0r}(x, y) = q(x, y)$ і неоднорідного бігармонічного ДР $\nabla^4 f_{00r}(x, y) = q(x, y)$, яке зводиться до двох ДР Пуассона. Частинні розв'язки неоднорідних ДР 2-го порядку знаходяться різними методами, включаючи і методи інтегральних перетворень, що суттєво спрощує їх знаходження, особливо, якщо функція $q(x, y)$ є переривчастою. Отримано загальний розв'язок неоднорідного ДР (1) як суму загального розв'язку відповідного однорідного ДР і частинного розв'язку у вигляді (2). Якщо в правій частині ДР (1) буде довільна функція $f(x, y)$, як це має місце в ДР для фізично нелінійних пластин, то частинним розв'язком такого ДР буде функція $\varPhi_r(x, y)$, у якій потрібно покласти $s_{p0} D_{p0} \equiv 1$, а в правих частинах неоднорідних ДР 2-го порядку і бігармонічного рівняння потрібно замінити $q(x, y)$ на $f(x, y)$.

СДРР високих порядків для нетонких ортотропних і ізотропних ФНП отримуються з використанням методу збурень (для однорідних елементів) і МПН (для шаруватих ФНП). Праві частини ДР залежать від компонент НДС попередніх наближень у методі збурень і від попереднього наближення в МПН. СДР у кожному наближенні зводяться до неоднорідних ДР 2-го порядку (розд. 4). СДРР для пологих оболонок методами збурень і МПН зводяться до послідовності лінійних крайових задач для пластин (при симетричному і кососиметричному деформуванні), для яких неоднорідні ДР високих порядків типу (1) розщеплюються на ДР 2-го порядку (розд. 8) і отже, в кожному наближенні знаходяться загальні розв'язки ДР 2-го порядку, а потім зворотними перетвореннями одержуються загальні розв'язки СДРР високих порядків для пологих оболонок відповідного наближення і для компонент НДС.

У **третьому** розділі побудовано новий варіант МТ транстропних пластин довільної сталої товщини h при довільному поперечному навантаженні, розроблені методи розв'язання одержаних СДРР високих порядків і отримані їх аналітичні частинні та загальні розв'язки, і числові залежності НДС від МГХ, типу навантаження, КЕ і наближень варіанта МТ. Вважається тут і надалі (розділи 3–8), що площина ізотропії паралельна серединній площині (поверхні) Oxy, вісь z напрямлена вгору.

Надалі в роботі поперечне навантаження на лицевих площинах пластин (розд. 3, 4, 7, 8) і лицевих поверхнях пологих оболонок (розд. 5–8) зображуєтьсяється у вигляді суми двох складових: кососиметричного $(q/2)$ та симетричного $(p/2)$ поперечних навантажень відносно серединної площини (поверхні). Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_z(z=\pm h/2)=(\mp q(x,y)-p(x,y)/2;\sigma_{xz}(z=\pm h/2)=\sigma_{yz}(z=\pm h/2)=0. \qquad (3)$$

Граничні умови на бічній поверхні пластини (оболонки), яку вважатимемо перпендикулярною до серединної площини (поверхні), можуть бути довільними:

на частині бічної поверхні Γ_1, на якій задані переміщення,

$$U(x,y,z)=U_{\Gamma_1}(x,y,z),(U,V,W); \qquad (4)$$

на частині бічної поверхні Γ_2, на якій задані поверхневі напруження $P_{i\Gamma_2}$,

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(x,y,z)\cos(\bar{\nu},x_j)=P_{i\Gamma_2}(x,y,z),\ (i=1,2,3). \qquad (5)$$

Тут U,V,W та σ_{ij} – компоненти переміщень та напружень, залежать від $x,\ y,\ z$; функції в правих частинах (4) та (5) – відомі функції $x,\ y,\ z$; $\bar{\nu}$ – вектор зовнішньої нормалі до бічної поверхні.

Компоненти переміщень апроксимуються по товщині пластини у вигляді нескінченних рядів за поліномами Лежандра $P_k(2z/h)$:

$$U(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(2z/h)u_k(x,y),\ (U,u\to V,v);\ W(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k-1}(2z/h)w_k(x,y). \qquad (6)$$

Варіаційне рівняння Рейснера (ВРР) має вигляд:

$$\iiint\{\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\sigma_{xy}\delta\gamma_{yx}+\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}+\sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}+(\varepsilon_x-\varepsilon_x(\sigma_{ij}))\delta\sigma_x+$$
$$+(\varepsilon_y-\varepsilon_y(\sigma_{ij}))\delta\sigma_y+(\varepsilon_z-\varepsilon_z(\sigma_{ij}))\delta\sigma_z+(\gamma_{yx}-\gamma_{yx}(\sigma_{ij}))\delta\sigma_{yx}+(\gamma_{xz}-\gamma_{xz}(\sigma_{ij}))\delta\sigma_{xz}+ \qquad (7)$$
$$+(\gamma_{yz}-\gamma_{yz}(\sigma_{ij}))\delta\sigma_{yz}\}dxdydz-\iint_A(X_\nu\delta U+Y_\nu\delta V+Z_\nu\delta W)dA=0,$$

де A – площа лицевих площин (поверхонь) та бічної поверхні; X_ν,Y_ν,Z_ν – інтенсивність складових поверхневих сил в проекціях на осі координат; напруження і деформації залежать від компонент переміщень (6); інтегрування в потрійному інтегралі виконується по всьому об'єму, а в подвійному–по всій поверхні A.

Ураховуючи співвідношення Коші, рівності (6), (7) та тривимірні ДР, визначались деформації і напруження також у вигляді нескінченних рядів за поліномами Лежандра, причому, поперечні напруження точно задовольняли граничним умовам (3). В загальному вигляді у НК0-N отримані основні залежності, крайові умови і СДРР.

Компоненти переміщень:

$$U(x,y,z)=\sum_{k=0}^{N}P_k(2z/h)u_k(x,y),(U,u\to V,v);W(x,y,z)=\sum_{k=1}^{N}P_{k-1}(2z/h)w_k(x,y). \qquad (8)$$

Компоненти напружень:

$$\sigma_{xz}(x,y,z)=\sum_{n=0}^{N+1}P_n(2z/h)t_{xn}(x,y);\ \sigma_{yz}(x,y,z)=\sum_{n=0}^{N+1}P_n(2z/h)t_{yn}(x,y);$$

$$\sigma_z(x,y,z)=\sum_{n=0}^{N+2}P_n(2z/h)s_{zn}(x,y);\qquad(9)$$

$$\sigma_x(x,y,z)=\sum_{n=0}^{N+2}P_n(2z/h)s_{xn}(x,y),\ (x,y);\ \ \sigma_{xy}(x,y,z)=\sum_{n=0}^{N}P_n(2z/h)t_{yxn}(x,y),$$

де

$$t_{xn}(x,y)=\sum_{i=1,3}^{N}(h_{0ni}w_{i,x}+l_{0ni}u_i),(n=0,2,..,N+1);$$

$$t_{xn}(x,y)=\sum_{i=2,4}^{N-1}(h_{0ni}w_{i,x}+l_{0ni}u_i),(n=1,3,..,N);$$

$$s_{zn}(x,y)=\sum_{i=2,4}^{N-1}p_{ni}w_i+\sum_{i=0,2}^{N-1}g_{ni}\varphi_i+g_{np}p,\ (n=0,2,...,N+1);$$

$$s_{zn}(x,y)=\sum_{i=3,5}^{N}p_{ni}w_i+\sum_{i=1,3}^{N}g_{ni}\varphi_i+g_{nq}q,\ (n=1,3,...,N+2);\qquad(10)$$

$$s_{xn}(x,y)=d_0(u_{n,x}+\nu v_{n,y})+d_{10}s_{zn},\ (n=0,1,...,N);$$

$$s_{xn}(x,y)=d_{10}s_{zn},\ (n=N+1,N+2),\ (x,y;\ u_k,v_k);$$

$$t_{yxn}(x,y)=G(u_{n,y}+v_{n,x}),\ (n=0,1,...,N);\ \varphi_k=u_{k,x}+v_{k,y}.$$

В (10) h, l, p, g з індексами–МГП; d_0, d_{10}, G, ν – механічні сталі матеріалу. Тут і надалі малими латинськими буквами позначатимуться сталі, які залежать від МГП.

Зображення компонент НДС у вигляді рядів (8), (9) на відміну від теорій, що основані на методі гіпотез, дає можливість визначати НДС з будь-якою точністю, ураховуючи в указаних рядах відповідну кількість складових компонент (наближення варіанта МТ).

Аналітично показано, що СДРР у НК0-N має порядок (6N+4) і зводиться до розв’язання двох незалежних СДР: одна описує НДС при кососиметричному (має порядок 3(N+1)), а інша – при симетричному деформуванні (порядок 3N+1).

СДРР, що описує кососиметричне деформування (наближення К13…N):

$$\sum_{j=1,3}^{N}(L_{iuj}u_j+L_{ivj}v_j+L_{iwj}w_j)=L_{iq}(q(x,y)),\ (i=1,2,...,3(N+1)/2).\qquad(11)$$

СДР, що описує симетричне деформування (наближення К02…(N-1)):

$$\sum_{j=0,2}^{N-1}(M_{iuj}u_j+M_{ivj}v_j)+\sum_{j=2,4}^{N-1}M_{iwj}w_j=M_{ip}(p(x,y)),\ (i=1,2,...,(3N+1)/2).\qquad(12)$$

У ДР (11), (12) M_{ij}, L_{ij} – диференціальні оператори за обома змінними не вище 2-го порядку; $M_{ip}(p)$, $L_{iq}(q)$ –функції поперечного навантаження; вказані оператори і функції залежать від МГП пластини. Диференціальні матриці СДР (11) і (12) симетричні. Коефіцієнти і вирази лівих і правих частин цих СДР наведені в дисертації в явному вигляді для різних наближень варіанта МТ: К01, К13, К02, К0-3, К135, К024, К0-5.

Крайові умови у НК0-N в інтегральній формі також отримуються із ВРР:

$$\int_{(s)}\{\sum_{j=0,1}^{N}\frac{h}{2j+1}((s_{xj}l_x+t_{yxj}l_y-x_{sj})\delta u_j+(t_{yxj}l_x+s_{yj}l_y-y_{sj})\delta v_j)+$$
$$+\sum_{j=0,1}^{N-1}\frac{h}{2j+1}(t_{xj}l_x+t_{yj}l_y-z_{sj})\delta w_{j+1}\}ds=0,\qquad(13)$$

де $l_x,\ l_y$ – напрямляючі косинуси нормалі до бічної поверхні. Із (13) отримані різні крайові умови, враховуючи розвинення граничних умов на бічній поверхні в нескінченні ряди за поліномами Лежандра і складові у частинних сумах відповідних наближень.

Уперше узагальненими алгебраїчними, диференціальними і операторними перетвореннями систем ДР (11), (12) високих порядків зведені до розв'язувальних і визначальних (зручних) СДР. При кососиметричному в НК13…N і симетричному в НК02…(N-1) деформуванні системи ДР розділяються на однорідну СДР, яка описує вихровий КЕ, і незалежну від неї неоднорідну СДР внутрішнього НДС і ПКЕ. Розв'язувальна СДР ВКЕ в НК13…N (порядку (N+1)) має вигляд:

$$\sum_{j=1,3}^{N} H_{ij}\psi_j(x,y)=0,\ \ (i=1,3,...,N);\ (\psi_j(x,y)=u_{j,y}-v_{j,x}),\qquad(14)$$

де $H_{ii}=(h_{i2\psi}\nabla^2+h_{i0\psi}),\ \ H_{ij}=H_{ji}=h_{ij0\psi}(i\neq j)$. Отримані загальні розв'язки СДР (14) у вигляді: $\psi_j(x,y)=H^0_{1j}\sum\limits_{i=1}^{(N+1)/2}\psi^{(i)}(x,y)$, де H^0_{1j}–ад'юнкти диференціального визначника H_0 СДР (14); $\psi^{(i)}(x,y)$–загальні розв'язки ДР Гельмгольца $(\nabla^2-r_i)\ \psi^{(i)}(x,y)=0,\ \ (i=1,2,...,(N+1)/2;\ N\geq 1)$.

ВНДС із ПКЕ описується неоднорідною СДР порядку $2(N+1)$ відносно $w_j(x,y)$:

$$\sum_{j=1,3}^{N} \varPi_{ij}w_j(x,y)=\varPi_{iq}q(x,y)\ \ (i=1,3,...,N),\qquad(15)$$

де $\varPi_{11}=\mu_{114}\nabla^4;\ \varPi_{1j}=\mu_{1j4}\nabla^4+\mu_{1j2}\nabla^2,\ \varPi_{j1}=\mu_{j14}\nabla^4+\mu_{j12}\nabla^2,\ (j=2,3...,N);$
$\varPi_{ij}=\mu_{ij4}\nabla^4+\mu_{ij2}\nabla^2+\mu_{ij0},(i,j=3,5,...,N;i=j,i\neq j);\varPi_{iq}=\mu_{i2}\nabla^2+\mu_{i0};\ \ \mu_{ijk}$-МГП.

Розв'язувальна СДР (15) зведена операторним методом до визначальних ДР:

$$D_0\,D_0\,D_1\,D_2\cdot...\cdot D_{(N-1)}\varPhi_k(x,y)=a_{k0}\,D_{k0}\,q(x,y),\ \ (k=1,3,...,N;\ N\geq 3),\qquad(16)$$

частинні розв'язки яких виражаються через частині розв'язки ДР Пуассона і неоднорідні ДР Гельмгольца (розд.2). Отримані загальні розв'язки СДР (15):

$$w_j(x,y)=\varPi^0_{1j}(\varPhi_{1B}(x,y)+\varPhi_{1\varPi}(x,y))+\sum_{k=1,3}^{N}\varPi^0_{kj}\Phi_{kr}(x,y),\ \ (j=1,\ 3,...,N).\qquad(17)$$

У (17) $\varPhi_{1B}$ – загальний розв'язок бігармонічного ДР $\nabla^4\varPhi_1=0$; $\varPhi_{1\varPi}=\sum\limits_{j=1,2}^{N-1}\varPhi_{1\varPi j}(x,y)$ – загальний розв'язок однорідного ДР $D_1\,D_2\cdot...\cdot D_{(N-1)}\varPhi_{1\varPi}(x,y)=0$ порядку $2(N-1)$, $\varPhi_{1\varPi j}$ – загальні розв'язки ДР $(\nabla^2-s_j)\varPhi_{1\varPi j}=0,\ \ (j=1,2,...,N-1)$; $\varPhi_{kr}\ \ (k=1,3,...,N)$ –частинні розв'язки неоднорідних ДР (16). Загальний розв'язок бігармонічного ДР разом з частинними розв'язками ДР (16) описують ВНДС. ПКЕ описується однорідним ДР $D_1\,D_2\cdot...\cdot D_{(N-1)}\varPhi_{1\varPi}(x,y)=0$.

Одержані загальні розв'язки для складових тангенціальних переміщень:

$$u_k(x,y)=\sum_{i=1,3}^{N}(\lambda_{k\varphi i}\varphi_{i,x}+\lambda_{k\psi i}\psi_{i,y}+\lambda_{kwi}w_{i,x})+\lambda_{kq}q_{,x},(x,y;\ u,\psi_{,y}\to v,-\psi_{,x}),$$

де $\varphi_i(x,y)=\lambda_{i1}\nabla^2 w_1+\sum\limits_{k=3,5}^{N}(\lambda_{ik}\nabla^2+\lambda'_{ik})w_k+\lambda_{iq}q,\ \ (i=1,3,...,N)$.

Згідно з (8)–(10) знаходяться загальні розв’язки для компонент НДС.

Уперше в МТ у загальному вигляді отримані загальні розв’язки при симетричному деформуванні у довільному наближенні К02…(N-1).

Уперше для високого наближення (НК0-5) виведені в явному вигляді крайові умови і СДР 34-го порядку. яка розділена на СДР симетричного і кососиметричного деформування. Симетричне деформування (НК024) визначається СДР 16-го порядку: ВКЕ описується однорідною СДР 4-го порядку, ПКЕ – однорідним ДР 8-го порядку, а ВНДС – бігармонічним рівнянням і частинними розв’язками чотирьох неоднорідних ДР 12-го порядку. Кососиметричне деформування (НК135) визначається СДР 18-го порядку**.** При цьому ВКЕ описується однорідною СДР 6-го порядку, ПКЕ– однорідним ДР 8-го порядку, а ВНДС – бігармонічним рівнянням і частинними розв’язками трьох неоднорідних ДР 12-го порядку. Отримані ДР безпосередньо можуть використовуватися для розв’язання граничних задач.

