МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Всеукраїнська наукова конференція

з нагоди 70-річчя

Владислава Федоровича Бабенка

Тези

3-5 жовтня 2019
Дніпро, Україна

Організаційний комітет
д-р фіз.-мат. наук, проф. М.В. Поляков –
голова Оргкомітету.
д-р. фіз.-мат. наук, проф. В.О. Кофанов
д-р. фіз.-мат. наук, проф. В.П. Моторний
д-р. фіз.-мат. наук, доц. Н.В. Парфінович
канд. фіз.-мат. наук, доц. А.М. Пасько – секретар
канд. фіз.-мат. наук, доц. Р.О. Біліченко
канд. фіз.-мат. наук, доц. М.Б. Вакарчук
канд. фіз.-мат. наук, доц. С.В. Гончаров
канд. фіз.-мат. наук, О.В. Коваленко
асистент С.В. Конарева
канд. фіз.-мат. наук, доц. Т.Ю. Лескевич
канд. фіз.-мат. наук, доц. О.О. Руденко
канд. фіз.-мат. наук, доц. М.Є. Ткаченко
канд. фіз.-мат. наук, доц. В.М. Трактинська

Програмний комітет
д-р. фіз.-мат. наук, проф. В.О. Кофанов
д-р. фіз.-мат. наук, проф. В.П. Моторний
д-р. фіз.-мат. наук, доц. Н.В. Парфінович

Approximation properties of some extremal polynomials in complex plane

F.G. Abdullayev

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a finite Jordan region, $0 \in G$; $L := \partial G$, $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G}$.

For $p > 0$ let $A_p^1(G)$ denote the set of analytic in G functions $f(z)$ normalized by $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ and such that

$$\|f\|_{A_p^1(G)}^p := \iint\limits_G |f'(z)|^p \, d\sigma < \infty,$$

where σ is a two dimensional Lebesgue measure.

Let $w{=}\varphi(z)$ be the conformal mapping of G onto the disk $B(0, \rho_0) := \{w : |w| < \rho_0\}$ normalized by $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.

Let us consider the following extremal problem for $p > 0$:

$$\left\{ \|\varphi - P_n\|_{A_p^1(G)}, \ P_n \in \wp_n \right\} \to \inf . \tag{1}$$

In this work, we will investigate the some approximation properties of the extremal polynomials, which is the solution to the extremal problem (1), in different regions of the complex plane. Some analogous questions was investigated in [1], [2], [3], [4] and in references in them.

Література

[1] **F.G.Abdullayev,** Uniform convergence of the generalized Bieberbach polynomials in regions with non zero angles. *Acta Math. Hung. Vol.77, No:3, (1997), pp. 223-246.*

[2] **F.G.Abdullayev**, Uniform Convergence of Generalized Bieberbach Polynomials in Regions with zero angles, *Czechoslovak Mathematical Journal, 51(126), (2001), pp.643-660.*

[3] **V.V. Andrievskii,** Uniform convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise quasiconformal boundary (*Russian*). *In: Theory of Mappings and Approximation of Functions. Kiev, Naukova Dumka (1983), pp.3-18.*

[4] **M.V.Keldych,** Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques. *Math.Sb., 5(47), (1939), pp.391-401.*

Kyrgyz-Turkish Manas University, Kyrgyzstan.
Mersin University, Turkey.
e-mail: fahreddinabdullayev@gmail.com

On estimates of the best approximations of functions in the generalized Lorentz space

Gabdolla Akishev

Let a function ψ continuous, non-decreasing, concave on $[0,1]$ and $\psi(0)=0$, $0<\tau<\infty$. Moreover, let $L_{\psi,\tau}$ denote the generalized Lorentz space, which consists of all measurable functions $f(\overline{x})=f(x_1,\ldots,x_m)$ of period 2π for each variable such that
$$\|f\|_{\psi,\tau}=\left(\int\limits_0^1 f^{*^\tau}(t)\psi^\tau(t)\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}<\infty,$$

where $f^*(t)$ is a nonincreasing rearrangment of the function $|f(2\pi\bar{x})|, \bar{x}\in[0,1]^m$.

Let $S_{2^s}(f,2\pi\bar{x})=\sum\limits_{|k_1|<2^s}\ldots\sum\limits_{|k_m|<2^s}a_{\bar{k}}e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle}$ – partial sum of the Fourier series of a function $f\in L$. Let $1\leq\theta\leq\infty$, $r>0$. We consider the space $B^r_{\psi,\tau,\theta}$ of all functions $f\in L_{\psi,\tau}$ for which $\sum\limits_{s=1}^{\infty}2^{sr\theta}||S_{2^s}(f)-S_{2^{s-1}}(f)||^\theta_{\psi,\tau}<\infty$ and in it the unit ball $\mathbb{B}^r_{\psi,\tau,\theta}$. $E_n(f)_{\psi,\tau}$ – the best approximation of the function $f\in L_{\psi,\tau}$ by trigonometric polynomials of order at most n in each variable. Denote by SVL the set of all non-negative functions continuous on $[0,1]$ $\psi(t)$, for which $(\log 2/t)^{\varepsilon}\psi(t)\uparrow+\infty$ and $(\log 2/t)^{-\varepsilon}\psi(t)\downarrow 0$ for $t\downarrow 0$ for any number, $\varepsilon\in(0,\infty)$. $\alpha_\psi=\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}$, $\quad\beta_\psi=\overline{\lim}_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}$. Estimates of the best approximations of the best approximations of the functions $f\in\mathbb{B}^r_{\psi_1,\tau_1,\theta}$ in the norm of the space L_{ψ_2,τ_2} are established in various relations between the parameters τ_1,τ_2,θ. In particular, proved

Theorem. Let functions ψ_1,ψ_2 be such that $\sup_{0<t\leqslant 1}\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}<\infty$, $1<\alpha_{\psi_1}=\alpha_{\psi_2}\leqslant\beta_{\psi_1}=\beta_{\psi_2}<2^{1/\tau_2}$, $1<\tau_2\leq 2$ and $\frac{\psi_2}{\psi_1}\in SVL$, $1\leqslant\theta<\infty$. If $\tau_2<\tau_1$, $r>0$, then $\sup\limits_{f\in\mathbb{B}^r_{\psi_1,\tau_1,\theta}}E_n(f)_{\psi_2,\tau_2}\asymp n^{-r}\frac{\psi_2(1/n)}{\psi_1(1/n)}(\log(n+1))^{\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}}, n\in\mathbb{N}$.

In particular, some results of A. S. Romaniuk, S. A. Stasyuk (see the bibliography in [2]) and [2] follow from the proved statements.

Література

[1] Akishev G. An inequality of different metrics in the generalized Lorentz space // Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 2018, 24, N 2 P.5–18

[2] Akishev G. Estimates for best approximations of functions from the logarithmic smoothness in the Lorentz space// Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 2017, 23, N 3, P. 3–21.

L.N. Gumilyov Eurasian National University
and Ural Federal University
e-mail: *akishev_g*@mail.ru

Approximation of Operators in a Hilbert Space and Some Applications

Vladislav Babenko, Yuliya Babenko, Nadiia Kriachko

In this talk we discuss the problem of approximating an operator in a Hilbert space on a class of elements defined with the help of another operator. We then apply the results to solve the following problems:

(i) the problem of finding sharp inequalities of Hardy-Littlewood-Polya type, Taikov type, etc.,

(ii) the problem of approximating a function of an unbounded self-adjoint or normal operator by bounded operators,

(iii) the problem of best approximation of a certain class of elements from a Hilbert space by another class, and

(iv) the problem of optimal recovery of an operator on a class of elements given with an error.

Dniprovski National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com
Dniprovski National University
e-mail: nadiakriachko@gmail.com

Kennesaw State University
e-mail: ybabenko@kennesaw.edu

Asymptotically optimal recovery of integral operators by the values of functions with given majorant for the modulus of continuity

V.F. Babenko, Yu.V. Babenko, N.V. Parfinovych, D.S. Skorokhodov

Let X, Z be linear spaces, Y be normed space, $A : X \to Y$ be linear operator with domain $\mathcal{D}(A)$, $W \subset \mathcal{D}(A)$ be a class, $\mathcal{I}$ be the class of information operators $I : \overline{\operatorname{span} W} \to Z$. The problem of the best recovery of operator A on the class W based on information from the class $\mathcal{I}$ consists of finding the quantity:

$$\mathfrak{E}\left(A; W; \mathcal{I}\right) := \inf_{I \in \mathcal{I}} \inf_{\Phi : Z \to Y} \sup_{x \in W} \left\| Ax - \Phi(Ix) \right\|_Y,$$

where the second inf is taken over all mappings $\Phi : Z \to Y$, called methods of recovery, and finding optimal information $I^* \in \mathcal{I}$ and method of recovery Φ^*.

Let $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfy *growth condition* if $\omega(0) = 0$, ω is increasing and, for any given $s > 1$, the quotient $\frac{\omega(st)}{\omega(t)}$ is decreasing and is bounded from above for $t > 0$. This ensures (see [1]) that there exists a number $\alpha = \alpha_\omega \in (0, 1]$ called *the growth index* such that $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\omega(st)}{\omega(t)} = s^\alpha$, for every $s > 0$.

In this talk we will present some new results on the problem of the best recovery of integral operators with non-negative kernels on classes $H^\omega(\Omega)$ of functions defined on a compact $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, having given majorant ω for their modulus of continuity. As class $\mathcal{I} = \mathcal{I}_n$, $n \in \mathbb{N}$, of information operators we consider the set of operators $I_Q : C(\Omega) \to \mathbb{R}^n$, $Q \subset \Omega$ and $\operatorname{card} Q \leqslant n$, mapping a continuous on Ω function into the vector of its values at points from Q. Under certain general assumptions, we prove existence of a constant $C > 0$ such that

$$\mathfrak{E}\left(A; H^\omega(\Omega); \mathcal{I}_n\right) = C \cdot (1 + o(1)) \cdot \omega\left(n^{-\alpha/d}\right), \qquad n \to \infty.$$

Also, we construct asymptotically optimal sequences of information operators $\{I_n^*\}_{n=1}^\infty$, $I_n^* \in \mathcal{I}_n$, and methods of recovery $\{\Phi_n^*\}_{n=1}^\infty$, $\Phi_n^* : \mathbb{R}^n \to Y$, *i.e.*:

$$\sup_{x \in H^\omega(\Omega)} \left\| Ax - \Phi_n^*\left(I_n^* x\right) \right\|_Y = (1 + o(1)) \cdot \mathfrak{E}\left(A; H^\omega(\Omega); \mathcal{I}_n\right), \qquad n \to \infty.$$

In addition, we will demonstrate some consequences of these results to the problems of asymptotically optimal recovery of solutions to classical integral equations and partial differential equations.

[1] Gruber P. M. Optimum quantization and its applications / P. M. Gruber // Advances in Mathematics. – 2004. – 186. – P. 456–497.

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Kennesaw State University
e-mail: ybabenko@kennesaw.edu

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: nat-vic-par@i.ua

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: dmitriy.skorokhodov@gmail.com

Some unlimited convergence domains of branched continued fractions of the special form

Dmytro Ilkovych Bodnar, Iryna Bohdanivna Bilanyk and Olha Grygorivna Voznyak

Rational approximations of functions that are represented by the formal multiple power series can be constructed by using the approximants of branched continued fractions (BCF) with independent variables. These rational approximations often have better truncation error bounds, and their convergence regions are wider than ones for corresponding multiple power series. If we put certain fixed numbers instead of variables in BCF with independent variables we obtain BCF of the special form

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

where $b_0, a_{i(k)}, b_{i(k)} \in \mathbb{C},\ i(k) \in \mathcal{I}$,

$$\mathcal{I} = \left\{ i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)\ : 1 \le i_k \le i_{k-1} \le \ldots \le i_0;\ k \ge 1;\ i_0 = N \right\},$$

N – fixed natural number.

Relevant question is to establish efficient convergence criteria for these fractions. Some theorems of convergence for BFC with independent variables are obtained in papers of D. Bodnar, T. Antonova, R. Dmytryshyn, O. Baran.

There are obtained unlimited convergence regions of BCF of the special form, namely:

- a criterion of convergence for fractions with real positive elements;
- parabolic theorems of convergence for fractions whose partial denominators are equal to the unit and partial numerators are complex numbers from

  $$\mathcal{P}_{i(k)}(\gamma, \varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - Re\left(ze^{-2i\gamma}\right) < (1-\varepsilon)\, cos^2\gamma / (2i_{k-1}) \right\},$$

  that is $a_{i(k)} \in \mathcal{P}_{i(k)}(\gamma, \varepsilon),\ i(k) \in \mathcal{I}$, where $(0 < \varepsilon < 1),\ |\gamma| < \pi/2$;
- angular theorems of convergence for fractions whose partial numerators are equal to the unit and partial denominators are complex numbers from domain

  $$G(\varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \ne 0, |\arg z| < \pi/2 - \theta \right\},\ 0 < \varepsilon < \pi/2.$$

The truncation error bounds in some parts of previous domains are obtained.

Ternopil National Economic University
e-mail: bodnar4755@ukr.net

Pidstryhach IAPMM NASU
e-mail: i.bilanyk@ukr.net

Ternopil National Economic University
e-mail: olvoz@ukr.net

On the Voronoi Summability of Fourier Integrals and Its Conjugate Integrals

Liliya Boytsun and Tamara Rybnikova

Let $p(t)$ be an integrable function on the real axes. If $f(u)$ is integrable in $(0,\infty)$, $P(y) = \int\limits_0^y p(t)\,dt \neq 0$, and $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{1}{P(y)} \int\limits_0^y P(y-u)f(u)\,du = I$, then the integral $\int\limits_0^\infty f(u)\,du$ is said to be summable by the Voronoi method, or $(W, p(t))$ is summable to I.

Theorem. *a) Let $\lambda(t)$ be a function defined in $t>0$, positive and monotone non-decreasing.*

Suppose that $\frac{\lambda(t)}{t}$ is monotone non-increasing, $\frac{\lambda(t)}{t} = o(1)$ as $t\to\infty$ and $\int\limits_a^t \frac{du}{\lambda(u)} = O\left(\frac{t}{\lambda(t)}\right)$ as $t\to\infty$ for $a>0$ as fixed.

If $p(y)$ is continuously differentiable and satisfies the conditions: $\frac{y|p(y)|}{P(y)} = O(|P(y)|)$ as $y\to\infty$, $\int\limits_a^y \frac{t|p'(t)|}{\lambda(t)}dt = O(|P(y)|)$ as $y\to\infty$ for $a>0$ and $\int\limits_a^y \frac{P(t)}{t\lambda(t)}dt = O(|P(y)|)$ as $y\to\infty$, and if

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\,du = o\left(\frac{t}{\lambda(\frac{1}{t})}\right) \quad \text{as } t\to 0, \qquad (1)$$

then the Fourier integral associated with the function $f(t)$ is summable by Voronoi i.e. summable $(W, p(y))$ to the f(x) at the point $t = x$.

b) If we replace condition (1) in a) by the condition

$$\Psi(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}du = o\left(\frac{t}{\lambda(\frac{1}{t})}\right) \quad \text{as } t\to 0,$$

and if $g(x) = \frac{1}{\pi}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt$, exists and is finite, then the conjugate integral associated with the function $f(t)$ is summable $(W, p(y))$ to $g(x)$ at the point $t = x$.

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: lgboytsun@gmail.com

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: t.rybnikova@gmail.com

Multipliers Between Musielak-Orlicz Sequence Spaces

Stanislav Chaichenko and Andrii Shydlich

Let $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \geq 0$, be a sequence of Orlicz functions. In other words, for every $k \in \mathbb{N}$, the function $M_k(t)$ is a non-decreasing convex function such that $M_k(0) = 0$ and $M_k(t) \to \infty$ as $t \to \infty$. The Musielak-Orlicz sequence space $l_{\mathbf{M}}$ defined by the sequence $\mathbf{M}$ is the linear space of all sequences $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ of real numbers such that the following quantity is finite:

$$\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} := \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|/\alpha) \leq 1\Big\}.$$

Let $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ be another sequence of Orlicz functions, $l_{\mathbf{N}}$ be the corresponding modular space, and let $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of positive numbers. If, for every sequence $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{M}}$, we have $\lambda x = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{N}}$, then we say that the sequence λ defines a multiplier acting from the space $l_{\mathbf{M}}$ in the space $l_{\mathbf{N}}$. The space of all sequences defined by the multipliers from $l_{\mathbf{M}}$ in $l_{\mathbf{N}}$ is denoted by $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$.

The following result gives a description of the space of all multipliers between Musielak-Orlicz sequnce spaces.

Theorem 1. *Let* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *and* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *be any two sequences of Orlicz functions satisfying the condition* $\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}} \leq K_1 \|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}} \leq K_2$, $k \in \mathbb{N}$, *where* K_1 *and* K_2 *are positive constants,* $K_2 \geq K_1 \geq 1$. *Let also* $\mathbf{Q} = \{Q_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *be the sequence defined by the relations* $Q_k(y) := \sup_{t\in[0,1]}\Big(N_k(yt) - M_k(t)\Big)$, $y \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ *Then the spaces* $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ *and* $l_{\mathbf{Q}}$ *coincide as sets and, in addition, are isomorphic as Banach spaces.*

Corollary 1. *Let* $\mathbf{P} = \{t^{p_k}/p_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{R} = \{t^{r_k}/r_k\}_{k=1}^{\infty}$, *where* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *and* $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ *are any sequences satisfying condition* $1 \leq r_k < p_k \leq K$, $k \in \mathbb{N}$. *Then the spaces* $S_{\mathbf{P},\mathbf{R}}$ *and* $l_{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{Q} = \{t^{q_k}/q_k\}_{k=1}^{\infty}$, *where the numbers* $q_k := \frac{p_k r_k}{p_k - r_k}$, $k \in \mathbb{N}$, *coincide as sets and, in addition, are isomorphic as Banach spaces.*

In Orlicz sequences spaces, an assertion similar to Theorem 1 was obtained in [1].

1. Djakov P. B., Ramanujan M. S. Multipliers between Orlicz Sequence Spaces, *Truk. J. Math.*, 24 (2000), 313–319.

Donbas State
Pedagogical University
e-mail: s.chaichenko@gmail.com

Institute of Mathematics
of the NAS of Ukraine
e-mail: shidlich@gmail.com

The behavior of the constants of the best approximation

O.V.Chernitskaya

Let $C_p(f)$ be the constant of the best approximation of the function f in the metric of space $L_p[a,b]$, that is, such a constant that

$$\|f - C_p(f)\|_p = \inf\left\{\|f - C\|_p : C \in R\right\}.$$

The criterion for the best approximation constant in spaces $L_p[a,b]$ is proved in [1]. The properties of the best approximation constants and the behavior of the constants' sequences $\{C_n(f)\}$ were studied in [2,3]. The hypothesis of the monotonicity of these sequences for the functions of monotonic and convex ones was put forward. In [3] it was proved that the sequence of constants of the best approximation $\left\{C_n(\sqrt{t})\right\}$ is monotonically decreasing. The properties of the constants of the best asymmetric approximation were studied in [4].

Students of the Faculty of Applied Mathematics have created programs to calculate the constants of the best approximation. The programs investigated the behavior of sequences of constants $\{C_n(f)\}$ with respect to monotonicity for functions having the following properties: 1) the function is monotone and convex, 2) the function is convex and changes the direction of monotonicity, 3) the function is monotone and changes the direction of convexity. Degree and trigonometric functions were considered.

One result: for functions $f(t) = t^3$, $f(t) = t^5$ the sequences of the best-approximation constants $\{C_n(f)\}$ have a monotonous behavior. The nature of the monotony is determined by the type of segment $[a,b]$. If $a < 0$ and $|a| < b$, then the sequence increases. If $a < 0$ and $|a| > b$, the sequence goes down.

1. Корнейчук, Н.П. Точные константы в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М., 1987. – 424 с.

2. Черницкая, О.В. Поведение констант наилучшего приближения для выпуклых функций // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. «Математика» – 2006. – Вып. 11. – С. 110–114.

3. Черницкая, О.В. Монотонность последовательности констант наилучшего приближения для функции $\sqrt{t}$ // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. «Математика» – 2011. – Вып. 16. – С. 129–132.

4. Поляков, О.В. О наилучших (α,β) - приближениях постоянными випуклых функций в интегральных метриках //Укр. мат. журн. – 2013. – т.65, №7. – С. 1015–1020.

Oles Honchar Dnipro
National University
e-mail: chernitskaya.olga@ukr.net

Error Bounds for Meshless Finite Difference Methods

Oleg Davydov

Meshless finite difference methods discretize a differential equation

$$Lu = f, \qquad u, f : \Omega \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

on a set of irregular nodes $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ with the help of numerical differentiation formulas

$$Lu(x_i) \approx \sum_{j \in J_i} w_{ij} u(x_j), \quad J_i \subset J := \{1, \dots, N\}, \quad i \in I,$$

where the coefficients $w_{ij} \in \mathbb{R}$ are obtained by requiring that the formula is exact for certain finite dimensional spaces of functions, for example polynomials, and the size of the sets of influence $X_i = \{x_j : j \in J_i\}$ is bounded by a fixed number n. In particular, kernel-based formulas are exact for all linear combinations $\sum_{j \in J_i} c_j K(\cdot, x_j)$, $c_j \in \mathbb{R}$, where $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ is a positive definite kernel. The discrete approximate solution $\hat{u} \in \mathbb{R}^N$ of (1), such that $\hat{u}_i \approx u(x_i)$, is obtained by solving the sparse linear system

$$\sum_{j \in J_i} w_{ij} \hat{u}_j = f(x_i), \quad i \in I.$$

Methods of this type based on radially symmetric positive definite kernels (RBF-FD) have shown very good numerical performance for problems on the sphere and other manifolds. By allowing I to contain multiple instances of the same index $i \in J$ (with different sets of influence J_i), overdetermined systems arise and $\hat{u}$ may be obtained by least squares minimization.

The presentation will be devoted to an introduction to meshless finite difference methods, and well as the convergence analysis of a least squares version of it, giving for the first time sufficient conditions on X and $\{X_i, i \in I\}$ that guarantee convergence $\|\hat{u} - u|_X\| \to 0$ as $N \to \infty$ in the meshless setting. The convergence results apply to the case when $\Omega = \mathcal{M}$ is a smooth closed manifold, K is a reproducing kernel for a Sobolev space on $\mathcal{M}$, L is an elliptic differential operator positive and self-adjoint with respect to the inner product generated by K, and u is sufficiently smooth.