Побудовані розв’язки в одинарних та подвійних тригонометричних рядах при неперервних, переривчастих, локальних і зосереджених навантаженнях. Одержано точний аналітичний розв’язок тривимірної задачі ТП для транстропних пластин при крайових умовах Нав’є. На основі розроблених алгоритмів і пакетів математичних програм досліджено ВНДС прямокутних транстропних пластин довільної сталої товщини при плавних, неплавних, локальних і квазізосереджених поперечних навантаженнях. У роботі наведено широку кількість ілюстрацій компонент НДС (23 табл. і 18 рис.), що дало можливість з іншими результатами провести глибокий аналіз впливу МГХ, типу навантаження і наближень на НДС, а також збіжності результатів і їх точності в залежності від наближення варіанта МТ. Отримані в широких межах змінювання МГХ числові результати (в табл. 1 – 4, рис. 1 – 4 результати наведені для $E'/E=1; \nu'=\nu=0{,}3$) вказують на більш високу точність НК0-3 варіанта МТ в порівнянні з іншими теоріями, які основані на використанні різних фізичних гіпотез, в т. ч. і з теорією Тимошенка-Рейснера (НК1) і уточненою теорією (НК01). На рис. 1, 2 ($h/a=1/3$; $G'/G=0{,}1$), рис. 3, 4 ($h/a=1/3; G'/G=1$) наведені графіки змінювання компонент НДС по товщині, які характеризують нелінійність НДС і розходження між результатами наближень варіанта МТ. Тут і надалі $\tilde{\sigma}_{x(z)}=\sigma_{x(z)}/q$; $\tilde{W}=WE/(qh)$; $\tilde{z}=z/h$; $\tilde{x}(\tilde{y})=x(y)/a$. НДС при кососиметричному навантаженні характеризується параметром $p_{mn}/q_{mn}=0$, а при навантаженні тільки на верхній лицевій площині – параметром $p_{mn}/q_{mn}=1$ (p_{mn}, q_{mn} – амплітудні значення інтенсивності зовнішнього навантаження); моногармонічне навантаження визначається параметрами $m=n=1$ (кількість півхвиль), а полігармонічне – параметрами $m=n=3,5,\ldots$; Δ з нижніми індексами означає відповідне розходження у відсотках. Лінії на графіках відповідають: —□— – точному розв’язку (ТР) за тривимірною ТП; —△— – НК0-5 (або НК135); —■— – НК0-3 (або НК13); —▲— – НК01 (або НК1). НК0-3 з високою точністю описує НДС тонких пластин та пластин середньої товщини в широких межах змінювання МГХ (табл. 1, 3). Табл. 3 дає можливість оцінити точність НК0-3 від МГХ. При швидкозмінних по області навантаженнях НК01, НК0-3 можуть давати незадовільні результати не тільки для пластин середньої товщини, але і для тонких пластин (табл. 2), що вказує на необхідність використання вищих наближень. Високоточні результати для НДС при кососиметричному навантаженні ізотропних пластин НК0-3 дає при $a/m \ge 1{,}8h$, а при згинально-обтискуючому – при $a/m \ge 2{,}0h$ (розходження з точними менше 3%). Теорія Тимошенка-Рейснера занижує найбільші нормальні тангенціальні напруження.

Таблиця 1

Згин квадратної однорідної ізотропної пластини ($h/a = 1/3;\ m = n = 1;\ p_{mn}/q_{mn} = 1$)

Розв'язок	Напруження		Прогини	
	$\tilde{\sigma}_x\ (\tilde{z} = 0{,}5)$	Δ_t %	$\tilde{W}\ (\tilde{z} = 0)$	Δ_t %
ТР	-2,124	-	-3,491	-
КТ	-1,778	16,3	-2,270	35,0
Теорія С. Амбарцумяна	-1,930	9,13	-3,693	5,79
Теорія В. Піскунова і др.	-2,045	3,72	-3,682	5,47
Теорія Х. Муштарі	-2,090	1,60	-3,560	1,98
Теорія В. Піскунова, В. Присяжнюка	-2,118	0,28	-3,500	0,26
НК01	-2,086	1,79	-3,591	2,86
НК0-3	-2,120	0,19	-3,493	0,06
НК0-5	-2,124	0,00	-3,491	0,00

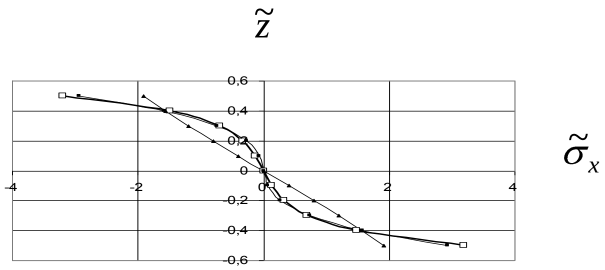

Рис.1. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині ($m = 1;\ p_{mn}/q_{mn} = 0$).

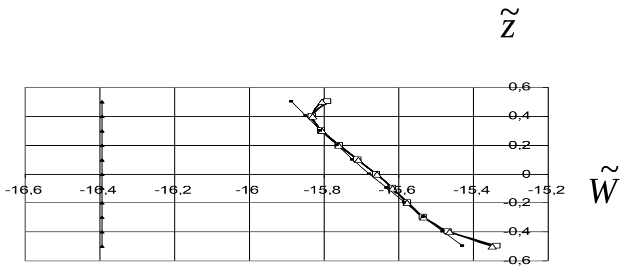

Рис.2. Змінювання $\tilde{W}$ по товщині ($m = 1;\ p_{mn}/q_{mn} = 1$).

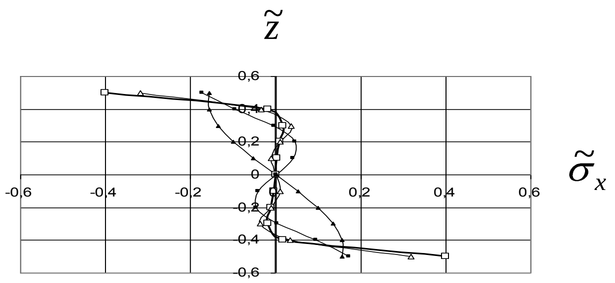

Рис.3. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині ($m = 9;\ p_{mn}/q_{mn} = 0$).

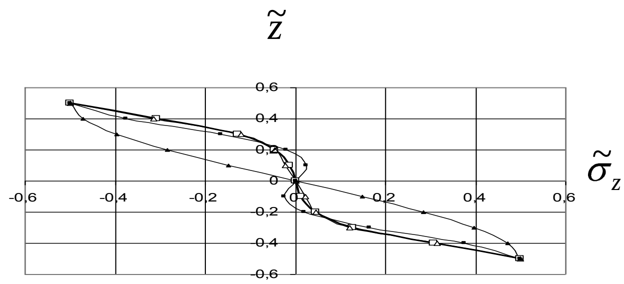

Рис.4. Змінювання $\tilde{\sigma}_z$ по товщині ($m = 9;\ p_{mn}/q_{mn} = 0$).

Таблиця 2

Компоненти НДС квадратної транстропної пластини при $h/a = 0{,}1;\ G'/G = 0{,}1; E'/E = 1; \nu' = \nu = 0{,}3;\ m = n = 9;\ p_{mn}/q_{mn} = 0 / p_{mn}/q_{mn} = 1$

$\tilde{z}$	$\tilde{\sigma}_x$				$\tilde{W}$			
	НК01	НК0-3	НК0-5	ТР	НК01	НК0-3	НК0-5	ТР
0,5	-0,3786 -0,5511	-0,6304 -0,7395	-0,8975 -1,067	-1,057 -1,240	-1,980 -1,980	-1,881 -2,102	-1,847 -2,076	-1,831 -2,050
-0,5	0,3786 0,2061	0,6304 0,5212	0,8975 0,7276	1,057 0,8745	-1,980 -1,980	-1,881 -1,660	-1,847 -1,618	-1,831 -1,611

Таблиця 3

Значення $\tilde{\sigma}_x$ для квадратних пластин при $E'/E=1;\ \nu'=\nu=0,3;\ m=n=1;$ $p_{mn}/q_{mn}=1$ (у верхніх рядках– за НК0-3; у нижніх – точні)

h/a	$\tilde{z}$	$G'/G=1$	$\Delta_t\%$	$G'/G=$ $=1/2$	$\Delta_t\%$	$G'/G=$ $=1/10$	$\Delta_t\%$	$G'/G=$ $=1/50$	$\Delta_t\%$
1/2	0,5	-1,190 -1,206	1,33	-1,296 -1,338	3,14	-1,692 -2,083	18,8	-1,993 -3,959	49,7
	-0,5	0,8350 0,8319	0,37	0,9828 0,9949	1,22	1,481 1,820	18,6	1,828 3,754	51,3
1/5	0,5	-5,243 -5,245	0,04	-5,417 -5,422	0,09	-6,555 -6,685	1,94	-9,202 -10,91	15,7
	-0,5	5,052 5,054	0,04	5,228 5,232	0,08	6,377 6,502	1,92	9,041 10,74	15,8
1/10	0,5	-20,05 -20,05	0,00	-20,23 -20,23	0,00	-21,61 -21,65	0,18	-26,95 -27,73	2,81
	-0,5	19,88 19,88	0,00	20,07 20,07	0,00	21,45 21,49	0,19	26,79 27,58	2,86

У новій постановці на основі різних наближень варіанта МТ розв'язані граничні задачі при квазізосереджених навантаженнях (рис. 5, 6; табл. 4) (S –кількість доданків у тригонометричних рядах для поперечного навантаження з параметрами $m=n=1,3,\ ...;$ q_0 – амплітудне значення доданків). НК135 дає високоточні (менше 1,8 % похибки від точних), а НК1 (теорія Тимошенка-Рейснера) – суттєво неточні результати навіть для тонких пластин. Установлено, що ВНДС пластин найбільш суттєво залежить від змінюваності та локальності поперечного навантаження, товщини, податливості на поперечний зсув. Точність наближень варіанта МТ зростає при зменшенні товщини, податливості на поперечний зсув і змінюваності поперечного навантаження.

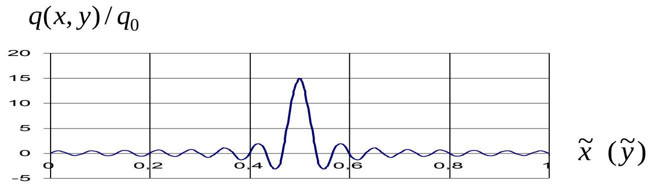

Рис. 5. Графік змінювання поперечного навантаження $q(x,y)/q_0$ при $\tilde{y}=1/2$ $(\tilde{x}=1/2)$, $S=15$.

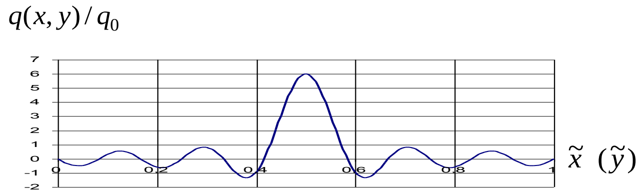

Рис. 6. Графік змінювання поперечного навантаження $q(x,y)/q_0$ при $\tilde{y}=1/2$ $(\tilde{x}=1/2)$, $S=6$.

Таблиця 4

Залежність компонент НДС від квазізосередженого навантаження ($h/a=0,1$)

G'/G	$m=n$	НК1	НК13	НК135	ТР	Δ_{t1}	Δ_{t3}	Δ_{t5}
		$\tilde{\sigma}_x\ (\tilde{z}=0,5)$						
1	1,3,…,29	-1,738	-1,818	-1,890	-1,914	9,20	5,02	1,25
0,1	1,3,…,11	-4,061	-4,765	-4,989	-5,080	20,1	6,20	1,79
G'/G	$m=n$	$\tilde{\sigma}_z\ (\tilde{z}=0,25)$						
1	1,3,…,29	-0,3438	-0,2281	-0,2279	-0,2277	51,0	0,18	0,09
0,1	1,3,…,11	-0,3438	-0,2960	-0,2945	-0,2950	16,5	0,34	0,17
G'/G	$m=n$	$\tilde{W}(\tilde{z}=0)$						
1	1,3,…,29	-20,15	-20,07	-20,07	-20,07	0,40	0,00	0,00
0,1	1,3,…,11	-78,58	-77,97	-77,95	-77,95	0,81	0,03	0,00

Уперше на основі НК0-3 для транстропних пластин установлено якісний вплив КЕ на НДС, який характеризується показниками змінюваності (ПЗ) пограншарів (ПШ) (табл. 5, 6). В табл. 5 при $G'/G=1$ в нижньому рядку наведені точні значення ПЗ (по А. Лур'є). ПЗ 1-го ПШ за НК13 добре узгоджуються з точними, а 2-го ПШ відрізняються (для ВКЕ різниця складає 7,29%), що вказує на необхідність використання високих наближень при визначенні НС в області дії крайових ефектів. При кососиметричному (симетричному) деформуванні ПКЕ при $G'/G\le 0{,}7708$ ($G'/G\le 0{,}6219$) має експоненціальний характер згасання (ПЗ $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_3$ і $\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_2$), а при $G'/G\ge 0{,}7708$ ($G'/G\ge 0{,}6219$) – осцилюючий (ПЗ $\tilde{\alpha}_k$ і $\tilde{\alpha}_s$). ВКЕ має експоненціальний характер згасання (ПЗ $\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_3,\tilde{\lambda}_k,\tilde{\lambda}$ і $\tilde{\lambda}_2$). При кососиметричному навантаженні із збільшенням податливості на поперечний зсув глибина проникнення 1-го вихрового і потенціального ПШ (характеризуються ПЗ $\tilde{\lambda}_1$ і $\tilde{\alpha}_1$) збільшується, 2-го вихрового ($\tilde{\lambda}_3$) збільшується, а потенціального ($\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_k$) – зменшується. Для ізотропних і податливих на поперечний зсув пластин глибина проникнення вихрового ПШ більша, ніж потенціального, для останніх 2-й потенціальний ПШ має невелику область проникання.

Таблиця 5

Показники змінюваності вихрового ($\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_3,\tilde{\lambda}_k,\tilde{\lambda}$) і потенціального ($\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_k$) пограншарів при кососиметричному деформуванні транстропних пластин

G'/G	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_3$	$\tilde{\lambda}_k$ ($\psi_3=0$)	$\tilde{\lambda}$ (по В. Піскунову)	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_3$	$\tilde{\alpha}_k$
0,01	0,3142	1,011	0,3347	0,2876	0,5622	112,4	-
0,1	0,9935	3,196	1,058	0,9094	1,804	35,00	-
1	3,142 3,142	10,11 9,423	3,347 -	2,876 -	- 7,498	- 13,90	7,331 -
10	9,935	31,96	10,58	9,094	-	-	5,025

Таблиця 6

Показники змінюваності вихрового ($\tilde{\lambda}_2$) і потенціального ($\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_s$) пограншарів при симетричному деформуванні транстропних пластин

G'/G	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\alpha}_0$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_s$
0,01	0,6481	0,3840	58,54	-
0,1	2,049	1,234	18,22	-
1	6,481	-	-	4,154
10	20,49	-	-	3,086

Напруження (9) (при $N\to\infty$) можна зобразити в іншому вигляді. Ряд для σ_x:

$$\sigma_x(x,y,z)=\sum_{i=0}^{\infty}(A_i(z)u_{i,x}(x,y)+B_i(z)v_{i,y}(x,y))+\sum_{i=1}^{\infty}C_i(z)\,w_i(x,y)+ \qquad (18)$$
$$+C_p(z)\,p(x,y)+C_q(z)q(x,y),\ (\sigma_x,u_{i,x},v_{i,y}\to\sigma_y,v_{i,y},u_{i,x}),$$

де функції від z виражаються нескінченними рядами через поліноми Лежандра.

Позначимо замкнену область трьох змінних x,y,z $(-h/2\le z\le h/2)$, яку займає пластина, через C_V, а відповідну область змінення x,y –через C_D. На основі обґрунтованого використання поліномів Лежандра при зображенні переміщень і їх похідних доведені теореми про збіжність рядів для напружень і про однозначність розв'язку другої основної задачі ТП в розробленому варіанті МТ пластин. Доведена теорема про збіжність ряду (18) формулюється так:

Теорема 1. Ряд для напружень (18) буде збігатися в області C_V рівномірно і абсолютно, якщо: 1) збігаються рівномірно і абсолютно ряди для складових компонент переміщень і їх похідних в області C_D; 2) збігаються рівномірно і абсолютно ряди $C_p(z), C_q(z)$ для $z \in [-h/2; h/2]$; 3) ряди $A_i(z), B_i(z), C_i(z)$ обмежені для всіх i та всіх $z \in [-h/2; h/2]$; 4) функції $p(x,y), q(x,y)$ обмежені в C_D.

Теорема 2 (про однозначність розв'язку другої основної задачі). При умові, що лінійно пружна гранична задача, яка визначається відповідними СДРР і крайовими умовами, має розв'язок, то він однозначний, якщо: 1) граничні умови виключають переміщення точок пластини як жорсткого цілого (тобто, переміщення викликаються виключно деформуванням пластини); 2) справедлива гіпотеза про природний стан тіла; 3) складові переміщень неперервні разом зі своїми похідними 1-го і 2-го порядків за обома змінними.

У **четвертому** розділі уперше побудовані нові варіанти МТ нетонких однорідних ортотропних та ізотропних ФНП за Каудерером і розроблені на їх основі методи розв'язання граничних задач. Варіанти МТ базуються на ВПР і комплексному методі, основаному на поєднанні методу розвинення усіх компонент НДС у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра та методу збурень пружних властивостей матеріалу.