University of Giessen
e-mail: oleg.davydov@math.uni-giessen.de

Bojanov-Naidenov and Erdös problems for the positive (negative) parts of the functions.

Vladimir A. Kofanov

We solve the extremal problem

$$\|x_{\pm}^{(k)}\|_{L_p[a,b]} \to \sup, \quad k \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}, \quad p > 0,$$

over the set of pairs (x, I) of functions $x \in S_{\varphi}^{k}$ and intervals $I = [a, b]$ such that $\varphi^{(i)}$ is the comparison function for $x^{(i)}$, $i = 0, 1, ..., k$, satisfying restrictions $L(x)_p \le L(\varphi)_p$ (for $k = 0$) and $\mu\{\mathrm{supp}_{[a,b]} x_{\pm}^{(k)}\} \le \mu$, $\mu > 0$, where $L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : [a, b] \subset \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a, b)\right\}$ and φ is 2ω-periodic, odd about 0, even about $\omega/2$, concave on $(0, \omega)$ and strictly increasing on $[0, \omega/2]$.

Set $L_{\varphi}^{\pm}(p, \mu) := \left\{(x, I) : x \in S_{\varphi}^{0} : L(x)_p \le L(\varphi)_p, \mu\{\mathrm{supp}_I x_{\pm}\} \le \mu\right\}$ and $S_{\varphi,k}^{\pm}(\mu) := \left\{(x, I) : x \in S_{\varphi}^{k},\ \mu\left(\mathrm{supp}_I x_{\pm}^{(k)}\right) \le \mu\right\}$, $k \in \mathbf{N}$.

Let us represented μ as follows

$$\mu = n \cdot \omega + 2\Theta, \quad n \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}, \quad \Theta \in [0,\ \omega/2),$$

and choose $[A, B] \subset \mathbf{R}$ and $\tau_k^{\pm} > 0$ such that

$$B - A = 2n \cdot \omega + 2\Theta,$$

$$\varphi_{\pm}^{(k)}(A + \Theta + \tau_k^{\pm}) = \varphi_{\pm}^{(k)}(B - \Theta + \tau_k^{\pm}) = \left\|\varphi^{(k)}\right\|_{\infty}, \quad k \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}.$$

Denote by W the set of continuity, nonnegative and convex functions Φ defined on $[0, \infty)$ such that $\Phi(0) = 0$.

Theorem. *For any function $\Phi \in W$, $p, \mu > 0$ and for any $k \in \mathbf{N}$*

$$\sup\left\{\int_a^b \Phi\left(x_{\pm}^{p}(t)\right) dt : (x, [a, b]) \in L_{\varphi}^{\pm}(p,\ \mu)\right\} = \int_A^B \Phi\left(\varphi_{\pm}^{p}(t + \tau_0^{\pm})\right) dt,$$

$$\sup\left\{\int_a^b \Phi\left(x_{\pm}^{(k)}(t)\right) dt : (x, [a, b]) \in S_{\varphi,\, k}^{\pm}(\mu)\right\} = \int_A^B \Phi\left(\varphi_{\pm}^{(k)}(t + \tau_k^{\pm})\right) dt.$$

In particular, we solve the same problems over the classes $W_{\infty}^{r}(\mathbf{R})$ and over the bounded sets of the spaces of trigonometrical polynomials and splines. Besides, we solve Erdös problem for positive (negative) parts of polynomials and splines.

Dniprovski National
University
e-mail: vladimir.kofanov@gmail.com

On Image Segmentation Problem via Piecewise Constant Approximation of a Target Mapping

Peter I. Kogut

Mostly motivated by the crop field classification problem and the automated computational methodology for the extraction of agricultural crop fields from satellite data, we propose a new technique for the satellite image segmentation which is based on the concept of piecewise smooth approximation of some target mappings. We show that the remote sensing satellite image segmentation problem, based on the analysis of the slope-based vegetation indices, is a particular case of the proposed setting.

In particular, in agricultural crop field classification, one of a fundamental problem is to provide a disjunctive decomposition of a fixed domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ onto finite number of nonempty subsets $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_K$ such that each of these subsets could be associated with a crop that is grown in this area, or with a forest regions, or water zones, and so on, and this correspondence must be established at rather high level of accuracy. The accurate crop maps (or crop field classification) are needed to update agricultural statistics, to provide agricultural crop yield prediction, and are often used in environmental modeling. Typically, such association between a given region and some agricultural crop can be made through the detection and quantitative assessment of green vegetation which is one of the major application of remote sensing studies. The information obtained in this way is a source of knowledge used for environmental resources management. One of the way enabling to get such information is determination of the so-called vegetation indices. Since over years many vegetation indices have been proposed for determining the vigor and health of vegetation, the reliability of information about vegetation directly and strictly depend on the fidelity, preciseness, and smoothness of the corresponding vegetation indices within an each particular crop field.

We focus our main intension on the rigor mathematical substantiation of the proposed approach. We discuss in details the consistency of the new statement of segmentation problem and its solvability. We derive the corresponding optimality conditions and provide their substantiation. We show that the proposed coupled optimization problem is rather flexible and powerful model to the study of variational image segmentation problem. We illustrate the accuracy and efficiency of the proposed algorithm by numerical experiences with images that have been delivered by satellite Sentinel-2.

Oles Honchar
Dnipro National University
e-mail: p.kogut@i.ua

On maximally oscillating perfect splines and some of their extremal properties

Oleg Kovalenko

We study analogues of the perfect splines for weighted Sobolev classes of functions defined on half-line. These splines play important role in the solution of certain extremal problems.

Let X be $C[0,\infty)$ or $L_\infty[0,\infty)$, $f_\pm \in C[0,\infty)$ be positive functions. For $x \in X$ set

$$\|x\|_{X,f_-,f_+} := \left\| \frac{\max\{x(\cdot),0\}}{f_+(\cdot)} + \frac{\max\{-x(\cdot),0\}}{f_-(\cdot)} \right\|_X .$$

If $f_- = f_+ =: f$, we write $\|x\|_{X,f}$ instead of $\|x\|_{X,f_-,f_+}$. For positive functions $f_\pm, g \in C[0,\infty)$ and natural r set

$$L^r_{f_\pm,g}[0,\infty) := \Big\{ x \in C[0,\infty)\colon \|x\|_{C[0,\infty),f_-,f_+} < \infty,\ x^{(r-1)} \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}, \\ \|x^{(r)}\|_{L_\infty[0,\infty),g} < \infty \Big\},$$

and

$$W^r_{f_\pm,g}[0,\infty) := \Big\{ x \in L^r_{f_\pm,g}[0,\infty) : \|x^{(r)}\|_{L_\infty[0,\infty),g} \le 1 \Big\} .$$

For $k = 1,\dots,r-1$, we call the function

$$\omega(W^r_{f_\pm,g}[0,\infty), D^k, \delta) := \sup_{x\in W^r_{f_\pm,g}[0,\infty),\, \|x\|_{C[0,\infty),f_-,f_+}\le\delta} \|x^{(k)}\|_{C[0,\infty)},\ \delta \ge 0$$

a modulus of continuity of k-th order differentiation operator on the class $W^r_{f_\pm,g}[0,\infty)$.

Under several assumptions on the functions $f_\pm$ and g, we characterize the function $\omega(W^r_{f_\pm,g}[0,\infty), D^k, \cdot)$ in terms of perfect g-splines that oscillate maximally on $[0,\infty)$.

Oles Honchar
Dnipro National Univeristy
e-mail: olegkovalenko90@gmail.com

Kolmogorov-type inequalities for the norms of low order fractional derivatives

Oleksandr Kozynenko, Dmytro Skorokhodov

Let $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. For $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Z}$, denote by $\mathbf{D}^k f$ the right hand side Marchaud fractional derivative (see [1]).

For $1 \leqslant p, s \leqslant \infty$ and $r \in \mathbb{N}$, let L_p be the space of measurable functions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ that are integrable in the power p (essentially bounded if $p = \infty$), with the standard norm $\|f\|_p$. By $L^r_{p,s}$ we denote the space of functions $f \in L_p$ such that $f^{(r-1)}$ is locally absolutely continuous on $\mathbb{R}_+$ and $f^{(r)} \in L_s$.

Let $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 0 < a < b \leqslant c < 1\}$, for every $(a, b, c) \in T$ and $1 < p < \infty$, define functions

$$\mu_{a,b,c}(u) := \begin{cases} \dfrac{u-a}{b-a} \cdot \dfrac{1}{1-c}\Big(\dfrac{k\,(1-k)}{c^{1+k}}\Big)^{\frac{1}{p-1}}\big(b(1-c^{\frac{1+k}{p-1}}) - (1-c^{1+\frac{1+k}{p-1}})\big), & u \in [0, b], \\ \dfrac{1}{1-c}\Big(\dfrac{k\,(1-k)}{c^{1+k}}\Big)^{\frac{1}{p-1}}\big(u(1-c^{\frac{1+k}{p-1}}) - (1-c^{1+\frac{1+k}{p-1}})\big), & u \in [b, 1], \\ (-1)\Big(\dfrac{k(1-k)}{u^{1+k}}\Big)^{\frac{1}{p-1}}, & u \in (1, +\infty), \end{cases}$$

and $\omega_{a,b,c}(\cdot) := |\mu_{a,b,c}(\cdot)|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn}(\mu_{a,b,c}(\cdot))$. By $g^{[1]}$ and $g^{[2]}$ denote the first and second order antiderivatives of $g \in L_1$ such that $g^{[1]}(0) = 0$ and $g^{[2]}(0) = (g^{[2]})'(0) = 0$.

Theorem. *Let $k \in (0, 1)$ and $1 < p < \infty$. Then system:*

$$\begin{cases} \omega^{[1]}_{a,b,c}(1) = 1 - k, \\ \omega^{[1]}_{a,b,c}(b) = (1-k)\, b^{-k}, \\ \omega^{[2]}_{a,b,c}(b) + \omega^{[2]}_{a,b,c}(1) = 1 + b^{1-k}, \end{cases}$$

has at least one solution $(a^*, b^*, c^*) \in T$, and for every $f \in L^2_{p,1}$, there holds true sharp inequality

$$\|\mathbf{D}^k f\|_\infty \leqslant \frac{\|\mathbf{D}^k \mu_{a^*,b^*,c^*}\|_\infty}{\|\mu_{a^*,b^*,c^*}\|_p^{1-\lambda}}\, \|f\|_p^{1-\lambda} \|f''\|_1^{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{k + 1/p}{1 + 1/p}.$$

In additions, we solve closely related problems of the best approximation of operator $\mathbf{D}^k$ by linear bounded ones and the best recovery of operator $\mathbf{D}^k$ on elements of the class given with error.

1. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. — London: Taylor&Francis Books Ltd, 2002.

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: kozinenkoalex@gmail.com

Oles Honchar Dnipro National University
e-mail: dmitriy.skorokhodov@gmail.com

On simulteneous approximation in average of a function and its derivatives

Oksana Motorna[1]**, Vitalii Motornyi**[2]

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

[2] Oles Honchar Dnipro National University , Dnipro, Ukraine

omotorna@ukr.net, *motornyivp1940@gmail.com*

We consider some properties of the integrable on the segment functions. Estimates for approximation of function and its derivatives are obtained. Say, we prove the following

Theorem. *Let the function $f(x)$ belongs to $W^r H_p^\omega$ $(1 \leq p < \infty)$, where $\omega(t)$ is an arbitrary modulus of continuity. Then there is an algebraic polynomial $P_{r,n}(f,x)$ of degree n, such that*

$$\left\| \frac{f^{(k)}(x) - P_{r,n}^{(k)}(f;x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right) g^{r-k}(x,n))} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \leq C_r \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{r-k}},.$$

where $g(x,n) = \sqrt{1-x^2} + 1/n, x \in [-1;1]$, and C_r is independent of f and n..

This result is a generalization of the results by R.N. Kovalchuc, L.I. Filozof and L.B. Khodak.

On the belonging of (ψ, β)-derivatives to Lebesgue spaces

Elena Ivanovna Radzievskaya

In terms of the best approximations of a function in the space L_p was found the condition of existence (ψ, β)-derivatives of the function belonging to L_q when $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

To state the result, we give the necessary notations and definitions.

Let L_p be a space of measurable 2π-periodic functions $f(x)$, for which $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$, $1 < p < \infty$; $E_n(f)_p$ be the best approximation of the function $f(x)$ in the metric of the space L_p by means of trigonometric polynomials of the order of at most $n-1$ and $\omega_k(f, \delta)_p$ be the modulus of smoothness of the k-th order (k is a natural number) in the space $L_p(0, 2\pi)$. According [1] we denote through $f_\beta^\psi(x)$ a (ψ, β)-derivative of a function f.

The following statement has been proved.

Theorem 1. Let $\psi(t)$ be such positive nonincreasing function which is defined for all $t \geq 1$ such that $\psi(2t) \geq c\psi(t)$ (c is some positive constant), and let the best approximations of the function $f \in L_p$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ satisfy the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)} < \infty.$$

Then the function f has the (ψ, β)-derivative which belongs to L_q , and

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1} \omega_p(f_\beta^\psi, \frac{1}{k}) < \infty.$$

Corollary. Let the best best approximations of the function $f \in L_p$ satisfy the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{p} - 1} \frac{E_k(f)_p}{\psi(k)} < \infty.$$

Then the function f has the a continuous (ψ, β)-derivatives whose Fourier series converges uniformly.

[1]Stepanets A. I. *Methods of Approximation Theory. I* [in Russian], Inst. Math. of the NASU, Kiev (2002).

National University of Food Technology
Kyiv
e-mail: radzlena58@gmail.com

Approximation of holomorphic functions by Cesáro means[1]

Maryna Savchuk and Viktor Savchuk

Let f be a function holomorphic in the disk $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ($f \in \mathcal{H}$) and

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_j z^j, \quad \widehat{f}_j := \frac{f^{(j)}(0)}{j!},$$

its expansion in Taylor series.

The (C, α) Cesáro means of function f are defined by

$$\sigma_n^\alpha(f)(z) = \frac{1}{A_{n-1}^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j-1}^\alpha \widehat{f}_j z^j, \quad \text{where } A_k^\alpha := \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)} = \binom{k+\alpha}{k}.$$

Our main result is the following theorem.

Theorem 1. *Assume that $\alpha \geq 1$. Then for any natural n and $z \in \overline{\mathbb{D}}$,*

$$\max\left\{\sum_{k=0}^{n-1} (A_k^\alpha)^2 \left|f(z) - \sigma_{k+1}^\alpha(f)(z)\right|^2 : f \in B^1\right\} = |z|^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(A_k^{\alpha-1}\right)^2.$$

This maximum is attained for the function $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

A particularly interesting case is when $\alpha = 1$. Then it follows from Theorem 1 that for arbitrary $z \in \overline{\mathbb{D}}$

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left|f(z) - \sigma_k^1(f)(z)\right| : f \in B^1\right\} = |z| \frac{\pi^2}{6}.$$

Ukrainian State Employment
Service Training Institute
e-mail: maryna1savchuk@gmail.com

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
e-mail: savchuk@imath.kiev.ua

[1]The research of the second author was supported by the grant of President of Ukraine for Doctors of Science to carry out research in 2019

The Best Approximation of Holomorphic Functions[2]

Viktor Savchuk

Let $H^q(\mathbb{B}_d)$ be the Hardy space consisting of all functions f holomorphic in the unit ball $\mathbb{B}_d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |\mathbf{z}| < 1\}$, $|\mathbf{z}| < 1\}$, $|\mathbf{z}| := \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_d|^2}$, for which

$$+\infty > \|f\|_q = \begin{cases} \sup\limits_{\rho\in[0,1)} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{S}_d} |f(\rho\mathbf{z})|^q d\sigma(\mathbf{z}) \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{B}_d} |f(\mathbf{z})|, & q = \infty, \end{cases}$$

where $d\sigma$ is the normalized Lebesgue surface measure on $\mathbb{S}_d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |\mathbf{z}| = 1\}$ and $\rho\mathbf{z} := (\rho z_1, \ldots, \rho z_d)$.

Let function $g \in H^1(\mathbb{B}_d)$ and $g(\mathbf{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(g)(\mathbf{z})$ be its homogeneous expansion at $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$. The radial Hadamard product of g and the function $\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu z^\nu$ holomorphic in the unit disk $\mathbb{B}_1$ is defined by $(g \odot \psi)(\mathbf{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu \Phi_\nu(g)(\mathbf{z})$. In case when $f = g \odot \psi$ we say that the function g is the radial ψ–derivative of f and we denote it by $\mathcal{R}^\psi f$. So, if $|\psi_\nu| > 0$ we have in this case $\mathcal{R}^\psi f(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_\nu} \Phi_\nu(f)(\mathbf{z})$.

We let $E_n(f)_q := \inf_{P\in\mathcal{P}_{n-1}} \|f - P\|_q$ be the best approximation of the function $f \in H^q$ by homogeneous polynomials P of degree $\le n - 1$. We proved that

$$\max_{f\,:\,\mathcal{R}^\psi f\in H^q(\mathbb{B}_d)} \frac{E_n(f)_\infty}{\|\mathcal{R}^\psi f\|_q} = |\psi_n| \Longleftrightarrow \min_{z\in\mathbb{B}_1} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_{k+n}}{\psi_n} z^k \right) \ge \frac{1}{2}, \ |\psi_n| > 0. \quad (1)$$

Our main result is the following theorem, where we set

$$\Omega(\delta, f)_q := \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|f(\cdot) - f((1-\rho)\cdot)\|_q d\rho.$$

Theorem 1. *Let $1 \le q \le \infty$, $d, n \in \mathbb{N}$ and suppose that ψ satisfies condition (1). Then*

$$\max_{f\,:\,\mathcal{R}^\psi f\in H^q(\mathbb{B}_d)} \frac{E_n(f)_q}{\Omega\left(\frac{1}{n}, \mathcal{R}^\psi f\right)_q} = \frac{n^n(n+1)}{n^n + (n-1)^{n+1}} |\psi_n|.$$

This maximum is attained for functions of the form $f = a + \psi_n P$, where $a \in \mathbb{C}$ and P is a homogeneous polynomial of degree n.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
e-mail: savchuk@imath.kiev.ua

[2]Supported by the grant of President of Ukraine for Doctors of Science to carry out research in 2019

Asymptotically best possible Lebesque-type inequalities for the Fourier sums in uniform metric

Anatolii Serhiiovych Serdyuk and Tetiana Anatoliivna Stepanyuk

Denote by $C^{\alpha,r}_{\beta}C,\ \alpha>0,\ r>0,\ \beta\in\mathbb{R}$, the set of all 2π–periodic functions, representable for all $x\in\mathbb{R}$ as convolutions of the form

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos\big(k(x-t)-\frac{\beta\pi}{2}\big)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\varphi\perp 1,\varphi\in C. \quad (1)$$

The function f in the equality (1) is called generalized Poisson integral of the function φ. The function φ in equality (1) is called as generalized derivative of the function f and is denoted by $f^{\alpha,r}_{\beta}$.

Let $E_n(f)_C$ be the best approximation of the function $f\in C$ in the metric of space C, by the trigonometric polynomials t_{n-1} of degree $n-1$, i.e.,

$$E_n(f)_C=\inf_{t_{n-1}}\|f-t_{n-1}\|_C.$$

Our aim is to obtain of asymptotically best possible Lebesque-type inequalities, for functions from the class $C^{\alpha,r}_{\beta}C$, where norms $\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C$ are estimated via best approximations $E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C$ for $0<r<1$. Here $S_{n-1}(f;\cdot)$ is the partial Fourier sums of order $n-1$ for a function f.

Our result clarifies the result of Stepanets and gives more exat estimate for the reminder term.

For arbitrary $\alpha>0$, $r\in(0,1)$ and $1\le p<\infty$ we denote by $n_1=n_1(\alpha,r)$ the smallest integer n such that $\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\left(1+\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+\frac{\alpha r}{n^{1-r}}\le\frac{1}{(3\pi)^3}$.

Our main result are the following theorems.

Theorem 1. *Let $0<r<1$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ and $n\in\mathbb{N}$. Then for any function $f\in C^{\alpha,r}_{\beta}C$ and $n\ge n_1(\alpha,r)$, fthe following inequality holds*

$$\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C\le e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\gamma_n\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C. \quad (2)$$

Moreover for any function $f\in C^{\alpha,r}_{\beta}C$ one can find a function $F(x)=F(f;n;x)$, such that $E_n(F^{\alpha,r}_{\beta})_C=E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C$ and for $n\ge n_1(\alpha,r)$ the following equality holds

$$\|F(\cdot)-S_{n-1}(F;\cdot)\|_C=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\gamma_n\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C. \quad (3)$$

In (2) and (3) the quantity $\gamma_n=\gamma_n(\alpha,r,\beta)$ is such that $|\gamma_n|\le(20\pi)^4$.

Institute of Mathematics
NAS of Ukraine
e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

RICAM
Austrian Academy of Sciences
e-mail: tania_stepaniuk@ukr.net

Reverse Hölder inequality

Ruslan Shanin

We consider classes of functions satisfying the reverse Hölder inequality. This functions studied in works of many authors.

Let R be a segment on $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, and let f be a non-negative function on R. Denote by

$$M_\alpha(f, R) := \left(\frac{1}{|R|} \int_R f^\alpha(x)\, dx \right)^{1/\alpha}$$

the mean of order α, where $\alpha \neq 0$ and $|R|$ is the Lebesgue measure of R.

Let α, β, $\eta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta\eta \neq 0$, and let R_0 be a fixed segment on $\mathbb{R}^d$. The classes of functions satisfying the reverse Hölder inequality on R_0 are defined as follows

$$RH_{\alpha,\beta}(R_0) := \left\{ f \in L^\alpha(R_0) \cap L^\beta(R_0) \colon [f]_{\alpha,\beta} < \infty \right\},$$
$$RH'_{\alpha,\beta,\eta}(R_0) := \left\{ f \in L^\alpha(R_0) \cap L^\beta(R_0) \colon \langle f \rangle_{\alpha,\beta,\eta} < \infty \right\},$$

where

$$[f]_{\alpha,\beta} := \sup_{R \subseteq R_0} \frac{M_\beta(f,R)}{M_\alpha(f,R)}, \qquad \langle f \rangle_{\alpha,\beta,\eta} := \sup_{R \subseteq R_0} \Big(M_\beta^\eta(f,R) - M_\alpha^\eta(f,R) \Big)$$

and the supremum is taken over all segments $R \subseteq R_0$.