Розвиваючи для ФНП у степеневі ряди за малим фізичним параметром $\varepsilon = 1/g_2$ (g_2 – безрозмірна стала матеріалу порядку $10^4 \div 10^7$) компоненти НДС, поверхневі сили та зовнішнє навантаження, одержуються наступні залежності:

$$U(x,y,z) = \sum_{l=0}^{\infty} U^{(l)}(x,y,z)\varepsilon^l, \; (U \to \ldots \to \varepsilon_x \to \ldots \to \sigma_x \to \ldots \to X_n \to \ldots \to q); \quad (19)$$

$$\ldots U^{(l)}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k u_k^{(l)}(x,y), \; (U \to V;\, u_k^{(l)} \to v_k^{(l)});\; W^{(l)}(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k w_{k+1}^{(l)}(x,y).$$

В наближенні l за параметром ε і в НК0-N компоненти напружень мають вигляд:

$$\sigma_z^{(l)}(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N+2} P_n s_{zn}^{(l)}(x,y); \;\; \sigma_{xz}^{(l)}(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N+1} P_n t_{xn}^{(l)}(x,y); \quad (20)$$

$$\sigma_x^{(l)}(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N+2} P_n s_{xn}^{(l)}(x,y) - \Phi_{sx}^{(l-1)}, (x,y); \; \sigma_{xy}^{(l)}(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N} P_n t_{yxn}^{(l)}(x,y) - \Phi_{syx}^{(l-1)};$$

$$s_{zn}^{(l)}(x,y) = \sum_{i=0}^{N} b_{ni}\omega_i^{(l)}(x,y); \; t_{xn}^{(l)}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} a_{ni} Q_{ix}^{(l)}; \;\; s_{xn}^{(l)}(x,y) = d_{0n}(u_{n,x}^{(l)} + \nu v_{n,y}^{(l)}) + d_{10} s_{zn}^{(l)},$$

$$(x,\, y); \; t_{yxn}^{(l)}(x,y) = G(u_{n,y}^{(l)} + v_{n,x}^{(l)}); \; Q_{ix}^{(l)}(x,y) = \sum_{j=1}^{N}(h_{ij} w_{j,x}^{(l)} + l_{ixj} u_j^{(l)}) + b_0 G I_{qix}^{(l-1)}(x,y),$$

$$(x,y); \; \omega_i^{(l)}(x,y) = \sum_{j=1}^{N}(q_{ij} w_j^{(l)} + e_{ij}\varphi_j^{(l)}) + e_{iq} q^{(l)} + e_{ip} p^{(l)} + e_{i\omega\xi} I_{\omega i\xi}^{(l-1)}(x,y).$$

В (19), (20) і надалі функції з індексом (l) угорі – функції x, y, які залежать від наближення l, а з індексом $(l-1)$ – функції, що залежать суттєво нелінійно від усіх компонент НДС до $(l-1)$-го наближення, причому, функції $\Phi_{sx}^{(l-1)}, \Phi_{sy}^{(l-1)}, \Phi_{syx}^{(l-1)}$ інтегрально залежать від трьох координат. Наявність функцій з індексом $(l-1)$ угорі у всіх співвідношеннях значним чином ускладнює розв'язування прикладних задач. Явні вирази функцій з індексом $(l-1)$ угорі рекурентно залежать від компонент НДС попередніх наближень і носять складний аналітичний вигляд (функції, залежності, оператори наведені в дисертації в додатку Б).

Отримані також основні рівняння для ортотропних пластин на основі методу збурень ізотропних властивостей (за малий параметр приймалось найменше відносне відхилення пружних сталих ортотропного тіла від осереднених сталих ізотропного), які мають аналогічний залежностям (19) і (20) структурний вигляд, тільки функції з індексом $(l-1)$ угорі залежать лінійно від компонент НДС до $(l-1)$-го наближення включно.

Уперше в МТ отримані в явному вигляді для довільного наближення за малим параметром основні рівняння для вказаних елементів за НК0-3, які безпосередньо можуть використовуватися для розв'язання граничних задач.

СДРР в НК0-3 за поліномами Лежандра і в наближенні l за параметром ε:

$$D_{i,1}u_0^{(l)} + D_{i,2}v_0^{(l)} + D_{i,3}u_1^{(l)} + D_{i,4}v_1^{(l)} + D_{i,5}u_2^{(l)} + D_{i,6}v_2^{(l)} + D_{i,7}u_3^{(l)} + \tag{21}$$

$$+ D_{i,8}v_3^{(l)} + D_{i,9}w_1^{(l)} + D_{i,10}w_2^{(l)} + D_{i,11}w_3^{(l)} = D_{ip}^{(l)} + D_{iq}^{(l)} + D_{i\xi}^{(l-1)},\ (i = 1,2,\ldots 11)\ .$$

Тут функції $D_{ip}^{(l)}, D_{iq}^{(l)}$ – залежать від зовнішнього навантаження l-го наближення, $D_{i,j}$ – диференціальні оператори відповідної лінійно пружної задачі.

Крайові умови:

$$\int_s \left\{ \left(N_{0u}^{(l)} - \tilde{N}_{0u}^{(l)}\right)\delta u_o^{(l)} + \left(N_{0v}^{(l)} - \tilde{N}_{0v}^{(l)}\right)\delta v_0^{(l)} + \sum_{k=1}^{3} \left[\left(M_{ku}^{(l)} - \tilde{M}_{ku}^{(l)}\right)\delta u_k^{(l)} + \right.\right. \tag{22}$$

$$\left.\left. + \left(M_{kv}^{(l)} - \tilde{M}_{kv}^{(l)}\right)\delta v_k^{(l)} + \left(Q_{kw}^{(l)} - \tilde{Q}_{kw}^{(l)}\right)\delta w_k^{(l)}\right]\right\} ds = 0\,,$$

де
$$N_{0u}^{(l)} = \left(h s_{x0}^{(l)} - \Phi_{sx0}^{(l-1)}\right) l_x + \left(h t_{yx0}^{(l)} - \Phi_{syx0}^{(l-1)}\right) l_y\,,\ \tilde{N}_{0u}^{(l)} = \int_z P_0 X_\nu^{(l)}(z,s)dz\,,$$

$$M_{ku}^{(l)} = \left(\frac{h}{2k+1} s_{xk}^{(l)} - \Phi_{sxk}^{(l-1)}\right) l_x + \left(\frac{h}{2k+1} t_{yxk}^{(l)} - \Phi_{syxk}^{(l-1)}\right) l_y\,,\ \tilde{M}_{ku}^{(l)} = \int_z P_k X_\nu^{(l)}(z,s)dz\,,$$

$$(u,v;x,y;X_\nu,Y_\nu)\,;\ Q_{kw}^{(l)} = \frac{h}{2k-1}\left(t_{x\,k-1}^{(l)} l_x + t_{y\,k-1}^{(l)} l_y\right);\ \tilde{Q}_{kw}^{(l)} = \int_z P_{k-1} Z_\nu^{(l)}(z,s)dz\,,\ (k = 1,2,3)\,.$$

Уперше на основі нових розроблених варіантів МТ тривимірна задача ТП для нетонких ортотропних (фізично нелінійних) пластин зведена до рекурентної нескінченної послідовності лінійних двовимірних крайових задач для пластин із осередненими ізотропними властивостями (лінійно пружних ізотропних). Праві частини отриманих СДР з частинними похідними (21) і крайові умови (22) в довільному наближенні за параметром ε лінійно (нелінійно) залежать від компонент НДС попередніх наближень.

Розроблений у роботі метод збурень ізотропних властивостей може бути узагальнений для розвинення методу збурень транстропних властивостей анізотропних пластин, що дасть можливість окремо досліджувати КЕ і ВНДС, оскільки для суттєво анізотропних пластин в прямій постановці це зробити неможливо.

СДРР (21), як і у випадку лінійної задачі, розділена на систему кососиметричного та симетричного деформування. СДР кососиметричного деформування (12-го порядку) в кожному наближенні за малим параметром розділена на дві незалежні системи неоднорідних ДР: одна (4-го порядку) описує ВКЕ і уточнює ВНДС, а інша – (8-го порядку) описує ВНДС (визначається загальними розв'язками бігармонічного рівняння і частинними розв'язками двох суттєво неоднорідних ДР 8-го порядку) та ПКЕ (визначається згасаючим розв'язком однорідного ДР 4-го порядку). СДР симетричного деформування (10-го порядку) в довільному наближенні за малим параметром розділена на дві групи рівнянь: одне неоднорідне ДР 2-го порядку описує ВКЕ і уточнює ВНДС, а система ДР 8-го порядку описує ВНДС (визначається загальним розв'язком бігармонічного рівняння і частинними розв'язками трьох суттєво неоднорідних ДР 8-го порядку) та ПКЕ (визначається згасаючим розв'язком однорідного ДР 4-го порядку).

Уперше побудовані загальні розв'язки рекурентної СДР, яка зведена до неоднорідних ДР 2-го порядку, праві частини яких залежать від НДС попередніх наближень за малим параметром.

З урахуванням перших двох наближень за параметром ε проведено тестування методу збурень ізотропних властивостей матеріалу в задачах для транстропних пластин, яке підтвердило його ефективність.

Уперше в МТ за розробленим варіантом побудовані аналітичні розв'язки фізично нелінійних граничних задач в одинарних та подвійних тригонометричних рядах.

Досліджено чисельно ВНДС нетонких ФНП у перших двох наближеннях ($l = 0{,}1$) за малим параметром в НК13 (циліндричний згин) при гармонічному навантаженні в широких межах змінення МГХ. Фізична нелінійність може суттєво впливати на компоненти НДС (КНДС) в залежності від МГХ і величини навантаження (табл. 7, 8). Наведені результати за класичною лінійною теорією (КЛТ), фізично лінійними (ФЛ) і фізично нелінійними (ФН) варіантами МТ.

Таблиця 7

Компоненти НДС (при $\tilde{z} = 0{,}5$) ФНП із чистої міді ($h/a = 1/5$; G=44230 МПа; $\nu = 0{,}349$; $g_2 = 0{,}18 \cdot 10^6$)

КН ДС	КЛТ	ФЛ НК1	ФЛ НК13	ФЛ НК135	ФН, НК13 q_m =10 МПа	Δ %	ФН, НК13 q_m =15 МПа	Δ %
$\tilde{\sigma}_x$	-15,20	-15,31	-15,40	-15,40	-13,91	9,68	-12,06	21,7
$\tilde{W}$	-67,62	-75,14	-73,08	-73,06	-84,05	15,0	-97,76	33,8

Таблиця 8

Компоненти НДС ФНП із чистої міді ($h/a = 1/10$; $\tilde{z} = 0{,}5$)

КН ДС	КЛТ	ФЛ НК1	ФЛ НК13	ФЛ НК135	ФН, НК13 $q_m = 2$ МПа	Δ %	ФН, НК13 $q_m = 4$ МПа	Δ %
$\tilde{\sigma}_x$	-60,80	-60,91	-61,00	-61,00	-56,81	6,87	-44,26	27,4
$\tilde{W}$	-1082	-1112	-1103	-1103	-1229	11,4	-1606	45,6

На основі отриманих у роботі числових результатів і якісних ефектів сформульовані наступні висновки і рекомендації при знаходженні НДС ФНП, а саме: розраховуючи тонкі пластини при плавних поперечних навантаженнях, потрібно ураховувати нелінійно пружні властивості матеріалу, але при цьому достатньо використовувати КТ; визначаючи НДС товстих пластин, фізичною нелінійністю можна нехтувати, але компоненти НДС потрібно зображати у вигляді рядів за поперечною координатою; при розрахунках пластин із товщинами $h/a \cong 1/8 \div 1/3$ потрібно використовувати як метод розвинення

НДС у ряди за товщинною координатою так і ураховувати нелінійно пружні властивості матеріалу; при швидкозмінних по області навантаженнях і в інших випадках, які, призводять до НДС з високим градієнтом змінювання, також потрібно ураховувати фізичну нелінійність сумісно з розвиненням компонент НДС у ряди за поперечною координатою.

У **п'ятому** розділі побудовано новий варіант МТ однорідних пологих транстропних оболонок довільної сталої товщини, розроблені аналітичні методи розв'язання СДРР високих порядків, до яких зводяться граничні задачі. Уперше в МТ виведені в явному вигляді взаємозв'язані основні рівняння за НК013, НК0-3, НК0135, НК0-5, які придатні для розв'язання граничних задач. Компоненти НДС мають вигляд (8), (9). Справедливими є співвідношення (10) для $t_{yxn}(x,y)$; функції $s_{xn}(x,y)$, $s_{yn}(x,y)$ зображуються так: $s_{xn}(x,y) = d_0(u_{n,x} + \nu v_{n,y} + k_{1\nu} w_{n+1}) + d_{10} s_{zn}$, $k_{1\nu} = k_1 + \nu k_2$, $(x,y;\ u_n, v_n;\ k_{1\nu}, k_{2\nu})$, де $k_{1,2} = 1/R_{1,2}$ – кривини оболонки; інші функції для пологих оболонок структурно аналогічні (10), але сталі залежать ще й від кривин.

В одержаних СДР ураховані кривини у деформаціях поперечного зсуву. НДС указаних пологих оболонок для кожного наближення варіанта МТ визначається розв'язками систем взаємозалежних ДР з частинними похідними.

Зв'язана СДРР в НК0-N (порядку 2(3N+2) має такий вигляд:

$$\sum_{j=0,1}^{N}(D_{iuj}u_j + D_{ivj}v_j) + \sum_{j=1,2}^{N} D_{iwj}w_j = D_{ipq}(x,y),\ (i = 1,2,\ldots,3N+2), \qquad (23)$$

де $D_{iuj}, D_{ivj}, D_{iwj}$ – диференціальні оператори 2-го, 1-го і нульового порядків, а D_{ipq} – функції x, y зовнішнього навантаження і їх похідних, які залежать від МГП оболонки. Отримані і наведені в роботі явні вирази коефіцієнтів, операторів і функцій (23) для НК01 і уперше для НК013, НК0-3, НК0135, НК0-5.

Якщо в системах ДРР для різних наближень не ураховувати кривини у деформаціях поперечного зсуву і ввести певні спрощення, то з них виділяються однорідні СДР вихрового КЕ (співпадають із СДР для пластин) і системи ДР, що описують взаємозалежні ВНДС і ПКЕ. Установлено, що в НК0-N СДР ВКЕ має порядок 2N (система в кількості (N+1)/2 ДР порядку (N+1) описує ВКЕ при кососиметричному деформуванні, а система в кількості (N-1)/2 ДР порядку (N-1)– ВКЕ при симетричному). ВНДС із ПКЕ визначається взаємозв'язаною СДР порядку 4(N+1).

Системи ВНДС із ПКЕ зведені розробленою методикою до розв'язувальних СДР відносно складових компонент переміщень $u_0, v_0, w_1, w_2, \ldots w_N$, які операторним методом перетворені до визначальних СДР відносно нових введених функцій.

СДР в НК0-3 (N=3) має 22-й порядок. ВКЕ описується однорідною СДР 4-го порядку при кососиметричному деформуванні (зводиться до 2-х ДР Гельмгольца відносно нових функцій) і незалежним ДР Гельмгольца при симетричному деформуванні. СДР, яка описує ВНДС із ПКЕ (16-го порядку) має такий вигляд:

$$P_{iu0}u_o + P_{iv0}v_o + P_{iw1}w_1 + P_{iw2}w_2 + P_{iw3}w_3 = P_{iq}q(x,y) + P_{ip}p(x,y),\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5), \qquad (24)$$

де P з індексами–диференціальні оператори, зокрема: $P_{1q} = p_{1q}\partial/\partial x$; $P_{1p} = p_{1p}\partial/\partial x$;

$P_{2q} = p_{2q}\partial / \partial y;\ P_{2p} = p_{2p}\partial / \partial y;\ P_{iq} = p_{iq2}\nabla^2 + p_{iq0};\ P_{ip} = p_{ip2}\nabla^2 + p_{ip0}$, $(i = 3,4,5)$; p з індексами – МГП.

Розроблена узагальнена методика побудови форм загальних розв'язків СДРР в наближеннях К01, К013, К0135, К0-5. СДР (24) зведена до визначальної СДР відносно нових функцій $D_i(x, y)$ $(i = 1,...,5)$:

$$PD_i(x, y) = P_{iq}q(x, y) + P_{ip}p(x, y), \quad (25)$$

де $P = \dfrac{\partial^4}{\partial x^4} \sum_{i=0,2}^{12} a_i \nabla^i + \dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \sum_{i=0,2}^{12} b_i \nabla^i + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4} \sum_{i=0,2}^{12} c_i \nabla^i$, ($a_i$, b_i, c_i – МГП).

Загальні розв'язки СДР (25):

$$D_1(x, y) = D_{10}(x, y) + D_{1r}(x, y);\ D_i(x, y) = D_{ir}(x, y),\ (i = 2,3,4,5). \quad (26)$$

В (26) $D_{ir}(x, y)$, $D_{10}(x, y)$ частинні і загальний розв'язки неоднорідних і відповідного однорідного ДР (25).

Отримані форми загальних розв'язків СДР (24) у вигляді:

$$u_0(x, y) = P_{11}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^{5} P_{i1}^0 D_{ir}(x, y);\ v_0(x, y) = P_{12}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^{5} P_{i2}^0 D_{ir}(x, y); \quad (27)$$

$$w_{k-2}(x, y) = P_{1k}^0 D_{10}(x, y) + \sum_{i=1}^{5} P_{ik}^0 D_{ir}(x, y),\ (k = 3,\ 4,\ 5),$$

де P_{ij}^0–ад'юнкти визначника (24).