The classes $RH_{\alpha,\beta}$ were well studied for all values of parameters α, β. The classes $RH'_{\alpha,\beta,\eta}$ were studied only for values of parameters $\alpha = 1$, $\beta = \eta$. We study the classes $RH'_{\alpha,\beta,\eta}$ for all values of the parameters $0 < \alpha < \beta$, $\eta > 0$. We obtained sharp estimates of the growth rate of equimeasurable rearrangement f^* of function f satisfying the reverse Hölder inequality. The main result is contained in the following theorem.

Theorem. *Let* $0 < \alpha < \beta$, $\eta > 0$, $f \in RH'_{\alpha,\beta,\eta}(R_0)$ *and* $a > 1$. *Then*

$$M_{\beta/2}^{\eta/2}(f^*)(t) - M_{\beta/2}^{\eta/2}(f^*)(|R_0|) \leq \frac{c_{\alpha,\beta,\eta,a} \langle f \rangle_{\alpha,\beta,\eta}^{1/2}}{\ln a} \ln \frac{|R_0| a}{t}, \quad 0 < t \leq |R_0|,$$

where

$$c_{\alpha,\beta,\eta,a} = \begin{cases} \frac{a^{\eta/\beta}\sqrt{\eta/\beta}}{2} \max\left(1, \frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right), & \eta \geq \beta, \\ \max\left(\left(\frac{a^{\eta/\beta}-1}{a^{\eta/\beta}+1}\right)^{1/2}, \frac{a^{2-\eta/\beta}\sqrt{\eta/\beta}}{2} \right) \max\left(1, \frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right), & 0 < \eta < \beta. \end{cases}$$

Odessa I. I. Mechnikov National University
e-mail: ruslanshanin@gmail.com

The approximation of the surface by spherical splines

Shumeiko Oleksander

This paper offers one of the possible approximations of a convex surfaces with fragments of the spheres which form a piecewise smooth surface.

Ligun A.A., Timchenko S.V. and Shumeiko A.A. ("Geometry of Convex Surfaces East Journal on Approximation. vol.8, no.3, pp. 15-57, 2002) showed that if there is some (natural) condition for the function $\rho(u)$, the surface $x(\rho, u)$ is a convex (strictly convex) surface, and the support function of this surface is equal to $\theta(x(\rho), u) = \rho(u), u \in S_n$, and, moreover, any smooth strictly convex surface can be represented as

$$x(\rho, u) = \left((\rho(u) - (\nabla\rho(u), u))\, u + \nabla\rho(u)\right)\big|_{S_n}.$$

Based on this result, we obtain the main theorem.

Theorem 1. *If for any value of $\varphi \in [0, 2\pi]$ and $\psi \in (0, \pi)$ the support function looks as follows:*

$$\theta(\varphi, \psi) = R + x_0 \cos\varphi \sin\psi + y_0 \sin\varphi \sin\psi + z_0 \cos\psi, \tag{1}$$

then

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\psi + x_0, \\ y = R\sin\varphi\sin\psi + y_0, \\ z = R\cos\psi + z_0. \end{cases}$$

If the surface on each elementary portion of the sphere coincides with its fragment, such a surface will be called the spherical spline for the given segmentation.

We introduce a segmentation of the surface of the unit sphere

$$\Delta_{n,m} = \left\{[\varphi_{i-1}, \varphi_i] \times [\psi_{j-1}, \psi_j], i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\right\}.$$

Approximating the support function $\theta(\varphi, \psi)$ of the surface $\Pi(\varphi, \psi)$ at each cells $[\varphi_{i-1}, \varphi_i] \times [\psi_{j-1}, \psi_j]$ of the partition by the function (1), we obtain an approximation of the convex surface $\Pi(\varphi, \psi)$ by the surface $\hat{\Pi}(\varphi, \psi)$, which, on each cells, coincides with the fragment of a sphere with the radius R and with the center at the point $M(x_0, y_0, z_0)$. Therefore, $\hat{\Pi}(\varphi, \psi)$ is a spherical spline for the partition $\Delta_{n,m}$.

Dniprovsk State
Technical University
e-mail: ShumeikoAlex@gmail.com

Approximation on $\mathbb{R}$ by classical orthogonal polynomials with Chebyshev-Hermite weight and the widths of functional classes in $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$

Sergiy Vakarchuk and Mihaylo Vakarchuk

Here we represent the one of our new results, which continues the theme [1].

Let $L_2(\mathbb{R})$ be the space of all measurable functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, which are summable on $\mathbb{R}$ with square. By symbol $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, where $\gamma(x) = \exp(-x^2)$, we denote the space of such functions f, for which $f \cdot \gamma^{1/2} \in L_2(\mathbb{R})$. The norm in $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ is defined by formula $\|f\|_{2,\gamma} = \{\int_{\mathbb{R}} \gamma(x) f^2(x) dx\}^{1/2}$. Let D_γ be the differential operator of the next form D_γ: $\dfrac{d^2}{dx^2} - 2x\dfrac{d}{dx}$ and let $L_2^r(D_\gamma, \mathbb{R})$ be the class of functions $f \in L_{2,\gamma}(D)$, having absolutely continuous derivatives of $(2r-1)$-th order and $D_\gamma^r(f) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$. We suppose that $D_\gamma^r(f) := D_\gamma(D_\gamma^{r-1}(f))$, $r \in \mathbb{N}$; $D_\gamma^0(f) \equiv f$ and $L_2^0(D_\gamma, R) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Let $\Omega_{m,\gamma}(f,t)$ ($t \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$) be the m-th order generalized modulus of continuity for $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ and $\Psi(t)$ ($t \in [0,1]$) be a majorant. We assume $W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \Psi) = \{f \in L_{2,\gamma}^r(\mathbb{R}) : \Omega_{m,\gamma}(D^r(f), t) \leqslant \Psi(t) \ \ \forall t \in (0,1)\}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. For an arbitrary set $\mathfrak{M} \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ we denote by $E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\gamma}$ ($n \in \mathbb{N}$) the value of the best approximation of the $\mathfrak{M}$ by algebraic polynomials degree $\leqslant n-1$ in the space $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$.

Theorem 1. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ and a majorant Ψ satisfies the condition*

$$\inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^n)^m} = \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{1}$$

Then

$$p_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = E_{n-1}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \Psi))_{2,\gamma} = \frac{1}{(2n)^r} \inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{(1-(1-t)^n)^m}. \tag{2}$$

Here $p_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \Psi); L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))$ is any of the n-widths: Kolmogorov's, Gelfand's, Bernshtein's, linear, projective, ortoprojective.

If, for example, $\widetilde{\Psi}(t) = (\exp(at) - 1)^m$, where an arbitrary constant $a > 0$, we obtaine $p_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \widetilde{\Psi}); L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = E_{n-1}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \widetilde{\Psi}))_{2,\gamma} = a^m 2^{-r} n^{-(r+m)}$ from (1) and (2).

[1] S. B. Vakarchuk, "Mean Approximation of Functions on the Real Axis by Algebraic Polynomials with Chebyshev–Hermite Weight and Widths of Function Classes", *Math. Notes*, 95:5 (2014), 599–614.

Alfred Nobel University
Dnipro
e-mail: sbvakarchuk@gmail.com

Dniprovski National
University
e-mail: mihailvakarchuk@gmail.com

Екстремальні задачі теорії апроксимації для функцій зі значеннями у L-просторах

Владислав Федорович Бабенко[3]

Розгляд задач апроксимації функцій зі значеннями у L-просторах дозволяє з єдиної точки зору досліджувати задачі теорії апроксимації для функцій зі значеннями в нормованих просторах, многозначних функцій, функцій, значеннями яких є нечіткі множини, та інші. Ми докладно зупинимось на задачах оптимального відновлення операторів, що діють у просторах функцій зі значеннями у L-просторах.

Для широкого класу операторів що діють у просторах функцій, які означені на метричному компакті і приймають значення у L-просторі (ізотропному напівлінійному метричному просторі) розв'язана задача оптимального відновлення на класах функцій, що мають задану мажоранту модулів неперервності, по неточно заданим значенням функцій в n точках області визначення. Крім того, розв'язана задача оптимального відновлення монотонних операторів, що діють у просторах функцій, які означені на скінченному відрізку дійсної осі і приймають значення у LL-просторах (частково упорядкованих L-просторах), на класах монотонних функцій по точно відомим значенням функцій в n точках області визначення.

В якості прикладів застосування одержаних результатів наведемо результати по оптимальному відновленню розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтера II роду відносно функцій зі значеннями в L- та LL-просторах.

Окремими випадками одержаних результатів є (нові) результати по оптимальному відновленню операторів, що діють у просторах многозначних функцій, а також функцій, значеннями яких є нечіткі множини. Деякі результати є новими і для операторів, що діють у просторах числових функцій.

Dniprovski National
University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

[3]Дана робота виконана спільно з В. В. Бабенко, О. В. Коваленком і М. В. Поліщук

Наближення необмежених функціоналів обмеженими в гільбертовому просторі

Владислав Федорович Бабенко і Роман Олегович Біліченко

Нехай A – нормальний оператор, що діє в гільбертовому просторі H, $D(A)$ – область визначення оператора A, $f \in H$, $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, $x \in D(A^r)$, $N > 0$. Величиною найкращого наближення функціонала $F_f = (A^k x, f)$ лінійними обмеженими функціоналами на класі $Q = \{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \leq 1\}$ називається величина:

$$u_N = \inf_{g \in H, \|g\| \leq N} \sup_{x \in Q} |F_f(x) - g(x)|.$$

Для нормального оператора A, відповідного йому розкладу одиниці E_z (детальніше про розклад одиниці див. [1]), елемента гільбертового простору $f \in H$ і $h > 0$ визначимо

$$\Phi(h) = \left\{ \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{(1 + h|z|^{2r})^2} \, d\left(E_z f, f\right) \right\}^{1/2}, \Psi(h) = \left\{ \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2(r+k)}}{(1 + h|z|^{2r})^2} \, d\left(E_z f, f\right) \right\}^{1/2}.$$

Теорема 1. *Нехай числа N і $h > 0$ пов'язані співвідношенням $N = \Phi(h)$. Тоді справедлива рівність*

$$u_N = h\Psi(h).$$

Теорема 2. *Для будь-яких $x \in D(A^r)$ і $h > 0$ справедлива нерівність*

$$\left|\left(A^k x, f\right)\right| \leq h\Psi(h) \, \|A^r x\| + \Phi(h) \|x\|.$$

Нерівність перетворюється на рівність для елемента

$$x_h = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\overline{z}^k}{1 + h|z|^{2r}} \, dE_z f.$$

Наведені теореми є узагальненням результатів [2], одержаних для самоспряжених операторів гільбертового простору.

1. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г. Ф. Ус, З.Г. Шефтель. - К.: Вища школа, 1990.

2. Бабенко В.Ф. Приближение неограниченных функционалов ограниченными в гильбертовом пространстве / В.Ф., Бабенко, Р.О. Биличенко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Математика. – 2012. – Вип. 17. – С. 3-11.

Дніпровський національний університет
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Дніпровський національний університет
e-mail: roman.bilichenko@ukr.net

Оптимальне відновлення компактного оператора за неточно заданими коефіцієнтами Фур'є його значень.

В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, Н. В. Парфінович

Нехай X – банаховий простір, Y – деяка (інформаційна) множина, $P_0(Y)$ – множина непорожніх підмножин множини Y, $W \subset X$ – деякий клас елементів та $I : W \to P_0(Y)$ – інформаційне відображення. Довільне відображення $\Phi : Y \to X$ назвемо методом відновлення елементів множини W за заданою інформацією.

Величина
$$e(W, I, \Phi) = \sup_{x \in W,\ y \in I(x)} \|x - \Phi(y)\|_X$$
називається похибкою метода Φ на класі W за інформацією I,

а величина
$$E(W, I) = \inf_{\Phi} e(W, I, \Phi) \tag{1}$$
називається похибкою оптимального відновлення елементів класу W за інформацією I. Метод Φ^*, який реалізує точну нижню межу в (1), називається оптимальним.

Нехай $X = H$ сепарабельний гільбертовий простір, $A : H \to H$ - компактний оператор, $W^A = \{x = Ah \ : \ h \in H,\ \|h\|_H \le 1\}$. Нехай також $Ah = \sum_k s_k h_k \psi_k$ - канонічне представлення оператора A, тобто ϕ_k - власні елементи оператора A^*A, s_k - s-числа A, $\psi_k = \frac{1}{s_k} A\phi_k$, $h_k = (h, \phi_k)$ і $x_k = (x, \phi_k) = (Ah, \phi_k) = s_k h_k$.

Розглянемо задачу відновлення елементів класу W^A у випадку, коли інформаційне відображення $I(x)$ задається формулою $I(x) = \{x_1 + B(\varepsilon_1), \ldots, x_n + B(\varepsilon_n)\}$, де $B(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \varepsilon\}$ і $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^n$ – заданий набір невід'ємних чисел.

Теорема 1. *Нехай число m, $0 \le m \le n$, таке, що*
$$1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \ge 0 \quad \textit{і} \quad 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} - \frac{\varepsilon_{m+1}^2}{s_k^2} < 0.$$
Тоді
$$E(W^A; I)^2 = e((W^A; I; \Phi^*)^2 = s_{m+1}^2 + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 (1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}),$$
де $\Phi^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} a_k (1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}) \psi_k$.

Аналогічні результати отримані для інших способів задання інформаціних відображень. Розглянута, також, задача оптимального відновлення скалярних добутків елементів з класів W^A та W^B за неточною інформацією про коефіцієнти Фур'є елементів з цих класів.

Dniprovski National University
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Dniprovski National University
e-mail: gunko.marina.2017@gmail.com

Dniprovski National University
e-mail: xvector2016@gmail.com

Нерівності типу Джексона з узагальненими модулями неперервності

Владислав Федорович Бабенко та Світлана Вікторівна Конарева

Розглядаються нові характеристики елементів гільбертового простору - узагальнені модулі неперервності $\omega_\varphi L_{p,V}([0,\delta])$ і отримані нові точні нерівності типу Джексона-Стєчкіна з цими модулями неперервності для апроксимації елементів гільбертового простору. Ці результати включають в себе багато відомих нерівностей для апроксимації періодичних функцій тригонометричними поліномами, апроксимації неперіодичних функцій цілими функціями експоненціального типу, аналогічні результати для майже періодичних функцій та інші. Ряд результатів є новими вже в цих класичних ситуаціях.

Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
e-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
e-mail: ssvet0502@gmail.com

Характеризація елемента найкращого наближення функцій багатьох змінних у просторах зі змішаною інтегральною метрикою з вагою

Ольга Сергіївна Біла та Вікторія Миколаївна Трактинська

Позначимо через $K = I_1 * I_2 * \cdots * I_n$ - $n-$ вимірний паралелепіпед, де $I_i = [a_i, b_i], 1 \leq i \leq n$. Нехай $\Omega(x) = \Omega(x_1, \ldots x_n)$ - невід'ємна, сумовна на K функція, яка майже всюди не дорівнює нулю. Розглянемо простір $L_{\bar{p},\Omega}$ вимірних K функцій $f(x) = f(x_1, \ldots x_n)$, для яких норма задається формулою:

$$||f||_{\bar{p}} = ||f||_{p_1,\ldots,p_n} = \left[\int_{I_n} \cdots \left[\int_{I_2} \left[\int_{I_1} \Omega(x)|f(x)|^{p_1} dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2\right]^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{p_n}} \quad (1)$$

і скінченна. Покладемо

$$|f|_{p_k,\ldots,p_i;\Omega} = \left[\int_{I_i} \ldots \left[\int_{I_{k+1}} \left[\int_{I_k} \Omega(x)|f(x)|^{p_k} dx_k\right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}} dx_{k+1}\right]^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}} \ldots dx_i\right]^{\frac{1}{p_i}}, \quad (2)$$

де $1 \leq k < i, 1 < i \leq n$.

Теорема. *Для того, щоб поліном $P_m^*(x) = \sum_{i=1}^m c_i^* \varphi_i(x)$ був поліномом найкращого наближення для функції $f(x)$ в метриці $L_{\bar{p};\Omega}$, достатньо і (коли хоча б одне з $p_i = 1$ у випадку, коли різниця $f(x) - P_m^*(x) \neq 0$ майже скрізь на $K = I_1 * I_2 * \cdots * I_n$, де $I_i = [a_i, b_i], 1 \leq i \leq n$ - $n-$вимірний паралелепіпед) необхідно виконання співвідношення*

$$\int_K \Omega(x) P_m(x) g(x) dx_1 \ldots dx_n = 0, \forall P_m \in H_m, \quad (3)$$

де

$$g(x) = \begin{cases} |f - P_m^*|^{p_1 - 1} |f - P_m^*|_{p_1;\Omega}^{p_2 - p_1} \ldots |f - P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-1};\Omega}^{p_n - p_{n-1}} \operatorname{sgn}(f - P_m^*), \\ |f - P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-1};\Omega} \neq 0; \\ 0, |f - P_m^*|_{p_1,\ldots,p_{n-1};\Omega} = 0. \end{cases}$$

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
e-mail: o.krasicka@ukr.net

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
e-mail: traktynskaviktoriia@gmail.com

Лінійні поперечники класів періодичних функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$

Михайло Віталійович Гембарський
Світлана Борисівна Гембарська

Досліджуються питання про порядкові оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ [1] періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$, норма в якому є більш сильною ніж L_1-норма. Надалі Ω — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна (S^{α}) та (S_l) [2], і для певної функції Ω класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з відомими класами Нікольського–Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$.

Нехай W — центрально-симетрична множина у просторі X з нормою $\|\cdot\|_X$. Величина

$$\lambda_M(W,X) = \inf_{A} \sup_{w\in W} \|w - Aw\|_X,$$

де інфімум взято по всіх діючих в X лінійних операторах A, розмірність області значень яких не перевищує M, називається лінійним поперечником множини W у просторі X.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p,\ \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega\big(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j\big)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що* $M_n \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливе співвідношення*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Аналогічне твердження справедливе і для тригонометричного поперечника $d^{\top}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1})$.

[1] Sun Yongsheng, Wang Heping. *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness.* // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.

[2] Бари Н. К., Стечкин С. Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.* // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С.483 – 522.

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк
e-mail: hembarskyi@gmail.com

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк
e-mail: gembarskaya72@gmail.com

Оцінка похибки майже коопуклого наближення тригонометричними поліномами

Герман Дзюбенко

Якщо неперервна на дійсній осі 2π-періодична функція f зміннює свою опуклість у $2s$, $s \in \mathbb{N}$, точках перегину $y_i : -\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < ... < y_1 < \pi$, а для решти $i \in \mathbb{Z}$, y_i визначені періодично, то в [1] для кожного натурального $n \ge N_{y_i}$ знайдено тригонометричний поліном P_n порядку cn такий, що P_n змінює свою опуклість так само, як f, скрізь, за винятком, можливо, маленіких околів $y_i :\ (y_i - \pi/n, y_i + \pi/n)$ і

$$\|f - P_n\| \le c(s)\,\omega_4(f, \pi/n), \tag{1}$$

де N_{y_i} – стала, що залежить лише від $\min_{i=1,...,2s}\{y_i - y_{i+1}\}$, c і $c(s)$ – сталі, що залежать лише від s, $\omega_4(f,\cdot)$ – 4-й модуль гладкості функції f і $\|\cdot\|$ – рівномірна норма.

Для "чисто" коопуклого наближення оцінка (1) справджується лише для ω_3 і хибна для ω_4 і вище.

[1] Дзюбенко Г. А., *Майже коопукле наближення неперервних періодичних функцій,* Укр. Мат. Журн., **71** (2019), №3, 353-367.

Інститут математики НАН України
dzyuben@gmail.com

Оцінки похибок наближень для деяких функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними

Роман Іванович Дмитришин

Нехай N — фіксоване натуральне число,

$$\mathcal{I}_k = \{i(k):\ i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k),\ 1 \le i_p \le i_{p-1},\ 1 \le p \le k,\ i_0 = N\},\ k \ge 1,$$

— множини мультиіндексів і $(z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Встановлено нові оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)} z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{i(3)} z_{i_3}}{1} + \cdots,$$

де $c_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, і його особливого випадку багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними

$$\frac{s_0}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)}(1 - g_{i(1)}) z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{g_{i(3)}(1 - g_{i(2)}) z_{i_3}}{1} + \cdots,$$

де $s_0 > 0$, $0 < g_{i(k)} < 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k \ge 1$, в деяких обмежених областях із $\mathbb{C}^N$.

Зазначимо, що ці функціональні гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними є ефективним інструментом для наближення аналітичних функцій багатьох змінних, заданих формальними кратними степеневими рядами.

ДВНЗ "Прикарпатський національний
університет імені Василя Стефаника"
e-mail: dmytryshynr@hotmail.com

Умови знакосталості тригонометричних рядів

Петро Васильович Задерей, Микола Вікторович Гаєвський та Микола Анатолійович Веремій

Будемо говорити, що послідовність $\{\gamma_n\}$ задовольняє умови Боаса-Теляковського, якщо:

1) $\lim\limits_{|k|\to\infty} \gamma_k = 0$,

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\triangle\gamma_k| < \infty$,

3) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left| \sum\limits_{m=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\gamma_{k-m} - \triangle\gamma_{k+m}}{m} \right| < \infty$, де $\triangle\gamma_k = \gamma_k - \gamma_{k+1}$.

Теорема. *Нехай $\{\gamma_n\}$ — послідовність комплексних чисел, що задовольняє умови Боаса-Теляковського, $\gamma_n = \alpha_n + i\beta_n$. Для того, щоб*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \geq 0$$

необхідно і достатньо щоб

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k \gamma_k = o(n),\ n \to \infty$$

та

$$\sup_{a_k} \left| 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k \right| \leq 2,$$

де $f(z) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, $|z| < 1$ є аналітичною обмеженою функція, тобто $\sup\limits_{|z|<1} |f(z)| \ \leq 1.$

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
e-mail: zadereypv@ukr.net

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
e-mail: mgaevskij@gmail.com

Про відносні коливання функції

Анатолій Олександрович Кореновський

Середнім інтегральним коливанням невід'ємної на кубі $Q \subset \mathbb{R}^d$ функції $f \in L(Q)$ називають величину $\Omega(f; Q) = |Q|^{-1} \int_Q |f(x) - f_Q| \, dx$, а відносним коливанням назвемо $\Omega(f; Q)/f_Q$, де $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x) \, dx$ (якщо $f_Q = 0$, то вважаємо, що $\Omega(f; Q)/f_Q = 2$). Зафіксуємо куб $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$. Для функції $f \in L(Q_0)$ $(f \geq 0)$ поведінку її відносних коливань по малим кубам характеризує функція

$$\nu(f; \sigma) = \sup_{|Q| \leq \sigma} \frac{\Omega(f; Q)}{f_Q} \quad (0 < \sigma \leq |\, Q_0 \,|) \,,$$

де точна верхня межа береться по всім кубам $Q \subset Q_0$, лебегова міра яких $|Q| \leq \sigma$. Властивості функції $\nu(f; \sigma)$ схожі на властивості звичайного модуля неперервності.