На основі (27) визначаються загальні розв'язки для інших складових компонент НДС. Розроблені алгоритм і пакет математичних програм визначення НДС у різних наближеннях, побудовані аналітичні розв'язки в одинарних і подвійних тригонометричних рядах для різних навантажень (плавних і швидкозмінюваних по області, локальних, зосереджених). Отримані числові залежності внутрішнього НДС прямокутних у плані пологих оболонок при моногармонічних, полігармонічних і локальних навантаженнях від МГХ та наближень варіанта МТ.

Із широких числових досліджень у роботі наведено 19 табл. і 14 рис. (у дод. В). На рис. 7, 8 зображені графіки залежностей компонент НДС при $R_{1,2} / a = 5$; $G' / G = 0{,}1$. У табл. 9–12 наведені компоненти НДС в залежності від МГХ, типу навантаження, урахування кривин ($k'_{1,2} = k_{1,2}$) у деформаціях поперечного зсуву, наближень варіанта МТ ($E' / E = 1$, $\nu' = \nu = 0{,}3$). У табл. 9, 10 Δ характеризує вплив урахування кривин $k'_{1,2}$).

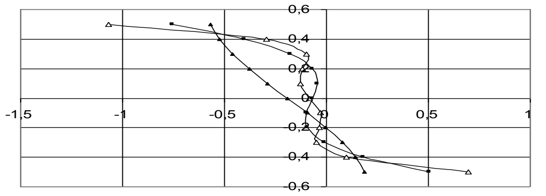

Рис. 7. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ по товщині $(h / a = 0{,}1; m = n = 9; p_{mn} / q_{mn} = 1)$.

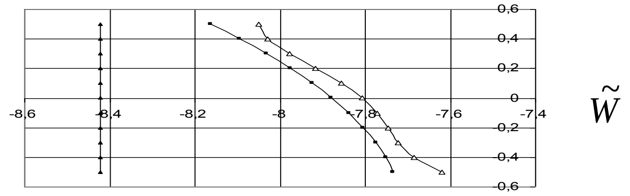

Рис. 8. Змінювання $\tilde{W}$ по товщині $(h / a = 0{,}05;\ m = n = 9;\ p_{mn} / q_{mn} = 1)$.

Таблиця 9

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки

($h/a=0{,}2; R_{1,2}/a=5;\ G'/G=0{,}1;\ m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=1;\ \ k'_{1,2}\neq 0/k'_{1,2}=0$)

$\tilde{z}$	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ%	Δ_{31} %	Δ_{53} %
	$\tilde{\sigma}_x$					
-0,5	3,479 3,444	4,844 4,832	4,841 4,832	0,19	28,2 -	0,06 -
$\tilde{z}$	$\tilde{W}$					
-0,5	-52,17 -51,91	-50,83 -50,59	-49,52 -49,28	0,48	2,64 -	2,65 -

Виконано аналіз збіжності рядів для компонент НДС. Отримано високу збіжність результатів при кососиметричному повільнозмінюваному в області навантаженні навіть для достатньо товстих ізотропних оболонок ($h/a=0{,}5;\ R_{1,2}/a=5;\ \nu=0{,}3$). Збіжність результатів у цілому покращується зі зменшенням товщини, податливості матеріалу на поперечний зсув та із зростанням пологості оболонки. Справедлива **теорема 3** (аналогічна теоремі 1 для пластин) про збіжність рядів для напружень.

При швидкозмінюваних в області навантаженнях для визначення НДС потрібноураховувати вищі наближення (табл. 12). Для слабопологих товстих транстропних оболонок ($h/a\geq 0{,}5;\ 29/40\leq R_{1,2}/a\leq 1$) необхідно враховувати залежність деформацій поперечного зсуву від кривин (табл. 10), а при кососиметричному навантаженні – складові компонент переміщень з парними натуральними індексами у рядах розвинення НДС (табл. 11; Δ' –різниця у % між НК0-3 і НК013, НК0-5 і НК0135).

Таблиця 10

Компоненти НДС квадратної в плані ізотропної оболонки при $\tilde{z}=0{,}5$;

$h/a=0{,}5; R_{1,2}/a=29/40;\ G'/G=1;\ m=n=1; p_{mn}/q_{mn}=0;\ k'_{1,2}\neq 0/k'_{1,2}=0$

КНДС	КТ	НК01	НК0-3	НК0-5	Δ %	Δ_{1k}%	Δ_{31}%	Δ_{53}%
$\tilde{\sigma}_x$	-0,7789	-0,9052 -0,9038	-0,9740 -0,9091	-0,9921 -0,9267	6,59	14,0 13,8	7,06 0,58	1,82 1,90
$\tilde{W}$	-0,3696	-0,8225 -0,6840	-0,7379 -0,5982	-0,7485 -0,6118	18,3	55,1 46,0	11,5 14,3	1,42 2,22

Таблиця 11

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки при

$h/a=0{,}5;\ R_{1,2}/a=29/40;\ G'/G=0{,}1;\ m=n=1;\ k'_{1,2}\neq 0;\ p_{mn}/q_{mn}=0$

$\tilde{z}$	НК01	НК013 НК0-3; Δ'	НК0135 НК0-5; Δ'	НК01	НК013 НК0-3; Δ'	НК0135 НК0-5; Δ'
	$\tilde{\sigma}_x$			$\tilde{W}$		
0,5	-0,874	-1,052 -0,939; 13,1	-1,129 -1,013; 11,5	-1,690	-1,726 -1,562; 10,5	-1,719 -1,568; 9,63

Поперечне обтискання (характеризується величиною Δ_{pq}) може суттєво впливати на НДС не тільки товстих, але і оболонок середньої товщини ($h/a=0{,}1\div 0{,}2$), особливо при швидкозмінюваних в області навантаженнях (табл. 12). Якісні висновки щодо впливу інших МГХ на НДС пологих оболонок аналогічні висновкам для пластин.

Таблиця 12

Компоненти НДС квадратної в плані транстропної оболонки при $z/h=-0{,}5$
$h/a=0{,}1; R_{1,2}/a=5;\ G'/G=0{,}1;\ m=n=9;\ \ k'_{1,2}\neq 0;\ p_{mn}/q_{mn}=0\ /\ p_{mn}/q_{mn}=1$

КНДС	НК01	НК0-3	НК0-5	$\Delta_{pq}\%$	$\Delta_{31}\%$	$\Delta_{53}\%$	$\Delta_{51}\%$
$\tilde{\sigma}_x$	0,3595 0,1868	0,6126 0,5042	0,8815 0,6982	26,3	41,3 63,0	30,5 27,8	59,2 73,2
$\tilde{W}$	-1,979 -1,977	-1,886 -1,659	-1,852 -1,586	16,8	4,93 19,2	1,84 4,60	3,94 24,7

В роботі наведені результати для $\tilde{\sigma}_x$ і $\tilde{W}$ для транстропних і ізотропних пластин (точний розв'язок) і пологих оболонок в НК0-3. В табл. 13 наведені результати для $\tilde{\sigma}_x$ (Δ_{po}–відносне розходження результатів для пластини і пологої оболонки). Для $\tilde{W}$ розходження $\Delta_{po}\leq 4{,}87\%$ для транстропних пологих оболонок з МГХ табл. 13 і $\Delta_{po}\leq 3{,}90\%$ для ізотропних оболонок. На основі цього можна оцінювати наближений розрахунок пологих оболонок, замінюючи їх відповідними пластинами, враховуючи що Δ_{po} зменшується із зменшенням кривини і податливості на поперечний зсув.

Таблиця 13

Значення $\tilde{\sigma}_x$ для пологих оболонок у НК0-3
($a=b;\ \ G'/G=0{,}1;\ E'/E=1;\ \nu'=\nu=0{,}3;\ m=n=1;\ k'_{1,2}\neq 0;\ \ p_{mn}/q_{mn}=0/\ p_{mn}/q_{mn}=1$)

$\frac{h}{a}$	z/h	Пластина (ТР)	Об-ка $R_{1,2}/a=10$	Δ_{po} %	Об-ка $R_{1,2}/a=20$	Δ_{po} %	Об-ка $R_{1,2}/a=40$	Δ_{po} %
$\frac{1}{3}$	0,5	-3,190 -3,299	-3,360 -3,393	5,33 2,85	-3,278 -3,349	2,76 1,52	-3,226 -3,316	1,13 0,52
	-0,5	3,190 3,081	2,871 2,702	10,0 12,3	3,031 2,890	4,98 6,20	3,102 2,978	2,76 3,34
$\frac{1}{5}$	0,5	-6,593 -6,685	-6,981 -6,973	5,89 4,31	-6,823 -6,866	3,49 2,71	-6,715 -6,783	1,85 1,47
	-0,5	6,593 6,502	5,921 5,748	10,2 11,6	6,285 6,150	4,67 5,41	6,445 6,332	2,24 2,61
$\frac{1}{10}$	0,5	-21,57 -21,65	-22,75 -22,67	5,47 4,71	-22,41 -22,41	3,89 3,51	-22,05 -22,09	2,23 2,03
	-0,5	21,57 21,49	18,62 18,41	13,7 14,3	20,28 20,12	5,98 6,38	20,98 20,86	2,74 2,93

У **шостому** розділі уперше побудовані нові варіанти МТ нетонких пологих однорідних ортотропних і ізотропних фізично нелінійних оболонок (ФНО) за Каудерером та розроблені на його основі методи розв'язання граничних задач. Варіанти МТ, як і для пластин, основані на ВПР і методі розвинення усіх компонент НДС і граничних умов у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра в поєднанні з методом збурень пружних властивостей матеріалу. Вводяться ті ж самі малі параметри, як і для пластин.

Уперше в МТ в НК0-3 отримані в явному вигляді для вказаних оболонок в довільному наближенні l за малим параметром ε основні рівняння, які мають структурний вигляд, як і для ортотропних і ФНП, але відрізняються деформаціями і функціями s_{xn}, s_{yn}: $s_{xn}^{(l)}(x,y) = d_0(u_{n,x}^{(l)} + \nu v_{n,y}^{(l)} + k_{1\nu} w_{n+1}^{(l)}) + d_{10} s_{zn}^{(l)}$, $(x, y;\, u, v;\, k_{1\nu}, k_{2\nu})$.

Уперше тривимірна задача ТП в МТ нетонких ФНО (ортотропних оболонок) зведена до нескінченної рекурентної послідовності лінійних двовимірних крайових задач для ізотропних оболонок (оболонок з осередненими ізотропними властивостями). Праві частини отриманих СДР і крайові умови в довільному наближенні за малим фізичним параметром нелінійно (лінійно) залежать від НДС попередніх наближень. Рекурентна СДРР в НК0-3 і в довільному наближенні l за малим параметром має наступний вигляд: $\sum_{j=0,1}^{3}(D_{iuj}u_j + D_{ivj}v_j) + \sum_{j=1,2}^{3} D_{iwj}w_j = D_{ip}^{(l)} + D_{iq}^{(l)} + D_{i\xi}^{(l)}$, $(i = 1,2,...,11)$, де D_{ij} $(j = 1, 2,...,11)$ – диференціальні оператори (для ФНО співпадають із аналогічними для ізотропної пологої оболонки); $D_{ip}^{(l)}, D_{iq}^{(l)}$ – функції наближення l від зовнішнього навантаження; $D_{i\xi}^{(l-1)}$ – функції, що залежать від компонент НДС 0–го – $(l-1)$ – го наближень за параметром ε включно; мають складний аналітичний інтегральний вигляд, наведені в основному тексті дисертації і в дод. Г.

Отримані за ε нові системи неоднорідних ДР (22-го порядку) в кожному наближенні перетворені, і при певних умовах розділені на дві: одна описує ВКЕ і уточнює ВНДС, а інша – визначає взаємозв'язані ВНДС із ПКЕ. Система ВКЕ (система однорідних ДР 6-го порядку) розділена на дві групи ДР: при кососиметричному деформуванні–це СДР 4-го порядку, і при симетричному –ДР 2-го порядку. Частинні розв'язки неоднорідних ДР уточнюють ВНДС.

Уперше в МТ операторним методом побудовані загальні розв'язки ДР, що містять вихрові функції, і отримані форми загальних розв'язків СДР високого порядку внутрішнього НДС з ПКЕ (16-го порядку), яка в наближенні l по ε має вигляд:

$$P_{iu0}u_0^{(l)} + P_{iv0}v_0^{(l)} + P_{iw1}w_1^{(l)} + P_{iw2}w_2^{(l)} + P_{iw3}w_3^{(l)} = P_{ipq}^{(l)} + P_{i\xi}^{(l-1)}\ ,\ (i = 1,\ 2,\ ...,\ 5), \quad (28)$$

де $P_{iu0},...,P_{iw3}$ – диференціальні оператори для ізотропної оболонки; $P_{ipq}^{(l)}$ – функції від зовнішнього навантаження у наближенні l за малим параметром; $P_{i\xi}^{(l-1)}$ –функції, які суттєво нелінійно для ФНО і лінійно для ортотропних оболонок залежать від попередніх $(l-1)$ -го наближень. Форми загальних розв'язків для кожного наближення l мають рекурентний вигляд:

$$u_0^{(l)}(x,y) = P_{11}^0 D_{10}(x,y) + \sum_{i=1}^{5} P_{i1}^0 D_{ir}^{(l-1)}(x,y),\ (u_0^{(l)}, P_{i1}^0 \to v_0^{(l)}, P_{i2}^0);$$

$$w_{k-2}^{(l)}(x,y) = P_{1k}^0 D_{10}(x,y) + \sum_{i=1}^{5} P_{ik}^0 D_{ir}^{(l-1)}(x,y),\ (k = 3,\ 4,\ 5),$$

де P_{ik}^0 – ад'юнкти СДР (28) (як для ізотропної оболонки); $D_{10}(x,y)$ – загальний розв'язок однорідного ДР $P_0 D_1^{(l)}(x,y) = 0$, (P_0–диференціальний визначник СДР (28)), $D_{ir}^{(l-1)}(x,y)$– частинні розв'язки неоднорідних ДР $P_0 D_i^{(l)}(x,y) = P_{ipq}^{(l)} + P_{i\xi}^{(l-1)}$. Форми загальних розв'язків для інших компонент НДС в наближенні l також залежать від НДС попередніх наближень.

Запропоновано метод розв'язання суттєво неоднорідних СДР у довільному наближенні за малим параметром, оснований на апроксимації правих частин ДР тригонометричними рядами. Уперше в МТ поставлена і розв'язана аналітично гранична задача для ізотропної ФНО в одинарних тригонометричних рядах. У новій постановці розв'язана гранична задача для ФНО при граничних умовах Нав'є. Отримані числові результати (циліндричний згин) (рис. 9, 10; табл.14); лінія —○— відповідає фізично нелінійній теорії. Виконані з використанням методу збурень ізотропних властивостей числові дослідження НДС квадратних в плані пологих транстропних оболонок (для порівняння результатів із прямим розв'язком) указують на ефективність підходу.

Як випливає із отриманих результатів (у роботі наведено 8 табл. і 8 рис.), в залежності від МГХ фізична нелінійність може суттєво впливати на компоненти НДС. Вплив фізичної нелінійності на НДС ФНО аналогічний ФНП і мало залежить від змінювання кривини середньопологих та сильнопологих оболонок ($R_1/a \geq 1$).

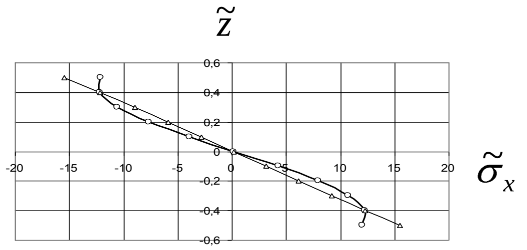

Рис. 9. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 1$; $q_m = 15МПа$).

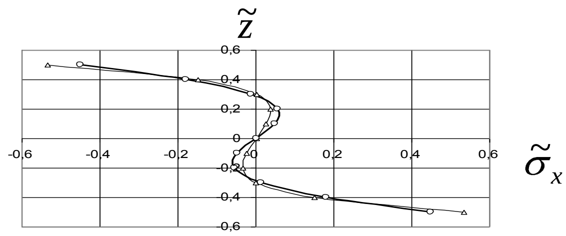

Рис. 10. Змінювання $\tilde{\sigma}_x$ ($h/a = 1/5$; $R_1/a = 5$; $m = 9$; $q_m = 15МПа$).

Таблиця 14

Компоненти НДС ФНО з чистої міді від дії кососиметричного навантаження при циліндричному згині ($h/a = 1/5$; $\tilde{z} = 0,5$; $R_1/a = 10$; $m = 1$)

КН ДС	КЛТ	ФЛ НК01	ФЛ НК013	ФЛ НК0135	ФН, НК13 $q_m = 10$ МПа	Δ %	ФН, НК13 $q_m = 15$ МПа	Δ %
$\tilde{\sigma}_x$	-15,20	-15,28	-15,42	-15,42	-13,93	9,66	-12,08	21,7
$\tilde{W}$	-67,62	-75,30	-73,22	-73,20	-84,24	15,1	-98,00	33,9

У **сьомому** розділі уперше побудовані нові варіанти МТ в НК0-3 нетонких шаруватих (однорідних в межах кожного шару) транстропних і ізотропних фізично нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок симетричної та несиметричної структур, які основані на ВПР і методі розвинення усіх компонент НДС у ряди за поперечною координатою в межах кожного шару при допомозі комбінацій поліномів Лежандра з використанням МВР. Граничні умови на лицевих площинах (поверхнях) і умови жорсткого зчеплення між шарами виконуються точно. Розроблені методи розв'язання отриманих на їх основі СДР у граничних задачах.