Основний результат даного повідомлення міститься у наступній теоремі (див. [1]).

Теорема. *Існують такі додатні сталі c_1 і c_2, які залежать лише від вимірності d, що для будь-якої невід'ємної функції $f \in L(Q_0)$ $\left(\nu(f; |Q_0|) \leq \left(\mathrm{e}\left(1 + 2^d\right)\right)^{-1}\right)$ і для будь-якої вимірної підмножини $E \subset Q_0$ $\left(|E| \leq 2^{-d} |Q_0|\right)$ справедлива нерівність*

$$\left| \ln \frac{f_E}{f_{Q_0}} \right| \leq c_1 + c_2 \int\limits_{2^d |E|}^{|Q_0|} \nu(f; \tau) \frac{d\tau}{\tau} \,. \tag{1}$$

Ця теорема дає змогу отримувати вкладення класів типу Гурова – Решетняка у класи Герінга та Макенхаупта і подібні до них (див. [2]). Крім того, за умови $\int_0^{|Q_0|} \nu(f; \tau) \, d\tau/\tau < +\infty$ отримуємо, що функція f істотно обмежена і відокремлена від нуля.

Раніше нерівність (1) була відомою лише у випадку, коли в її лівій частині відсутній знак модуля (див. [2]).

Доведення теореми засноване на оцінках рівновимірних перестановок функцій, які, на наш погляд, складають і самостійний інтерес.

[1] Кореновский А. А. Оценка скорости убывания (исчезновения) функции в терминах относительных колебаний. Укр. мат. журн., 2019, 71, 2, 246 – 260.

[2] Korenovskii A. Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions. Lect. Notes Unione Mat. Ital., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007, 4, 189 p.

Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
e-mail: anakor1958@gmail.com

Спіралі у творах сучасних митців

Маслюченко В.К. та Маслюченко Г.-Ж.Я.

Математичні ідеї здавна проникли у твори мистецтва, зокрема, в картини художників. Та коли, наприклад, у «Меланхолії» Альбрехта Дюрера многогранник чи магічний квадрат як репрезентатори математики займають лише частину простору, то вже засновник супрематизму, видатний український художник польського походження Казимир Малевич, автор знаменитого «Чорного квадрата», вважав за необхідне весь простір картин заповнювати трикутниками, квадратами, кругами, прямокутниками та іншими геометричними фігурами. XX століття принесло нові зразки впливів математики на мистецтво, згадаймо хоча б дивовижний світ картин М. Ешера чи фантастичні краєвиди творів А. Фоменка, що ілюструють нетривіальні топологічні ідеї та побудови. А фрактали, що їх увів у математику Б. Мандельброт, зустрічаються і в мистецтві, зокрема у творах художників-абстракіоністів (Ф. Купка, В. Кандинський та інші.) Зв'язкам математики і мистецтва присвячено багато сучасних досліджень, зокрема, див. праці [1-5]. Автори присвятили цій темі вісім доповідей на математичних конференціях від червня минулого року, що з цікавістю були сприйняті математичною громадою.

В цій доповіді, крім згаданих вище питань, ми торкнемося теми спіралі в мистецтві. Є дуже багато різновидностей спіралей, алгебраїчних (гіперболічні, параболічні, спіралі Архімеда, Ґалілея, Ферма), псевдоспіралей (логарифмічна, спіраль Карню) та інших, про які можна отримати інформацію з [6] або з [7] чи з вікіпедії. Спіралі, подібні до спіралі Архімеда, є на картині відомого чернівецького художника Ореста Криворучка, майстра екслібрису, яку він назвав «Життя - мов зебра», датованій 2015-м роком. Дві спіралі розбивають площину на дві зв'язних частини, одна з яких зафарбована у помаранчевий колір, друга ж розбита на чорні і білі частини спіралевидними кривими, і має зеброподібний вигляд. Це ніби вервечка днів і ночей, радості і печалі, що нас супроводжує в житті в гарячому оточенні помаранчевої любові. Є у О. Криворучка й інші картини з супрематичної тематики, наприклад картина «Діалектика», 2013. Це — квадрат, розбитий на два горизонтальні рівні прямокутники, чорний і білий, і облямований двадцятьма квадратиками, червоними і зеленими, які вкупі утворюють новий більший квадрат. Біле і чорне символізують єдність протилежностей, день і ніч, Янь та Інь, і все це оповито червоно-зеленим серпанком любові і життя. Спіралі зустрічаються і у молодого українського художника Богдана Локатира та оригінального італійського митця Маріо Мерца, про яких детальніше мова йтиме у доповіді.

Література

1. Волошинов А.В. Математика и искусство — М.: Просвещение, 2000. — 400 с.

2. Шлык В.А. Фракталы в абстрактном искусстве и дизайне // Известия Челябинского центра. — 2004. — Вып. 1(22). — С.231-244.

3. Маслюченко В.К., Маслюченко Г.-Ж.Я. Математика в мистецтві: історія і сучасність // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2018. — 1(45). — С.230-234.

4. Маслюченко В.К., Маслюченко Г.-Ж.Я. Про впливи математики на мистецтво // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2018. — **86**. — С. 39-44.

5. Fomenko A.T.Mathematikal impressions. American Math. Society, USA, 1990.

6. Савельев А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. — М.: Физматлит, 1960. — 293 с.

7. Математическая энциклопедия. — М.: «Сов. энц.», т.**5**. — 1985. — 1246 к. (к. 141-142.)

Чернівецький національний університет
e-mail: v.maslyuchenko@gmail.com

Чернівецький національний університет
e-mail: galarta@ukr.net

Пари Гана та їх застосування

Маслюченко В.К. та Мельник В.С.

Пара Гана (g, h) на топологічному просторі X складається з двох напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і $h \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X. Якщо $g(x) < h(x)$ на X, то пара Гана (g, h) називається строгою. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається проміжною чи строго проміжною для пари Гана (g, h) на X, якщо $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X чи $g(x) < f(x) < h(x)$ при $g(x) < h(x)$ і $g(x) = f(x) = h(x)$ при $f(x) = h(x)$ відповідно. Ця термінологія, що введена авторами, пояснюється результатом, встановленим відомим австрійським математиком Гансом Ганом (1879-1934), професором Чернівецького (1909-1916), Боннського (1916-1921) та Віденського (1921-1934) університетів у 1917 році [1,2]: кожна пара Гана (g, h) на метричному просторі X має неперервну проміжну функцію f.

Ця теорема Гана дістала значний розвиток у працях математиків XX століття і дослідження у цьому напрямку продовжуються і в наш час [3]. Цікаво, що ця тематика виявилася тісно пов'язаною з теорією наближень.

В першій частині оглядової доповіді буде висвітлено розвиток теореми Гана у працях таких математиків: Ж. Д'єдонне, Ґ. Тонґ, М. Катетов, К. Даукер, Е. Майкл, К. Ґуд, Я. Старс, К. Ямазакі, а також новітні дослідження авторів, що стосуються зокрема проміжних диференційовних функцій [4].

Друга частина доповіді буде присвячена застосуванню пар Гана у теорії наближень [5,6], зокрема будуть розглянуті функціональні обернені задачі для сукупно і нарізно неперервних функцій [7].

1. Маслюченко В.К. Знайомство з Гансом Ганом — Чернівці: Видавництво ЧНУ, 2014. — 108 с.

2. Hahn H. Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien.Math.-naturwiss.Kl.Abt.IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

3. Мельник В.С. Рівномірні відстані до різних функціональних класів та розвиток теореми Гана про проміжні функції // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Чернівці. — 2018. — 111с.

4. Маслюченко В.К., Мельник В.С. Побудова проміжних диференційовних функцій // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 5. — С. 672-681.

5. Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України — Київ: Інститут математики НАН України, 2014. — №1 — Т.XI. — С.158-166. http://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/issue/view/3

6. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Мельник В.С. Пари Гана і нульова обернена задача // Мат. студії. — 2017. — **48**, №1. — С. 74-81.

7. Власюк Г., Маслюченко В. Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2007. — Вип. 336-337. — С. 52-59.

Чернівецький національний університет
e-mail: maslyuchenko.v@gmail.com

Чернівецький національний університет
e-mail: windchange7@gmail.com

Застосування ланцюгових дробів до наближення функцій комплексної змінної

Михайло Михайлович Пагіря

Нехай функція f визначена на компакті $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}$. Функцію можна наближати многочленом, узагальненим многочленом, сплайном, раціональною функцією, апроксимантою Паде, ланцюговим дробом тощо.

Розглянуто способи наближення функцій комплексної змінної деякими типами ланцюгових дробів

$$b_0(z) + \frac{a_1(z)}{b_1(z)+} \frac{a_2(z)}{b_2(z)+} \cdots + \frac{a_k(z)}{b_k(z)+} \cdots = b_0(z) + \mathop{\mathbf{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}.$$

Поряд із оберненими похідними Тіле ${}^{(n)}f(z), n \in \mathbb{N}$, функції f введено до розгляду обернені похідні 2–го типу ${}^{\{n\}}f(z)$, обернені g–похідні ${}^{(n)}f_g(z)$ та обернені g–похідні 2–го типу ${}^{\{n\}}f_g(z)$. Обґрунтовано властивості запропонованих обернених похідних, формули знаходження обернених похідних суми, різниці, добутку та частки двох функцій для кожного типу обернених похідних, рекурентні співвідношення для знаходження значення оберненої похідної.

Відомо, що формула Тіле є аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів. Доведено формули типу Тіле, які ґрунтуються на розглянутих узагальненнях обернених похідних. Доведено теореми збіжності та рівномірною збіжності розвинень функції в ланцюгові дроби, які отримано за допомогою формул типу Тіле. Розглянуто приклади.

Мукачівський національний
університет
e-mail: pahirya@gmail.com

Поточкові оцінки найкращих односторонніх наближень класів W_∞^r при 0<r<1

Анатолій Миколайович Пасько та Валентина Дмитрівна Стефура

Нехай r – неціле додатне число, W_∞^r – клас функцій $f_r(x)$, визначених на відрізку [–1; 1] рівністю

$$f_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} f(t)dt + P(x),$$

де $\Gamma(r)$ – гама-функція Ейлера, функція $f(t)$ – вимірна та майже скрізь $|f(t)| \le 1$, $P(x)$ – алгебраїчний поліном степеня не вищого за $[r-1]$ ([a] – ціла частина a). В.П. Моторний встановив асимптотично точні оцінки найкращих наближень класів W_∞^r при нецілому $r > 0$ алгебраїчними поліномами з урахуванням положення точки на відрізку. А.М. Пасько одержав аналоги цих оцінок для односторонніх наближень при нецілому $r > 1$.