У новій постановці уперше з позицій тривимірної ТП розглянуті шаруваті фізично нелінійні пологі оболонки довільної сталої товщини h несиметричної структури з товщинами шарів h_i ($1 \leq i \leq j$; j – кількість шарів) і радіусами кривини серединних поверхонь кожного шару R_{1i}, R_{2i}. Введена прямокутна система координат $O_i xyz_i$ в межах кожного шару. Вісь $O_i z_i$, початок якої належить плану серединній поверхні i-го шару оболонки, напрямлена вбік опуклості оболонки. Залежності між деформаціями та напруженнями в i-му шарі зображуються сумою лінійної і нелінійної складових.

Уперше прийнято нове зображення компонент НДС, яке основане на апроксимації переміщень рядами за комбінаціями поліномів Лежандра у межах кожного шару:

$$U_i(x,y,z_i)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{ki}(z_i)u_k(x,y),\ (U_i,V_i;u_k,v_k);\ W_i(x,y,z_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{ni}(z_i)w_{n+1}(x,y).\quad(29)$$

В (29) $\varphi_{0i}(z_i)\equiv a_{0i0}P_0,\ (a_{0i0}=1)$; $\varphi_{ki}(z_i)=\sum_{m=0}^{k}a_{kim}P_m(2z_i/h_i)$; функція $\varphi_{1i}(z_i)$ через змінну z $(0\le z\le h)$ для всіх i виражається у вигляді: $\varphi_{1i}(z)\equiv\varphi_1(z)=a_1+b_1 z/h,$ де коефіцієнти a_1 та b_1 визначаються із класичних умов: 1) $\varphi_{1i}(z=h)\equiv\varphi_1(z=h)=1;$ 2) $\sum_{i=1}^{j}d_i\int_{h_i}\varphi_{1i}(z)dz=0,\ (d_i=E_i/(1-\nu_i^2))$. Зображення $\varphi_{ki}(z_i)$ при $k\ge 2$ принципово інші, ніж у працях проф. О. П. Прусакова та інших авторів. Коефіцієнти a_{kim} $(k\ge 2)$ для довільного i-го шару при довільній кількості шарів j оболонки визначаються також із класичних умов: 1) $\varphi_{ki}(z=h)=1,\ (k=1,2,...;\ 0\le z\le h)$; 2) неперервності функцій φ_{ki} на границі шарів: $\varphi_{ki}(z_i=t_i)=\varphi_{k\,(i+1)}(z_{i+1}=-t_{i+1}),(i=1,2,...j-1;\ t_i=h_i/2)$); 3) ортогональності функцій φ_{ki} по всьому пакету шарів до всіх попередніх функцій: $\sum_{i=1}^{j}d_i\int_{h_i}\varphi_{ki}(z_i)\varphi_{ni}(z_i)dz_i=0,\quad(n=0,1,...,k-1);$ 4) найменшого середньоквадратичного відхилення функцій φ_{ki} від відповідних їм «базових» функцій $\tilde{\varphi}_{ki}=b_{k0}+b_{k1}z/h+...+b_{kk}z^k/h^k$, де b_{km} $(m=0,...,k)$ знаходяться із рівнянь 1-ї та 3-ї умов.

Уперше в МТ в НК0-3 (у (29) $k=0,1,2,3$) фізично лінійних і нелінійних шаруватих елементів отримані в явному вигляді коефіцієнти, залежності, ДРР і крайові умови. Граничний перехід до однорідної оболонки (пластини) відповідає апроксимації компонент при допомозі поліномів Лежандра, і всі основні рівняння перетворюються у рівняння для відповідних однорідних елементів. Для шаруватих ФНО поперечні напруження в i-му шарі мають вигляд:

$$\sigma_{zxi}(x,y,z_i)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z_i)t_{xik}(x,y)\ ,\ (x,y);\ \ \sigma_{zi}(x,y,z_i)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z_i)s_{zik}(x,y);$$

де $t_{xik}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}e_{mik}Q_{mx}(x,y),(k=0,1,2);\ t_{xik}(x,y)=\sum_{m=k-1}^{\infty}e_{mik}Q_{mx}(x,y),(k=3,4,...);$

$s_{zi0}(x,y)=-0,5p(x,y)+\sum_{m=1}^{\infty}q_{mi0}\omega_m(x,y);\ s_{zik}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{mik}\omega_m(x,y),\ (k=1,2,3);$

$s_{zik}(x,y)=\sum_{m=k-2}^{\infty}q_{mik}\omega_m(x,y),\ (k=4,5,..)$. Для перших k функцій Q_{mx},Q_{my} $(m=1,...,k)$ і $\omega_n(x,y),(n=2,...,k)$: $Q_{mx}(x,y)=\sum_{n=1}^{k}h_{mn}\partial w_n(x,y)/\partial x+\sum_{n=0}^{k}l_{xmn}u_n(x,y)-h_{mx}(x,y,t),\ (x,y;$ $u\to v)$; $\omega_n(x,y,t)=\sum_{m=1}^{k}q_{nm}w_m(x,y)+\sum_{m=0}^{k}e_{nm}\varphi_m(x,y)+e_{np}p(x,y)+e_{nq}q(x,y)-e_{n\omega}(x,y,t),$

де $h_{mx}(x,y,t)$ і $e_{n\omega}(x,y,t)$ –функції, які залежать інтегрально по всій товщині від МГХ, поліномів Лежандра і нелінійних за Каудерером складових у залежностях між деформаціями і напруженнями (вказує параметр t); сталі $e_{kim,} q_{kim}$ залежать від a_{kim}; $h_{mn,} l_{xmn}, q_{nm},..., e_{nq}$ –МГП.

Тангенціальні напруження: $\sigma_{xi}(x,y,z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_i) s_{xik}(x,y) - f_{xi}(x,y,z_i,t)$,

$(\sigma_{xi}, s_{xik}, f_{xi} \to \sigma_{yi}, s_{yik}, f_{yi})$; $\sigma_{yxi}(x,y,z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z_i) t_{yxik}(x,y) - f_{yxi}(x,y,z_i,t)$, де $f_{xi}(x,y,z_i,t), f_{yi}(x,y,z_i,t), f_{yxi}(x,y,z_i,t)$ залежать від МГП і нелінійних складових у співвідношеннях між деформаціями і напруженнями. Коефіцієнти $e_{kim,} q_{kim}$ залежать від a_{kim}. Отримані рекурентні залежності: за знайденими коефіцієнтами e і q з індексами для 1-го шару відшукуються однойменні коефіцієнти для інших шарів за відповідними рекурентними формулами. Тривимірна задача ТП зведена до двовимірної. СДРР у НК0-3 (22-го порядку) для шаруватої пологої ФНО має вигляд:

$$D_{i,1}u_0 + D_{i,2}v_0 + D_{i,3}u_1 + D_{i,4}v_1 + D_{i,5}u_2 + D_{i,6}v_2 + D_{i,7}u_3 + D_{i,8}v_3 + \sum_{n=1}^{3} D_{i,8+n}w_n = D_{ipq} + D_{i\xi},$$

де D_{ipq}, $D_{i\xi}$ $(i = 1,\dots,11)$– відповідно функції зовнішнього навантаження і функції, які нелінійно залежать від компонент НДС. Для розв’язання таких СДРР розвинуто МПН.

Уперше, при умові рівності коефіцієнтів Пуассона в площині ізотропії для кожного шару, нехтуючи кривинами у деформаціях поперечного зсуву та, осереднюючи деякі коефіцієнти, отримана СДР для ФНО несиметричної структури, яка після математичних перетворень розділена на дві окремі системи.

Неоднорідна СДР 6-го порядку описує взаємозалежні при кососиметричному і симетричному навантаженні ВКЕ і уточнює ВНДС (частинними розв’язками):

$$H_{i1}\psi_1 + H_{i2}\psi_2 + H_{i3}\psi_3 = H_{i\xi};\ (i = 1,\ 2,\ 3;\ H_{ij} \text{–оператори 2-го і 0-го порядків}). \quad (30)$$

Інша система (16-го порядку) описує взаємозалежні ВНДС і ПКЕ:

$$P_{iu0}u_o + P_{iv0}v_o + P_{iw1}w_1 + P_{iw2}w_2 + P_{iw3}w_3 = P_{ipq} + P_{i\xi},\ (i = 1,\ 2,\ ...,\ 5), \quad (31)$$

де функції P_{ipq} залежать від зовнішнього навантаження, функції з індексом ξ унизу нелінійно залежать від НДС. Загальні розв’язки СДР (30) виражаються через загальні розв’язки неоднорідних ДР Гельмгольца. Форми загальних розв’язків СДР (31) структурно аналогічні (27).

Уперше в МТ одержана нова СДР 22-го порядку для нетонких пологих шаруватих ФНО симетричної структури, яка розділена на систему ВКЕ (6-го порядку) з уточненням ВНДС і систему ВНДС з ПКЕ (16-го порядку). Причому, із системи ВКЕ з ВНДС виділена СДР вихрового КЕ від кососиметричного деформування (4-го порядку) і ДР 2-го порядку від симетричного. Розв’язки для ВНДС і ПКЕ взаємозалежні і не розділяються.

У МТ уперше отримана нова СДРР для шаруватих ФНП несиметричної структури (22-го порядку), яка розділена на дві окремі системи: СДР ВКЕ з уточненням ВНДС 6-го порядку (однорідна СДР 6-го порядку описує взаємозалежні ВКЕ при кососиметричному і симетричному навантаженнях, неоднорідна уточнює ВНДС) та СДР ВНДС із ПКЕ (16-го порядку). Неоднорідна СДР 6-го порядку, у яку входять вихрові функції, зведена до 3-х визначальних неоднорідних ДР 6-го порядку (відносно нових функцій), ліві частини яких однакові. Кожне рівняння розщеплене на три неоднорідні ДР Гельмгольца. ВНДС визначається загальними розв’язками однорідного ДР 8-го порядку (з оператором

∇^8) і частинними розв'язками п'яти неоднорідних визначальних ДР 16-го порядку, які також зводяться до неоднорідних ДР 2-го порядку. ПКЕ визначається однорідним ДР 8-го порядку з операторами Гельмгольца. При цьому частинні розв'язки всіх вищеназваних ДР суттєво нелінійно залежать від компонент НДС попереднього наближення.

У МТ уперше отримана нова СДРР для шаруватих ФНП симетричної структури, ліві частини яких по структурі аналогічні СДРР для однорідних ФНП, а праві – в кожному наближенні МПН залежать лінійно від поперечного навантаження і суттєво нелінійно від компонент НДС попереднього наближення. Розділені ДР кососиметричного і симетричного деформувавння.

На основі побудованих варіантів МТ отримані нові СДР для транстропних шаруватих пластин і пологих оболонок несиметричної та симетричної структур довільної сталої товщини (як частинні випадки ФНП і ФНО).

Уперше в МТ розроблено новий метод інтегрування отриманих СДРР нетонких шаруватих фізично лінійних і нелінійних пластин, який полягає у зведенні їх до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку. Отримані загальні розв'язки.

Знайдено точний аналітичний розв'язок тривимірних ДР шаруватих транстропних пластин несиметричної та симетричної структур з довільною кількістю шарів при їх поперечному навантаженні та крайових умовах Нав'є, розроблена математична програма знаходження НДС і отримані числові результати для двошарових і тришарових пластин довільної сталої товщини. Розроблені варіанти МТ на основі порівняння з іншими теоріями і точним розв'язком з високою точністю описують ВНДС при плавних поперечних навантаженнях двошарових та тришарових транстропних пластин в широких межах змінення МГХ шарів, що на основі математичної і фізичної обґрунтованості отримання СДР, які враховують ВНДС і крайові ефекти, дає впевненість у достовірному визначенні НДС і для інших елементів при різних навантаженнях. Отримані числові залежності ВНДС тришарових і двошарових транстропних пластин при гармонічному навантаженні від МГХ та проведено порівняння їх з точними (розходження Δ у %) та відомими в літературі (табл. 15, 16).

Таблиця 15

Компоненти НДС квадратної тришарової пластини з ізотропними шарами
($m = n = 1$; $p_{mn} / q_{mn} = 1$; $h / a = 0{,}5$; $h_{2,3} / h_1 = 1$; $G_{1,3} / G_2 = 10^4$; $\nu_i = 0{,}3$)

z_3 / h_3	ТР	Теорія О. П. Прусакова	Δ%	НК0-3	Δ%
	$\tilde{\sigma}_x$				
0,5	-7,37	-7,12	3,39	-7,16	2,85
-0,5	7,19	6,82	5,15	6,91	3,89
z_3 / h_3	$\tilde{W}$				
0,5	-13,47	-13,51	0,30	-13,49	0,15
-0,5	-13,32	-13,31	0,08	-13,28	0,30

Одержані в дослідженнях числові результати показують, що компоненти НДС по товщині транстропних пластин змінюються нелінійно, степінь нелінійності залежить від МГХ і зростає при збільшенні товщини. При кососиметричному навантаженні тришарових пластин: із збільшенням податливості на поперечний зсув середнього шару найбільші напруження σ_x у крайніх шарах зростають; напруження і переміщення змінюються більш інтенсивно при змінюванні товщини, ніж при змінюванні податливості; переміщення W змінюються в порівнянні з напруженням σ_x більш інтенсивно при змінюванні товщини; екстремальних поперечних переміщень зазнають точки в центрі серединних площин крайніх шарів. Найменше впливає на НДС ν'. Із збільшенням товщини і податливості на поперечний зсув вплив поперечного обтискання збільшується; найбільші напруження σ_x виникають у центрі верхньої лицевої площини. Розходження між найбільшими значеннями компонент НДС, отриманими за побудованим варіантом МТ для широких меж змінювання МГХ ($h/a \le 1/2$; $h_{1,2,3}/h \le 10/11$; $G_{1,3}/G_2 \le 10^4$; $1/10 \le G'/G \le 1$), відрізняються від точних менше ніж на 4 %, що на основі порівняння з іншими теоріями вказує на високу ефективність розробленого варіанта МТ.

Таблиця 16

Компоненти НДС квадратної тришарової пластини геометрично і фізично несиметричної структури при $m = n = 1$; $p_{mn}/q_{mn} = 0$;

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2};\ \frac{h_2}{h_1} = 3;\ \frac{h_3}{h_1} = 2;\ \frac{G_2}{G_1} = 10^{-1};\ \frac{G_3}{G_1} = 10;\ \frac{G_2'}{G_2} = \frac{1}{10};\ \frac{G_{1,3}'}{G_{1,3}} = 1;\ \frac{E_i'}{E_i} = 1;\ \nu_i' = \nu_i = 0{,}3$$

z_i/h_i	НК13	ТР	$\Delta\%$	НК13	ТР	$\Delta\%$
	$\tilde{\sigma}_x$			$\tilde{W}$		
$z_3/h_3 = 0{,}5$	-6,560	-6,742	2,70	-1,254	-1,230	1,95
$z_2/h_2 = 0$	0,07624	0,06986	-	-2,217	-2,165	2,40
$z_1/h_1 = -0{,}5$	0,9961	1,036	3,85	-3,348	-3,272	2,32

У **восьмому** розділі розроблені нові аналітичні наближені методи розв'язання СДРР у варіантах МТ нетонких транстропних пластин і пологих оболонок, згідно з якими взаємозв'язані неоднорідні СДР порядку $4N$ (для пластин) зводяться до послідовного розв'язання незалежних неоднорідних N ДР 4-го порядку, а для пологих оболонок–до послідовного розв'язання ДР 8-го порядку і $(N-2)$ ДР 4-го порядку. Отримані числові результати на основі точних ДР (НК13, НК135) і наближених для пластин і пологих оболонок показують на достатню точність методу в широких межах змінювання МГХ.

Наближеним методом розв'язані граничні задачі (з отриманням числових результатів) в спеціальних функціях для нетонких круглих вільно обіпертих і жорстко защемлених пластин при дії рівномірно розподіленого навантаження і зосередженої сили, прикладеної в центрі. Установлено, зокрема, що зона впливу локальності навантаження на прогини для трастропної пластини (при $G'/G = 0{,}1 \div 0{,}4$) складає близько $(0{,}7 \div 0{,}8)h$.

Уперше використано новий метод розв'язання неоднорідних ДРР високих порядків нетонких пластин, які зведені до неоднорідних ДР 2-го порядку. Отримані аналітичні розв'язки граничних задач в НК13 при різних граничних умовах на бічній поверхні $x = 0$ з урахуванням ВКЕ і ПКЕ для товстих півнескінченних пластин, на які діють поперечні навантаження $q(x,y) = q_0 \exp(-\alpha x)\cos\beta y, (\alpha > 0;\ \beta > 0;\ \alpha \ne \beta)$, $x \in [0, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$. Складові поперечних переміщень визначаються внутрішнім напруженим станом (ВНС) і ПКЕ, а інші складові переміщень і напружень залежать від ВНС, ПКЕ і ВКЕ.

Уперше в МТ товстих транстропних пластин знайдені загальні розв'язки СДРР в НК13 від дії рівномірного навантаження по колу, кільцю, кругу, зосередженою силою в центрі з використанням інтегрального перетворення Ганкеля до отриманих ДР 2-го порядку (для знаходження частинних розв'язків) і на їх основі одержані аналітичні розв'язки для круглих і кільцевих пластин при різних граничних умовах на бічній поверхні. Для сталого навантаження q_0, яке діє по колу радіуса r_0 ($q(r) = q_0\,\delta(r - r_0)$, $\delta(r - r_0)$ –дельта-функція), отримані частинні розв’язки $\Phi_{kr}(r)$ ДР:

$$D_0\,D_0\,D_1\,D_2\,\Phi_k\,(r) = a_{k\,0}\,D_{k\,0}\,q(r),\ (k = 1{,}3)\,(D_{k\,0}\text{–оператор Гельигольца}): \quad (32)$$

$$\Phi_{k\,r}(r) = -\frac{a_{k0}\,q_0\,r_0}{s_1\,s_2}\Big(\frac{s_2(s_1 - s_{k0})}{s_1 s_{12}}\,I_0(r\sqrt{s_1})K_0(r_0\sqrt{s_1}) + \frac{s_1(s_2 - s_{k0})}{s_2 s_{21}}\,I_0(r\sqrt{s_2})K_0(r_0\sqrt{s_2}) -$$
$$- \ln r_0 - 1 + s_{k0}(-s_{12}^0 \ln r_0 + (r^2 + r_0^2)\ln r_0 / 4 + r^2/4)\Big),\ (r \langle r_0,);$$

(33)

$$\Phi_{k\,r}(r) = -\frac{a_{k0}\,q_0\,r_0}{s_1\,s_2}\Big(\frac{s_2(s_1 - s_{k0})}{s_1 s_{12}}\,I_0(r_0\sqrt{s_1})K_0(r\sqrt{s_1}) + \frac{s_1(s_2 - s_{k0})}{s_2 s_{21}}\,I_0(r_0\sqrt{s_2})K_0(r\sqrt{s_2}) -$$
$$- \ln r - 1 + s_{k0}(-s_{12}^0 \ln r + (r^2 + r_0^2)\ln r / 4 + r_0^2/4)\Big),\ (r \rangle r_0,),$$

де a, s з індексами –МГП; I_0 і K_0–модифікована функція Бесселя і функція Макдональда нульового порядку. Отримані загальні розв’язки ДР (32) як сума **за**гальних розв’язків бігармонічного ДР, двох ДР Гельмгольца і частинних розв’язків (33).

Уперше в МТ товстих транстропних пластин (у НК13 і НК135) за розробленою методологією отримані фундаментальні розв’язки $w_{k\,E}(x, y)$ СДР $\sum_{k=1,3}^{N} \Pi_{i\,k} w_k = \Pi_{i\,q}\,F\delta(x, y)$ $(N = 3,\ i = 1{,}3;\ N = 5, i = 1{,}3{,}5$; F – зосереджена сила, прикладена в початку координат), які описують ВНДС з ПКЕ (ДР 8-го і 12-го порядку відповідно):

$$w_{k\,E}(x, y) = F\Big(\sum_{j=1}^{2} b_{k\,j} K_0(r\sqrt{s_j}) + b_{k3} + b_{k4}\ln r + b_{k5} r^2 \ln r\Big)/(2\pi),\ (k = 1{,}3; b_{35} = 0);$$

$$w_{k\,E}(x, y) = F\Big(\sum_{j=1}^{4} a_{k\,j} K_0(r\sqrt{s_j}) + a_{k5} + a_{k6}\ln r + a_{k7} r^2 \ln r\Big)/(2\pi), (k = 1{,}3{,}5; a_{37} = a_{57} = 0).$$

Отримані фундаментальні розв’язки з полюсом у довільній точці і наведено їх застосування при навантаженні товстих пластин по дузі і довільній області. Розроблені нові наближені методи розв’язання СДРР високих порядків МТ нетонких однорідних пологих оболонок з використанням методу збурень ГХ і МПН, які дали можливість звести системи ДРР оболонок до рекурентної послідовності СДР для відповідних пластин, у яких праві частини залежать від складових переміщень попередніх наближень в методі збурень і від попереднього наближення в МПН. В кожному наближенні неоднорідні СДР для відповідних пластин зведені до неоднорідних ДР 2-го порядку.

Доведена **теорема 4** (про збіжність рядів для складових переміщень в методі збурень ГХ). Якщо в замкненій області $\overline{C}_D$ оболонки за змінними (x, y) функції $u_{k\,i}(x, y), v_{k\,i}(x, y), w_{n\,i}(x, y)$ $(k = 0{,}1{,}...; n = 1{,}2{,}...;\ i = 0{,}1{,}...)$ рівномірно обмежені і неперервні, то ряди $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i\,u_{k\,i}(x, y)$, $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i\,v_{k\,i}(x, y), \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i\,w_{n\,i}(x, y)$ в цій області для $u_k(x, y, \varepsilon), v_k(x, y, \varepsilon), w_n(x, y, \varepsilon)$, де $\varepsilon = h/(R_1 + R_2)$- малий геометричний параметр, збігаються рівномірно і абсолютно.

Числові дослідження для нетонких транстропних пологих оболонок з використанням МПН показують високу точність методу.

У **додатках** містяться формули, коефіцієнти, оператори, диференціальні рівняння, таблиці, графіки, перелік публікацій за темою дисертації, акти і довідка про впровадження результатів.

ВИСНОВКИ

У роботі вирішена актуальна наукова проблема механіки деформівного твердого тіла, яка полягає в побудові нових ефективних варіантів МТ нетонких фізично лінійних і нелінійних за Каудерером однорідних і шаруватих пластин та пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні з позицій тривимірної ТП, розробленні нових аналітичних точних і наближених методів розв'язання СДР високих порядків, отриманні частинних і загальних розв'язків граничних задач варіантів МТ вказаних елементів та числових залежностей НДС від МГХ, типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах. Суттєвим у вирішенні наукової проблеми є те, що побудовані варіанти МТ дають реальну можливість аналітичного розв'язання граничних задач для вказаних елементів і визначення НДС з високою точністю.

Аналіз розроблених підходів, методології, варіантів МТ, методів розв'язання граничних задач, отриманих аналітичних частинних і загальних розв'язків СДРР та числових результатів і установлених закономірностей дає можливість зробити наступні висновки.

1. Сформульовані нові постановки граничних задач для однорідних та шаруватих лінійно і нелінійно пружних за Каудерером пластин та пологих оболонок довільної сталої товщини з позицій тривимірної задачі ТП.

2. Розроблена методологія побудови варіантів МТ однорідних і шаруватих фізично лінійних та нелінійних за Каудерером пластин і пологих оболонок довільної товщини, основана на комплексному методі зведення тривимірної задачі ТП до двовимірної, який поєднує ВПР, метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов, як функцій 3-х змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних елементів) і їх комбінацій в межах кожного шару (для шаруватих елементів), точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення шарів, узагальнену МВР, метод збурень (для однорідних ортотропних і ізотропних ФНП і пологих ФНО) і МПН (для шаруватих нелінійно пружних пластин і пологих оболонок). На основі створеної методології побудовані нові варіанти МТ вказаних елементів і розроблені аналітичні методи розв'язання систем ДРР високих порядків, до яких зводяться граничні задачі.

3. У явному вигляді отримані СДРР у високих наближеннях варіантів МТ указаних елементів. Це дає можливість безпосереднього їх використання для розв'язання граничних задач. Отримані у варіантах МТ системи ДРР мають високий порядок: у НК0-N (для пластин і пологих оболонок)–порядок (6N+4); для пластин у НК13…(N-1) порядок СДР – 3(N+1), у НК02…(N-1) –(3N+1). Теорія Тимошенка-Рейснера для пластин і пологих оболонок є частинним випадком варіантів МТ указаних елементів (НК1 і НК01 відповідно; 6-го і 10-го порядків). Обгрунтовано використання рядів за поліномами Лежандра у варіантах МТ.

4. Для розглянутих лінійно пружних пластин довільної сталої товщини СДРР у довільному наближенні розділені на СДР кососиметричного і симетричного деформування. Із них виділені підсистеми ДР вихрового КЕ (однорідні) і внутрішнього НДС з потенціальним КЕ (неоднорідні). Однорідна підсистема ДР зведена операторним методом до одного визначального однорідного ДР, а неоднорідна–до визначальних неоднорідних ДР з однаковими лівими частинами відносно нових шуканих функцій. Виділені ДР, які описують ВНДС і ПКЕ.

5. Для розглянутих пологих оболонок системи ДР не розділяються на незалежні підсистеми кососиметричного і симетричного деформування, не виділяються також ДР вихрового КЕ. При неврахуванні кривин у деформаціях поперечного зсуву виділяються системи ДР взаємозв'язаних вихрових КЕ при кососиметричному і симетричному деформуванні. З'ясовані умови, при яких ДР кососиметричного і симетричного вихрових КЕ розділяються. Незалежні ДР, які описують ВНДС і ПКЕ, не виділяються.

6. Розроблено метод інтегрування неоднорідних ДР високих порядків з частинними похідними для нетонких пластин, який полягає в послідовному інтегруванні неоднорідних ДР 2-го порядку, праві частини яких в свою чергу є частинними розв'язками інших неоднорідних ДР 2-го порядку. Узагальнено операторний метод інтегрування стосовно неоднорідних ДР вищих порядків, згідно з яким частинні розв'язки вказаних ДР виражаються через частинні розв'язки ДР Пуассона і неоднорідні ДР Гельмгольца.

7. Розроблено у загальному вигляді метод розв'язання неоднорідних СДРР високих порядків для нетонких пластин, який полягає у зведенні їх до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку, отриманні їх загальних розв'язків з наступним визначенням зворотними математичними операціями загальних розв'язків початкових СДРР. Такий метод: 1) дає можливість значно спростити знаходження частинних (а отже і загальних) розв'язків початкових СДРР, особливо при переривчастих, локальних і зосереджених навантаженнях; 2) суттєво змінює методологію застосування методів математичної фізики, зокрема, методів інтегральних перетворень, не до початкових СДРР високих порядків, а до отриманих неоднорідних ДР 2-го порядку. Розв'язані аналітично вказаним методом граничні задачі з урахуванням КЕ для товстих транстропних півнескінченних, круглих і кільцевих пластин при різних граничних умовах і різних навантаженнях. Розроблена суттєво інша методологія отримання фундаментальних розв'язків СДРР високих порядків, яка основана на зведенняі їх до ДР 2-го порядку з наступним граничним переходом у розв'язку від поперечного навантаження по колу (кругу) до зосередженої сили. Отримані фундаментальні розв'язки з полюсом у довільній точці товстої пластини. наведено їх використаня при навантаженні по дузі кола і довільній області.

8. Тривимірна задача статики для нетонких ортотропних і ізотропних ФНП та пологих ФНО на основі МТ методом збурень пружних властивостей зведена у явному вигляді до нескінченної рекурентної послідовності двовимірних лінійних крайових задач, у яких праві частини ДР залежать від компонент НДС попередніх наближень.

9. Розроблені наближені аналітичні методи розв'язання систем ДРР високих порядків: 1) нетонких пологих оболонок з використанням методів збурень і МПН, які дали можливість звести їх до рекурентної послідовності систем ДРР для пластин (при кососиметричному і симетричному деформуванні) і значно спростити розв'язок граничних задач для оболонок; 2) пластин і пологих оболонок довільної товщини, згідно з якими СДР для пластин зводяться до послідовного розв'язання ДР 4-го порядку, а СДР для оболонок – до послідовного розв'язання ДР 8-го порядку і ДР 4-го порядку.

10. Поставлені граничні задачі для розглядуваних елементів і отримані загальні розв'язки в одинарних і подвійних тригонометричних рядах; у новій постановці отримані аналітичні розв'язки для ФНП і ФНО при граничних умовах Нав'є.

11. Отримані числові результати вказують на прийнятну збіжність і на зростаючу точність визначення НДС при збільшенні номера наближення. Збіжність результатів покращується із зменшенням товщини, податливості матеріалу на поперечний зсув та із зростанням пологості оболонки. Для слабопологих товстих транстропних

оболонок ($h/a \geq 0{,}5;\ 29/40 \leq R_{1,2}/a \leq 1$) необхідно враховувати залежність деформацій поперечного зсуву від кривин, а при кососиметричному навантаженні – складові переміщень з парними натуральними індексами у математичних рядах.

12. Розроблені алгоритми і створені пакети математичних програм на мові ФОРТРАН для розв'язання в новій постановці граничних задач по знаходженню: 1) внутрішнього НДС однорідних пластин і пологих оболонок (транстропних, ортотропних, фізично нелінійних) при різних навантаженнях, двошарових і тришарових транстропних пластин довільної сталої товщини при плавних навантаженнях; 2) КЕ однорідних пластин. Отримані числові результати дали можливість оцінити НДС в залежності від МГХ та типу навантаження, установити якісний вплив КЕ на НДС пластин, визначити межі застосування теорії Тимошенка-Рейснера та наближень варіантів МТ, одержати нові якісні ефекти та важливі висновки.

13. Теорія Тимошенка-Рейснера (ТТР) при плавних навантаженнях придатна для опису НДС таких пластин: ізотропних при кососиметричних навантаженнях (НК1) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження з точними для σ_x складає менше 1,44 %, а для поперечних переміщень–менше 3,92 %); ізотропних пластин при згинально-обтискуючих навантаженнях (уточнена ТТР, НК01) для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження з точними по σ_x складає менше 2,99 %, а для поперечних переміщень–5,11%); транстропних пластин $(0{,}1 \leq G'/G \leq 1{,}0; E' = E; \nu' = \nu)$ для $h/a \leq 1/5$ (найбільше розходження по W з точними складає при кососиметричному навантаженні менше 2,90 % для $G'/G = 0{,}1$ і менше 3,92 % для $G'/G = 1$, а при згинально-обтискуючому навантаженні по уточненій теорії менше $(3{,}33 \div 5.11)$ %).

ТТР в НК01 з високою точністю описує при плавних поперечних навантаженнях напруження σ_x ізотропних пологих оболонок для $h/a \leq 1/5, R_{1,2}/a \geq 5, a = b$ (розходження з НК0-5 складає менше 1,54 % при кососиметричному і менше 2,55 % при згинально-обтискуючому навантаженні). Для транстропних оболонок ($E' = E;\ \nu' = \nu$, $0{,}1 \leq G'/G \leq 1{,}0$) при $h/a \leq 1/5, R_{1,2}/a \geq 5, a = b$ ТТР з достатньою точністю описує W при кососиметричному навантаженні (найбільше розходження менші 3,24 % для $G'/G = 0{,}1$ і менші 4,46 % для $G'/G = 1$). Із зменшенням G'/G розходження ТТР з НК0-5 по σ_x зростає, а по W спадає.

14. Внутрішній НДС пластин і пологих оболонок з високою точністю визначається НК13 і НК0-3 при плавних навантаженнях вказаних елементів ($h/a \leq 1/3,\ a \leq b$) і для широких меж змінення МГХ. НДС розглядуваних елементів в області дії КЕ, при швидкозмінюваних в області, локальних та зосереджених навантаженнях необхідно визначати у високих наближеннях МТ: НК135, НК0-5; результати, отримані на основі невисоких наближень для вказаних навантажень суттєво відрізняються від точних. На НДС у найбільшій мірі впливають локальність навантаження, товщина, кривина серединної поверхні, податливість на поперечний зсув.

15. При плавних навантаженнях, розраховуючи тонкі ФНП і пологі ФНО, потрібно ураховувати нелінійно пружні властивості матеріалу, але достатньо використовувати класичну теорію; при розрахунку товстих елементів (для оболонок $R_{1,2}/a \geq 1,\ a \leq b$) фізичною нелінійністю можна нехтувати, але розвивати компоненти НДС у ряди за поперечною координатою; при розрахунку елементів із $h/a = 1/8 \div 1/3$ потрібно використовувати метод розвинення НДС по товщині і ураховувати нелінійно пружні властивості мате-

ріалу. При швидкозмінних в області навантаженнях і в інших випадках з високим градієнтом змінювання НДС, також потрібно ураховувати фізичну нелінійність сумісно з розвиненням компонент НДС у ряди за поперечною координатою.

16. Розв'язані за побудованим варіантом МТ граничні задачі по визначенню внутрішнього НДС двошарових та тришарових транстропних пластин при плавних навантаженнях. Результати вказують на високу точність варіанта МТ, що на основі математичної і фізичної коректності побудови основних рівнянь дає впевненість у достовірності і прийнятності розробленого варіанта для інших класів задач у широких межах змінення МГХ.

17. Побудовані варіанти МТ дають реальну можливість розв'язання з високою точністю граничних задач для пластин і пологих оболонок.

18. Розроблені нові методи розв'язання СДРР можуть бути узагальнені для СДРР анізотропних елементів з використанням методів збурень транстропних властивостей матеріалів, а також застосовані для розв'язку крайових задач за класичною та за іншими-уточненими теоріями.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Зеленський А. Г. Фундаментальні розв'язки визначальної системи диференціальних рівнянь математичної теорії пластин. Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки. Visnyk of Zaporizhzhya National University, Physical fnd Mathematical Sciences. Запоріжжя, 2018. № 1. С. 13–29. (**Index COPERNICUS, ICV 2017: 80.00, CiteFactor, ResearchBib, Journal Factor).** DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-1-02**.**

2. Zelensky A. G. Mathematical Theory of Transversally Isotropic Shells of Arbitrary Thickness at Static Load. *Materials Science Forum. Actual problems of engineering mechanics.* Switzerland: Trans Tech Publications Ltd, 2019. V. 968. P. 496–510. **Scopus**. ISSN: 1662–9752, doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.968.496.

3. Zelensky A. G. The Method of Successive Approximations in the Mathematical the-orv of Shallow Shells of Arbitrary Thickness. *World Science, Multidisciplinary Scientific Edition, Physics and Mathematics.* RS Global Sp. z O.O.: Warsaw, 2019. V. 1, №11(51). P. 31–39. (Наукометричні бази: **RS Global, Google Scholar, Index Copernicus, Academia.edu, Library.ru, Biblioteka Narodowa, CiteFactor**). ISSN 2413–1032; DOI:https://doi.org/10.31435/rsglobal_ws/30112019/6764; http://ws-conference.com/.

4. Zelensky A. G. Analytical and Practical Development of Variant of Mathematical Theory of Shells of Small Curvature of Arbitrary Thickness. *New Stages of Development of Modern Scince in Ukraine and eu Countries. Chapter "Physical and Mathematical Sciences".* **Monograph**. Riga, Latvia**: "Baltija Publishing",** 2019**.** P. 308–328. ISBN:978-9934-588-15-0, DOI:https://doi.org/10.30525/978-9934-588-15-0-63.

5. Zelensky A. G. Some theorems of Variant of Mathematical Theory of Plates and Shallow Shells of Arbitrary Thickness. Proceedings of the XX1 International Scientific and Practical Conference. International Trends in Science and Technology. Multidisciplinary Scientific Edition. Physics and Mathematics. RS Global Sp. z O.O., Warsaw, Poland, January 31,2020. P. 3–11. ISBN 978-83-956628-1-2. Indexed by: **RS Global, Academia.edu, Google Scholar.**

6. Zelensky Anatoly, Privarnikov Arkady. The method of integrating systems of high-order equilibrium equations of the mathematical theory of thick plates under intermittent loads (part 1). *Innovative scientific researches: european development trends and regional aspect. Chapter "Physical and Mathematical Sciences"*. **Collective monograph,** Riga, Latvia: "**Baltija Publishing",** 2020. P. 221–255. ISBN: 978-9934-588-38-9, DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-588-38-9-6.

7. Zelensky A. G. Development of aVariant of Mathematical Theory of Thick Transversal-isotropic Plates, *International periodic scientific journal. Modern engineering and innovative technologies*. Karlsruhe, 2020. Issue № 11. Part 1. P. 27–41. ISSN 2567-5273, DOI: 10.30890/2567-5273.2020-11-01-041. Indexed in **INDEXCOPERNICUS** high impact factor (ICV:84.35). http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit11-01-041.

8. Зеленський А. Г. Приварников А. К. Про метод розв'язування неоднорідних рівнянь із частинними похідними в математичній теорії плит. *International Scientific Journal. Международный научный журнал. Сб. научн. трудов. Физико-математические науки.* Киев, 2015. № 2. С. 154–159. Свидетельство о гос. регистр. печатного средства массовой информ. КВ № 20971-10771Р. ISSN 2410-213X (Журнал зареєстр. в наукометр. базах даних: **Open Academic Journal Index, ResearchBib, Scientific Indexing Services, Staats-und Universitetsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, InfoBase Index, International Institute of Organized Research, РИНЦ, CiteFactor**).

9. Zelensky A. G. Method of solution equation system within the variant of mathematical theory of non-thin shallow shells. *International scientific journal. Физико-математические науки*. Киев, 2016. №7. Р. 137–142. Свидетельство о гос. регистр. печатного средства массовой информ. КВ № 20971-10771Р. ISSN 2410-213X (Наукометр. бази даних: **Open Academic Journal Index, Scientific Indexing Services, Staats-und Universitetsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, InfoBase Index, International Institute of Organized Research, CiteFactor**, **РИНЦ, Cosmos Impact Factor**).

10. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Расчет пологой панели при поперечном локальном нагружении по неклассической теории изгиба. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Теоретичні основи будівництва.* Зб. наук. праць Міжнар. конф. (Дніпропетровськ, 24.06–29.06.1999). Теоретичні основи будівництва. Дн-вськ, ПДАБА, 1999. № 7. Р. 157–162. ISBN 5–7763–8880–5.

11. Зеленський А. Г.,Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Варіант некласичної теорії згину трансверсально ізотропних пластин і пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* Дніпропетровськ, 1999. В. 2, т. 2. С. 58 – 65.

12. Зеленський А. Г. Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Варіант зведення тривимірної задачі згину оболонок до двовимірної. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw, 26.06–30.06 2000*). Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2000. № 8. Р. 426–430. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

13. Зеленський А. Г. Формулювання варіаційного принципу Рейснера для фізично-нелінійного тіла. *Строительство, материаловедение, машиностроение.* Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2000. В. 11. С. 133 – 138.

14. Зеленський А. Г.Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пластин. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* Дн-вськ, 2000. В. 3, т. 2. С. 30–37.

15. Зеленський А. Г. Про взаємозв'язок варіаційних принципів Рейснера і Ху-Вашіцу для фізично нелінійного тіла. Вісник *Придніпровської державної академії будівництва та архітектури.* Дн-вськ: ПДАБА, 2000. № 12. С. 31–36.

16. Зеленський А. Г. Про побудову некласичної теорії згину фізично нелінійних однорідних пластин. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури.* Дн-вськ: ПДАБА, 2001. № 2. С. 7–13.

17. Зеленський А. Г. Про побудову некласичної теорії згину однорідних нелінійно пружних пологих оболонок. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури.* Дн-вськ: ПДАБА, 2001. № 3. С. 20–26.

18. Зеленський А. Г. Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пологих

оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* Дн-вськ, 2001. В. 4, т. 1. С. 56–64.

19. Зеленський А. Г. Основні рівняння згину однорідних фізично нелінійних пластин із урахуванням обтискання. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian Transactions (Dnepropetrovsk, 27.06–01.07 2001). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, 2001. № 9. P. 63–68. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

20. Зеленський А. Г. Про побудову уточнених рівнянь згину для нелінійно пружних круглих пластин з урахуванням деформації обтискання. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* Дн-вськ, 2001. В. 5, т. 1. С. 167–173.

21 Зеленський А. Г. Розвинення методу збурень для побудови уточненої теорії згину нетонких сферичних оболонок. *Вестник национального технического ун-та «ХПИ». Динамика и прочность машин.* Харьков, 2002. Т. 8, № 9. С. 83–88.

22. Зеленський А. Г. До питання про розрахунок ортотропних пластин за некласичною теорією. *Перспективні задачі інженерної науки. Зб. наук. праць.* Дніпропетровськ, 2002. В. 4. С. 134–143. ISBN 966–7282–70–8.

23. Зеленський А. Г. Метод збурень в одній некласичній теорії згину нелінійно пружних круглих пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian Transactions (Warszaw, june 2002). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warszaw, 2002. № 10. P. 644–649. ISBN 5–7763–8880–5.

24. Зеленський А. Г. Застосування методу збурень в теорії розрахунку ортотропних плит. *Вісник. Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* Дн-вськ, 2002. В. 6, т. 1. С. 131–140.

25. Зеленський А. Г. Уточнена теорія згину фізично нелінійних пологих сферичних оболонок з урахуванням деформації обтискання. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* Дн-вськ, 2002. В. 6, т. 2. С. 43–50.

26. Зеленский А. Г. Метод возмущения упругих свойств в неклассической теории изгиба анизотропных оболочек. *Вісник Донецького ун-ту. Серія А. Природничі науки.* Донецьк, 2003. № 1. С. 103–108.

27. Зеленський А. Г. Про розрахунок багатошарових пластин симетричної структури за некласичною теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian Transactions (Dnipropietrovsk-Warsaw, June 2003). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw; 2003. № 11. P. 121–126. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

28. Зеленський А. Г. Підхід до розрахунку шаруватих фізично нелінійних пластин симетричної структури за некласичною теорією. *Вісник Київського національного ун-ту. Серія: фізико-математичні науки.* Київ, 2003. В. 5. С. 36–44.

29. Зеленський А. Г. Застосування поліномів Лежандра в одній теорії згинання нетонких багатошарових фізично нелінійних оболонок симетричної структури. *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* Дн-вськ, 2003. В 7, т. 1. С. 140–147.

30. Зеленський А. Г. Про розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь некласичної теорії пластин. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* Дн-вськ, 2003. В. 5. С. 70–79.

31. Зеленський А. Г. Рівняння некласичної теорії згину шаруватих пластин несиметричної структури. *Вестник национального технического ун-та ,,ХПИ". Динамика и прочность машин.* Харьков, 2004. № 19. С. 89–96.

32. Зеленський А. Г. Зведення тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної для шаруватих трансверсально-ізотропних пологих оболонок несиметричної структури. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw–Dnepropeetrovsk, June 2004).

Теоретичні основи будівництва. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw–Dnepropeetrovsk, 2004. V. 2, № 12. P. 679–686. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

33. Зеленський А. Г. Підхід до побудови уточненої теорії фізично нелінійних шаруватих пластин несиметричної структури. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* Дн-вськ, 2004. В. 6. С. 58–67.

34. Зеленський А. Г. Розрахунок на згин фізично нелінійних товстих пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian Transactions (Dnepropeetrovsk–Warsaw, June 2005). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Dnepropeetrovsk–Warsaw, 2005. № 13. P. 139–144. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

35. Зеленський А. Г. Використання поліномів Лежандра для побудови уточненої некласичної теорії згину фізично нелінійних шаруватих оболонок несиметричної структури. *Новини науки Придніпров'я.* Дніпропетровськ, 2005. №2. С. 12–17.

36. Зеленський А. Г. Наближений розрахунок багатошарових плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2005, № 10/1. *Серія механіка.* В. 9, т. 1. С. 167–173.

37. Зеленський А. Г. Крайові ефекти в нетонких пластинах. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2005. № 10/2. *Серія механіка.* В. 9, т. 2. С. 51–58.

38. Зеленський А. Г. Наближений метод в аналітичній теорії трансверсально-ізотропних круглих плит. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дн-вськ, 2006. В. 7. С. 47–56.

39. Зеленський А. Г. Аналітична теорія розрахунку нетонких пластин та оболонок і її застосування. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw–Vilnius, June 2006). *Теоретичні основи будівництва*. Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2006. № 14. P. 569–578. ISBN 5 – 7763 – 8880 – 5.

40. Зеленський А. Г. Про метод розрахунку круглих трансверсально-ізотропних плит. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, May 2007). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2007. № 15. P. 721–730. ISBN 5 978–83–7207–683–0.

41. Зеленський А. Г. Метод розв'язування задачі згину круглої транстропної плити. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2007, № 2/1. *Серія механіка*. В. 11, т. 1. С. 97–104.

42. Зеленський А. Г. Варіант аналітичної теорії розрахунку пологих оболонок при кососиметричному навантаженні з урахуванням наближень вищих порядків. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* Дн-вськ, 2007. В. 11. С. 63–70.

43. Зеленський А. Г. Метод взаємозв'язаних рівнянь вищого порядку в аналітичній теорії пологих оболонок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* Дн-ськ, 2007. В. 8. С. 67–83.

44. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. Метод взаємозв'язаних рівнянь в аналітичній теорії транстропних пластин із урахуванням вищих наближень. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2007. №2/2. *Серія механіка*. В. 11, т. 2. С. 84–94.

45. Зеленський А. Г. Розрахунок методом збурень анізотропної оболонки за уточненою теорією. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, June 2008). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2008. № 16. P. 383–392. ISBN 978–83–7207–763–9.

46. Зеленський А. Г., Серебрянська П. А. До розрахунку пластин на згин з урахуванням наближень вищих порядків. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2008. Т. 16, №5. *Серія механіка.* В. 11, т. 1. С. 127–136.

47. Зеленський А. Г. Метод розв’язування системи диференціальних рівнянь високого порядку в аналітичній теорії нетонких оболонок. *Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* Дн-вськ, 2008. В. 9. С. 93–103.

48. Зеленський А. Г. Метод подвійних тригонометричних рядів у розрахунку нелінійно пружних товстих пластин. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* Дн-вськ, 2008. В. 12. С. 82–95.

49. Зеленський А. Г. Метод подвійних тригонометричних рядів в аналітичній теорії нетонких фізично нелінійних пологих оболонок. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2009. Т. 17, №5. *Серія механіка.* В. 13, т. 1. С. 121–132.

50. Зеленський А. Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. Дн-вськ, 2009. Т. 17, №5. *Серія механіка*. В. 13, т. 2. С. 54–62.

51. Зеленський А. Г. Наближений метод розв’язування систем диференціальних рівнянь в теорії нетонких пластин. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* Дн-вськ, 2010. В. 14. С. 175–182.

52. Зеленський А. Г. Практичні висновки по результатам розрахунку однорідних пластин та пологих оболонок довільної товщини за аналітичною теорію. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, September 2010). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2010. V. 18. P. 325–330. ISBN 978–83–7207–894–0.

53. Зеленський А. Г. Моделі і методи аналітичної теорії нетонких пластин та пологих оболонок при статичному навантаженні. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури.* Зб. наук. праць. Дн-вськ: ПДАБА, 2011. №1–2. С. 21–30.

54. Зеленський А. Г. Наближений метод розв’язування системи диференціальних рівнянь теорії нетонких пологих оболонок. *Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* Дн-ськ, 2011. В. 12. С. 131–139.

55. Зеленський А. Г. До питання про розв’язування неоднорідних диференціальних рівнянь. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (Warsaw, September 2010). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2011. V. 18. P. 263–267. ISBN 978–83–7207–894–0.

56. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. *Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* Дн-вськ, 2012. В. 13. С. 188–196.

57. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* Дн-вськ, 2012. Т. 20, № 5. *Серія механіка.* В.16, т. 2/1. С. 60–66.

58. Зеленський А. Г. Використання методу зниження порядку диференціальних рівнянь в некласичній теорії пластин. *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Polish-Ukrainian Transactions (Warsaw, September 2012). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, Warsaw, 2012. V. 20. P. 191–196. ISBN 978–83–7814–034–4.

59. Зеленський А. Г. Про розв’язування основних рівнянь згину варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки.* Запоріжжя, 2015. № 2. С. 79–86.

60. Прусаков А. П., Вовченко Н. Г., Зеленский А. Г. Об изгибе пологих оболочек в рамках одной неклассической теорию. Тезисы докладов IV-й Междунар. науч. конф. *“Материалы для строительных конструкций, ICMБ’96”* (Дн-вск, 29-31 мая 1996). Днепропетровск: ПГАСА. 1996. С. 123. ISBN 5-7763-8886-4.

61. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Об одной неклассической теории изгиба пологих оболочек. *Theoretical Foundations of Civil Engineering* (Polish-Ukrainian Seminar) (Dnepropeetrovsk–Warsaw, June 1996). *Теоретические основы строительства.* Дн-вск: ПГАСА. 1996. V. 1, Part 2. С. 304–307. ISBN 5–7763–8880–5.

62. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Об одной неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек. *Theoretical Foundations of Civil Engineerin.* Ukrainian- Polish seminar (Dnepropetrovsk, 30.06–06.07 1997). *Теоретичні основи будівництва.* Дн-вськ, ПДАБА, 1997. № 5. Р. 191–198. ISBN 5–7763–8880–5.

63. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. НДС пластин в рамках одной неклассической теории при поперечном локальном нагружении. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Polish–Ukrainian seminar (Warsaw, 6.07–11.07.1998). *Теоретичні основи будівництва. Дн*-вськ, ПДАБА, Warsaw; 1998. № 6. Р. 539–542. ISBN 5–7763–8880–5.

64. Прусаков А. П., Зеленский А. Г., Вовченко Н. Г. Вариант неклассической теории изгиба трансверсально-изотропных пластин и пологих оболочек произвольной толщины. Зб. наук. праць ПДАБА. *Управління проектами та розвиток виробництва.* Дн-вськ: ПДАБА. 2000. С. 65–69.

65. Зеленський А. Г., Прусаков О. П., Вовченко М. Г. Про згин пластин в рамках однієї некласичної теорії. Materials of II International Symposium „*Fracture Mechanics and Physics of Construction Materials and Structures"*. Lviv-Dubliany, Ukraine, 1996. С. 105.

66. Зеленский А. Г. К вопросу о построении уточненной теории изгиба физически нелинейных однородных пластин. *Проблемы современного материаловедения, машиностроения.* Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2001. С. 247.

67. Зеленский А. Г. О методе решения задач изгиба нелинейно упругих толстых пластин. Тезисы докл. X междунар. конф. "*Математика. Экономика. Образование*". Ростов на Дону, 2002. С. 69–70.

68. Зеленський А. Г. Метод возмущений в неклассической теории изгиба физически нелинейных пластин и оболочек. *Стр-во, материаловедение, машиностроение.* Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2002. В. 15, Ч. 2. С. 54. ISBN 966–7282–65–1.

69. Зеленський А. Г. Метод збурень в уточненій теорії розрахунку анізотропних пластин. *Стр-во, материаловедение, машиностроение.* Сб. науч. трудов. Дн-вск: ПГАСА, 2003. В. 22, ч. 3. С. 118. ISBN 966–7282–80–5.

70. Зеленський А. Г. Підхід до розрахунку шаруватих фізично нелінійних пластин симетричної структури за некласичною теорією. *Сучасні проблеми механіки.* Тези доповідей міжнар. наук. конф. (Київ, 2003). Київ, 2003. С. 24.

71. Зеленський А. Г. Про одну теорію згинання шаруватих пластин. *Математичні проблеми технічної механіки.* Матеріали Третьої Всеукр. наук. конф. (Дніпродзержинськ, 2003). Дніпродзержинськ, 2003. С. 151.

72. Зеленський А. Г. Уточнені рівняння згину нелінійно пружних шаруватих пластин несиметричної структури. *Математичні проблеми технічної механіки.* Матеріали 4-ї Всеукр. наук. конф. (Дн-вськ, 19-21 квітня 2004). Дн-вськ, 2004. С. 79.

73. Зеленський А. Г. Рівняння некласичної теорії згину шаруватих пластин несиметричної структури. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я.* Анотації доповідей XII Міжнар. наук.-практ. конф. (Харків, 20-21 трапвня 2004). Харків, 2004. С. 66.

74. Зеленський А. Г. Метод розв'язування однієї системи нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. *Матеріали X Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 13-15 травня 2004 р.). Київ, 2004. С. 115. ISBN № 966-794466-2.

75. Зеленський А. Г. Наближений метод розв'язування тривимірної задачі про згин товстої багатошарової пластини несиметричної структури. *Математичні проблеми технічної механіки.* Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпропетровськ, 18-21 квітня 2005 р.). Дніпродзержинськ, 2005. С. 88.

76. Зеленський А. Г. Розвинення методів наближеного розв'язування диференціальних рівнянь просторової задачі теорії пружності. *Матеріали XI Міжнаар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 18-20 травня 2006 р.). Київ, 2006. С. 107. ISBN № 966-7944-66-2.

77. Зеленський А. Г. Аналітична теорія пластин та пологих оболонок. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій.* Тези доповідей Міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (Дніпропетровськ, 17-19 жовтня 2007 р.). Дн-вськ, 2007. С. 192.

78. Зеленський А. Г. Метод розв'язування однієї системи диференціальних рівнянь з частинними похідними в аналітичній теорії пластин. *Матеріали XII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 15-17 травня 2008 р.). Київ, 2008. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування.* С. 156. ISBN 978-966-432-031-0.

79. Зеленський А. Г. Метод збурень фізичних властивостей матеріалу в аналітичній теорії нетонких пластин та пологих оболонок. *Сучасні проблеми механіки та математики.* Матеріали конференції. Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача, 2008. Т. 1. С. 156–158.

80. Зеленський А. Г. Розв'язування систем диференціальних рівнянь з частинними похідними високого порядку в уточненій теорії нетонких пластин. *Матеріали XIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 13–15 травня 2010 р.). Київ, 2010. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування.* С. 167.

81. Зеленський А. Г. Метод зведення неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними високого порядку до неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку. *Матеріали XIV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 19–21 квітня 2012 р.). Київ, 2012. Т.1. *Диференціальні. та інтегральні рівняння, їх застосування.* С. 190. ISBN 978-617-696-014-0,

82. Зеленський А. Г. Сингулярний розв'язок системи диференціальних рівнянь із частинними похідними варіанта математичної теорії нетонких пластин. *Матеріали XV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 15–17 травня 2014 р.). Київ, 2014. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування.* С. 106. ISBN 978-617-7021-18-5.

83. Зеленський А. Г.,Розв'язування системи диференціальних рівнянь із частинними похідними 12-го порядку в математичній теорії нетонких пластин. *Математичні проблеми технічної механіки–2014.* Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпропетровськ–Дніпродзержинськ, 14–17 квітня 2014 р.). Дн-нськ, Дн-вськ, 2014. С. 45.

84. Зеленський А. Г., Приварников А. К. Про знаходження частинних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. *Матеріали XVI Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 14–15 травня 2015 р.). Київ, 2015. Т. 1. *Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування.* С. 97-98. ISBN 978-617-7021-27-7.

85. Зеленський А. Г., Приварников А. К. Спосіб розв'язування однієї задачі згину нескінченної плити на основі варіанта математичної теорії. *Математичні проблеми технічної механіки–2015.* Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпродзержинськ, 14–17 квітня 2015 р.). Дн-нськ, 2015. С. 103.

86. Зеленський А. Г. Про варіант математичної теорії нетонких пластин і пологих оболонок. *Матеріали XVII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Київ, 19–20 травня 2016 р.). Київ,

2016. Т. 1. *Диференціальні. та інтегральні рівняння, їх застосування.* С. 116–117. ISBN 978-617-7021-42-0.

87. Зеленський А. Г. Зведення розв'язувальних рівнянь варіанта математичної теорії пологих оболонок до рівнянь другого і четвертого порядків. Тезисы докладов III Междунар. конф. "*Актуальные проблемы инженерной механики*" (Одесса, 10–14 мая 2016 г.). Одесса, 2016. С. 255–259.

88. Зеленський А. Г. Взаємозвя'зок операторного методу і методу зведення неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними до рівнянь нижчого порядку. *Математичні проблеми технічної механіки–2016.* Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дн-нськ, Дн-вськ, Київ, 18–21 квітня 2016 р.). Дн-нськ, 2016. Т. 1. С. 108.

89. Зеленський А. Г. Про обчислення одного невласного інтеграла з параметром. *Матеріали XVIII Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука* (Луцьк–Київ, 7–10 жовтня 2017 р.). Київ, 2017. Т. 1. *Диф. та інт. рівняння, їх застосування.* С. 58–59. ISBN 978-617-7021-57-4.

90. Зеленський А. Г. До розв'язування граничної задачі для півнескінченної товстої плити. Тези доповідей V Міжнар. конф. "*Актуальні проблеми інженерної механіки"* (Одеса, 22–25 травня 2018 р.). Одеса, 2018. С. 93–94. ISBN 978-617-7195-62-6.

91. Зеленський А. Г. Загальні основні рівняння теорії пластин довільної сталої товщини. *Актуальні проблеми гуманітарних та природничих наук* (Харків, 30-31 березня 2018 р,). Матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф. *Фізико-математичні науки.* Харків: Молодий вчений, 2018. С. 167–170. ISBN 978-617-7640-10-2. www.molodyvcheny.in.ua.

92. Зеленський А. Г. Про розв'язування рівнянь рівноваги нетонкої транстропної плити на пружній основі. *Перспективні напрями розвитку науки та техніки* (Вінниця, 23 березня 2018 р.). Збірн. наук. матеріалів 18-ї Міжнар. наук.-практ. інтернет-конференції. Ч. 1. Вінниця, 2018. С. 16–20.

93. Зеленський А. Г. Про першу граничну задачу для півнескінченної товстої пластини. *Математичні проблеми технічної механіки–2018.* Матеріали Міжнар. наук. конф. (Київ, Черкаси, Кам'янське, 16–19 квітня 2018 р.). Кам'янське, 2018. С. 50.

94. Зеленський А. Г. Про знаходження загального розв'язку системи диференціальних рівнянь в теорії згину нетонких пластин. Тези Міжнар. наук. конф. "*Сучасні проблеми механіки та математики"* (Львів, 22-25 травня 2018 р.). Львів, 2018. С. 164–165.

95. Зеленський А. Г. Метод послідовних наближень в теорії нетонких пологих трансверсально-ізотропних оболонок. Тези доповідей I Міжнар. наук.-техн. конф. *"Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні*" (Харків, 10-14 вересня 2018 р.). Харків, 2018. С. 98. ISBN 978-966-02-8575-0.

96. Зеленський А. Г. Варіант математичної теорії трансверсально-ізотропних оболонок довільної товщини при статичному навантаженні. Тези доповідей VI Міжнар. конф. "*Актуальні проблеми інженерної механіки"* (Одеса, 20–24 травня 2019 р.). Одеса, 2019. С. 115–116. ISBN 978-617-7195-87-9.

97. Zelensky A. An Option of Mathematical Theoryof non-thin Elastic Plates and Shells of Low Curvature with Static Loading, *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій,* Тези доповідей Другої міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка В. І. Моссаковського (Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро, 2019. С. 342–343.

98. Зеленський А. Г. Про фундаментальні розв'язки системи рівнянь високого порядку математичної теорії транстропних пластин. *Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики– 2019.* Матеріали Міжнар. наук. конф. (Дніпро, Кам'янське, 15–18 квітня 2019 р.). Кам'янське, 2019. С. 45–46.

99. Zelensky A. G. Perturbation Method in the Mathematical Theory of Physically Nonlinear Plates of Arbitrary Thickness. Eurasioan Scientific Congress. *Abstracts of II International Scientific and Practical Conference.* Barselona, Spain, 24-25 February 2020. Barselona, 2020. P.225–229. ISBN 978–84–15927–31–0. http://sci-conf.com.ua.

100. Зеленський А. Г. Аналітичний розв'язок деяких граничних задач варіанта математичної теорії пластин довільної товщини. Тези доповідей VII Міжнар. конф. *"Актуальні проблеми інженерної механіки"* (Одеса, 12–15 травня 2020 р.). Одеса, 2020. С. 119–122.

АНОТАЦІЯ

Зеленський А. Г. Варіант математичної теорії нетонких пружних пластин і пологих оболонок при статичному навантаженні. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро, 2021.

У роботі вирішена актуальна наукова проблема механіки деформівного твердого тіла, яка полягає в побудові нових ефективних варіантів математичної теорії (МТ) нетонких фізично лінійних і нелінійних за Каудерером однорідних і шаруватих пластин та пологих оболонок при довільному статичному поперечному навантаженні з позицій тривимірної теорії пружності, розробленні нових аналітичних точних і наближених методів розв'язання систем диференціальних рівнянь (ДР) рівноваги високих порядків, отриманні частинних і загальних розв'язків граничних задач варіантів МТ вказаних елементів та числових залежностей напружено-деформованого стану (НДС) від механіко-геометричних характеристик, типу навантаження, граничних умов і наближень у побудованих варіантах. Суттєвим у вирішенні наукової проблеми є те, що побудовані варіанти МТ дають реальну можливість аналітичного розв'язання граничних задач для вказаних елементів і визначення НДС з високою точністю.

Побудова нових варіантів МТ вказаних елементів основана на комплексному методі зведення тривимірної задачі до двовимірної, який поєднує варіаційний принцип Рейснера, метод розвинення усіх компонент НДС і граничних умов, як функцій трьох змінних, у нескінченні ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра (для однорідних елементів) і їх комбінацій у межах кожного шару (для шаруватих елементів), точне задоволення граничних умов на лицевих площинах (поверхнях) і умов жорсткого зчеплення шарів, узагальнену методику взаємозв'язаних рівнянь, метод збурень (для однорідних ортотропних та ізотропних фізично нелінійних пластин і пологих оболонок) і послідовних наближень (для шаруватих нелінійно пружних пластин і пологих оболонок). Тривимірна задача статики для нетонких однорідних ортотропних та ізотропних фізично нелінійних пластин і пологих оболонок (нелінійно пружних шаруватих елементів) на основі МТ методом збурень (послідовних наближень) зведена до нескінченної рекурентної послідовності двовимірних лінійних крайових задач. Розроблені: 1) нові методи інтегрування неоднорідних систем ДР високих порядків МТ нетонких пластин і пологих оболонок, основані на математичних перетвореннях ДР і зведенні їх до однорідних і неоднорідних ДР 2-го порядку (для пологих оболонок з використанням методів збурень і послідовних наближень); 2) нові наближені методи розв'язання отриманих систем ДР. Розвинуті методи математичної фізики. Отримані в явному вигляді системи ДР рівноваги у високих наближеннях для вказаних елементів, частинні і загальні розв'язки граничних задач при поперечних навантаженнях різного типу і числові результати, які дали можливість

одержати з високою точністю НДС і нові якісні ефекти впливу на нього механіко-геометричних характеристик, типу навантажень, граничних умов і наближень варіантів МТ.

Ключові слова: нові варіанти математичної теорії, нетонкі лінійно і нелінійно пружні однорідні та шаруваті пластини і пологі оболонки, поліноми Лежандра, варіаційний принцип Рейснера, диференціальні рівняння високих порядків, методи, загальні розв'язки, напружено-деформований стан, крайові ефекти.

АННОТАЦИЯ

Зеленский А. Г. Вариант математической теории нетонких упругих пластин и пологих оболочек при статическом нагружении. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара, г. Днепр, 2021.

В работе решена актуальная научная проблема механики деформируемого твердого тела, которая заключается в построении с позиций трехмерной теории упругости новых эффективных вариантов математической теории (МТ) нетонких физически линейных и нелинейных (по Каудереру) однородных и слоистых пластин и пологих оболочек при произвольном статическом поперечном нагружении, разработке новых аналитических точных и приближенных методов решения систем дифференциальных уравнений (СДУ) высоких порядков, получении частных и общих решений граничных задач вариантов МТ указанных элементов и численных зависимостей напряженно-деформированного состояния (НДС) от механико-геометрических характеристик, типа нагружения, граничных условий и приближений в построенных вариантах МТ. Существенным в решении научной проблемы является возможность реально аналитически решать граничные задачи вариантов МТ названных элементов и определять НДС с большой точностью.

Построение новых вариантов МТ указанных элементов базируется на комплексном методе приведения трехмерной задачи к двумерной, который объединяет вариационный принцип Рейсснера, метод разложения всех компонент НДС и граничных условий, как функций трех переменных, в бесконечные ряды по поперечной координате с помощью полиномов Лежандра (для однородных элементов) и их комбинаций в пределах каждого слоя (для слоистых элементов), точное удовлетворение граничных условий на лицевых плоскостях (поверхностях) и условий жесткого сцепления слоев, обобщенную методику взаимосвязанных уравнений, метод возмущений (для однородных ортотропных и изотропных физически нелинейных пластин и пологих оболочек) и последовательных приближений (для слоистых нелинейно упругих пластин и пологих оболочек). Трехмерная задача статики для нетонких однородных ортотропных и физически нелинейных пластин и пологих оболочек (нелинейно упругих слоистых элементов) в МТ методом возмущений (последовательных приближений) приведена к бесконечной рекуррентной последовательности двумерных линейных краевых задач. Разработаны: 1) новые методы интегрирования неоднородных СДУ равновесия высоких порядков МТ, основанные на математических преобразованиях уравнений и приведении их к однородным и неоднородным дифференциальным уравнениям 2-го порядка (для пологих оболочек с использованиемметодов возмущений и последовательных приближений); 2) новые приближенные методы решения полученных СДУ. Получены частные и общие решения граничных задач для указанных элементов при разных типах поперечных нагружений и численные результаты, которые дали возможность определить новые качественные эффекты влияния механико-геометрических характеристик, способа нагружения, граничных условий и приближений вариантов МТ на НДС.

Ключевые слова: новые варианты математической теории, нетонкие линейно и нелинейно упругие однородные и слоистые пластины и пологие оболочки, полиномы Лежандра, вариационный принцип Рейсснера, дифференциальные уравнения высоких порядков, методы, общие решения, напряженно-деформированное состояние, краевые эффекты.

ABSTRACT

Zelensky A. G. A variant of the mathematical theory of non-thin elastic plates and shallow shells under static loading. - On the rights of the manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of physical and mathematical sciences on a specialty 01.02.04 - mechanics of a deformable firm body. - Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, 2021.

The actual scientific problem of mechanics of deformed solids is solved in the work: construction of new effective variants of mathematical theory (MT) of physically linear and nonlinear according to Kauderer homogeneous and layered plates and shallow shells at arbitrary static transverse loading on the basis of three-dimensional theory of elasticity; development of approximate methods for solving systems of high-order differential equations (DE); obtaining partial and general solutions of boundary value problems of MT variants of the specified elements and numerical dependences of the stress-strain state (SSS) on mechanical-geometrical characteristics, type of loading, boundary conditions and approximations in the constructed variants.

Important in solving the scientific problem is that the constructed versions of MT provide a real opportunity to analytically solve the boundary value problems for these elements and determine the SSS with high accuracy. The three-dimensional problem of theory of elasticity for plates and shells is re-duced to the two-dimensional one using Reissner's variational principle, method of series expansion of SSS components on lateral coordinate with the use of Legendre-Polynom for homogeneous plates and shells or combination of both. The three-dimensional boundary value problem for these elements is reduced using perturbation methods and successive approximations to an infinite recurrent sequence of two-dimensional linear boundary value problems.

A new method for integrating inhomogeneous systems DE of high-order equilibrium equations of the MT of non-thin plates has been developed, based on mathematical transformations of equations and their reduction to homogeneous and inhomogeneous DE of the 2nd order; developed new approximate methods for solving the obtained systems of equations for plates and shallow shells. General solutions are obtained using the method of operators. Boundary value problems for determination of SSS of nonfine homogeneous physically linear and nonlinear plates, shallow shells and two-layer and three-layer transverse-isotropic plates are solved. New conclusions on the influence of mechanical and geometric parameters, types of load and boundary conditions on the SSS are obtained.

Keywords: new variants of mathematical theory, nonfine linearly and nonlinearly elastic homogeneous and layered plates and shallow shells, Legendre polynomials, Reisner variational principle, high-order differential equations, methods, general solutions, stress-strain state, boundary effects.