Нашим головним результатом є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $0 < r < 1$. Для будь-якої функції $f \in W_\infty^r$ існує послідовність алгебраїчних поліномів $P_{n,r}^{+}(x)$ степеня не вищого за n, таких що для всіх $x \in [-1,1]$ справджується нерівність*

$$0 \le P_{n,r}^{+}(x) - f(x) \le \frac{2K_r}{n^r} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$

$$+C_r \left(\frac{\ln n}{n^{r+1}} \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2} \right)^{r-1} + \frac{\ln n}{n^{2r}} \right).$$

Тут

$$K_r = \frac{4 \sin \frac{r\pi}{2}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{r+1}},$$

а C_r - стала, значення якої залежить лише від r.

Дніпровський національний університет
e-mail: pasko08@meta.ua

Дніпровський національний університет

Про інтерполяцію операторів, які комутовані з розтягуванням, в граничних випадках

Борис Гнатович Пелешенко

Нехай Φ – об'єднання функції $\varphi(t) = \mathrm{sign} t$ і множини додатних, зростаючих вгнутих на $[0,\infty)$ функцій φ, які для яких $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t) = \varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$ і $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$, коли $t \to +0$, $t \to \infty$. Позначимо $S(\mathbb{R}^n)$ простір дійсних вимірних за Лебегом функцій на $\mathbb{R}^n$ і $f^*(t)$ – не зростаючу перестановку модуля функції $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Нехай $a \in (0,\infty]$ і $\varphi \in \Phi$. Простір Лоренця $\Lambda_{\varphi,a}(\mathbb{R}^n)$ складається з функцій $f \in S(\mathbb{R}^n)$, для яких скінчена квазінорма $||f||_{\Lambda_{\varphi,a}} = \left\{\int\limits_0^\infty (f^*(t))^a d\varphi(t)\right\}^{\frac{1}{a}}$ з фундаментальною функцією $\varphi(t)^{\frac{1}{a}}$, якщо $\varphi(t) \neq \mathrm{sign} t$, $0 < a < \infty$ або квазінорма $||f||_{\Lambda_{\varphi,\infty}} = \sup\limits_{0<t<\infty} f^*(t)\varphi(t)$, якщо $a = \infty$. У випадку, коли $\varphi(t) = t$, $0 < a < \infty$, то $\Lambda_{\varphi,a}(\mathbb{R}^n) = L^a(\mathbb{R}^n)$, якщо $\varphi(t) = \mathrm{sign} t$, то $\Lambda_{\varphi,\infty}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Для зростаючої функції φ_0/φ_1 на $(0,\infty)$ простір $\Lambda_{\varphi_0}(\mathbb{R}^n) + \Lambda_{\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$, коли $\varphi_1(t) \neq \mathrm{sign} t$, складається з $f \in S(\mathbb{R}^n)$, для яких $\int\limits_0^1 f^*(t)d\varphi_0(t)dt + \int\limits_1^\infty f^*(t)d\varphi_1(t) < \infty$. Якщо $\varphi_1(t) = \mathrm{sign} t$ і $\sup\limits_{0<u<1} M_{\varphi_0}(u)(1-\ln u) \leq 1$, то $\Lambda_{\varphi_0}(\mathbb{R}^n) + L^{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$ – простір функцій $f \in S(\mathbb{R}^n)$, що $\int\limits_0^1 f^*(t)d\varphi_0(t)dt + \int\limits_1^\infty f^*(t)t^{-1}dt < \infty$.

Theorem 1. *Нехай* $Tf(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy$, *де* $\int\limits_{S^{n-1}} \Omega(t)d\sigma = 0$, *де* $d\sigma$ *індукована евклідова міра. Якщо* $\sup\limits_{|t-t'|<\delta} |\Omega(t) - \Omega(t')| = \delta$ *для* $|t| = |t'| = 1$, *то* $\int\limits_0^1 \frac{\omega(\delta)d\delta}{\delta} < \infty$. *В випадку* $0 < a \leq 1$, $d\psi(t) = t^{a-1}\frac{dt}{h(t)}$, $\varphi(t) = \left\{\int\limits_0^t \left[\ln\frac{t}{\tau}\right]^a \tau^{a-1}\frac{d\tau}{h(\tau)} + t^a \int\limits_t^\infty \frac{d\tau}{\tau h(\tau)}\right\}$, *де* $h \in S(0,\infty)$ *повільно змінна функція в нулі та на нескіченості, і* $\sup\limits_{0<t<\infty} \frac{\int\limits_0^t \left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^a \tau^a \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} + t^a \int\limits_t^\infty \frac{d\tau}{\tau h(\tau)}}{\varphi(t)} < \infty$. *Існує константа* $C_1 > 0$, *що для всіх функцій* $f(x) \in \Lambda_{\varphi,a}(\mathbb{R}^n) + L^{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$ *виконується нерівність* $\int\limits_0^\infty \{[Tf]^*(t)t\}^a \frac{dt}{th(t)} \leq C_1 \int\limits_0^\infty (f^*(t))^a d\varphi(t)$.

Дніпровський державний
аграрно-економічний університет
e-mail: dsaupelesh@ukr.net

Оцінка знизу відхилення сум Фейєра на класах інтегралів Пуассона

Ольга Геннадіївна Ровенська

Нехай $C_{2\pi}$ — простір неперервних 2π– періодичних функцій $f(x)$, $\|f\|_C = \max|f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ та $C^q_{\beta,\infty}$ — підмножина функцій $f \in C_{2\pi}$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt, \quad P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad q \in (0;1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

де $P^q_\beta(t)$ — ядро Пуассона, а функція $\varphi(x)$ майже скрізь задовольняє умову $|\varphi(x)| \le 1$. Множина $C^q_{\beta,\infty}$ містить 2π-періодичні функції, що дозволяють аналітичне подовження до функцій $F(z) = F(x+iy)$ у відповідну смугу $|\Im z| < \ln\frac{1}{q}$, і називаються інтегралами Пуассона.

Для заданої функції $f \in L$ суми Фейєра визначаються співвідношенням

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x),$$

де $S_n(f;x)$ — часткові суми ряду Фур'є функції f.

Для величини

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};\sigma_n\right) = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - \sigma_n(f;x)\|$$

у частинних випадках $\beta = 0$, $\beta = 1$ встановлено асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}\left(C^q_{0,\infty};\sigma_n\right) = \frac{4q}{\pi n(1+q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n}, \quad q \in (0; 2-\sqrt{3}),$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma_n\right) = \frac{4q}{\pi n(1-q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}, \quad q \in (0;1),$$

де величина $O(1)$ рівномірно обмежена щодо n, q.

З цього випливає очевидна оцінка зверху величини $\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};\sigma_n\right)$. Основним результатом роботи є одержання оцінки знизу точної верхньої межі відхилень сум Фейєра на класах інтегралів Пуассона. Має місце теорема.

Теорема 1. *Нехай $q \in (0;1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \to \infty$ виконується асимптотична нерівність*

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};\sigma_n\right) \ge \frac{4q\cos^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n(1+q^2)} + \frac{4q\sin^3\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n(1-q^2)} + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3},$$

де величина $O(1)$ рівномірно обмежена щодо n, q.

Література

1. Novikov O.O., Rovenska O.G. Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums / Matematychni Studii. — 2017. — **47**, 2. — P. 196–201.

Донбаська державна
машинобудівна академія
e-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com

Колмогоровські поперечники і ентропійні числа класів періодичних функцій багатьох змінних

Анатолій Сергійович Романюк

В доповіді будуть обговорюватися питання, пов'язані з колмогоровськими поперечниками і ентропійними числами класів періодичних функцій багатьох змінних $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ Нікольського–Бєсова у просторі $B_{\infty,1}$. Зауважимо, що норма простору $B_{\infty,1}$ є більш сильною ніж L_∞–норма.

Нехай X — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$ і A—компактна множина в X. Для $y \in X$ та $R > 0$ позначимо $B_X(y,R) := \{x \in X : \|x-y\|_X \le R\}$, тобто $B_X(y,R)$— куля в X з центром у точці y і радіусом R. Для $k \in \mathbb{N}$ величина

$$\epsilon_k(A,X) := \inf\left\{\varepsilon > 0 : \exists\, y^1,\ldots,y^{2^k} \in X \mid A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_X(y^j,\varepsilon)\right\}$$

називається *ентропійним числом* множини A у просторі X.

Нехай Y — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_Y$, $\mathcal{L}_M(Y)$ — сукупність підпросторів в Y, розмірності яких не перевищують M, і W — центрально–симетрична множина в Y. Величина

$$d_M(W,Y) := \inf_{L_M \in \mathcal{L}_M(Y)} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_M} \|w-u\|_Y$$

називається *колмогоровським M–поперечником* множини W у просторі Y.

Вважатимемо, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_d)$, який входить в означення класів, впорядковані так, що $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$.

Теорема 1. *Нехай $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. Тоді при $d \ge 1$ справедливі співвідношення*

$$\epsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 2. *Нехай $2 \le p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$. Тоді при $d \ge 1$ справедливі співвідношення*

$$\epsilon_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1}) \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

Інститут математики
НАН України, Київ
e-mail: romanyuk@imath.kiev.ua

Кратний базис Хаара в задачах лінійної та нелінійної апроксимації функцій

Віктор Сергійович Романюк

У доповіді представлені вибрані результати автора, якими демонструються можливості одного з кратних базисів Хаара $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=0}^{\infty}$ функцій з d змінними в задачах лінійної та нелінійної апроксимації деяких класів гладких функцій у просторах Лебега. Базис H^d є результатом належного впорядкування системи $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_+^d}$ функцій, визначених на одиничному кубі $\mathbb{I}^d := [0,1]^d$, $d \geqslant 2$; ця система побудована на основі одновимірного базису Хаара і системи характеристичних функцій двійкового розбиття відрізка $[0,1]$ (щодо базисності системи $\mathbb{H}_0^d$ доведено відповідне твердження).

Дослідження стосуються, зокрема, порядкових оцінок величин найкращого $m-$членного наближення за системою H^d (у просторах $L_q(\mathbb{I}^d)$ зі стандартною нормою $\|\cdot\|_q$) одиничних куль $SB_{p,\theta}^r$ в ізотропних просторах Бєсова $B_{p,\theta}^r \subset L_p(\mathbb{I}^d)$. Йдеться про величини

$$\sigma_m(SB_{p,\theta}^r; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d)) := \sup_{f\in SB_{p,\theta}^r} \inf_{\substack{\Lambda\subset Z_+,\\ \sharp\Lambda=m}} \inf_{c_\alpha\in\mathbb{R}} \left\| f - \sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha h_\alpha \right\|_q.$$

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p,\theta < \infty$, $1 < q < \infty$ *і* $\max\left\{0, \frac{d}{p} - \frac{d}{q}\right\} < r < \frac{1}{p}$. *Тоді*

$$\sigma_m(SB_{p,\theta}^r; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d)) \asymp m^{-\frac{r}{d}}.$$

Зазначимо, теоремою 1 охоплений також випадок $d = 1$, і оптимальними в сенсі одержання порядкових значень для величин $\sigma_m(SB_{p,\theta}^r; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}^d))$ в теоремі є, так звані, q-гріді апроксиманти вигляду

$$G_m^q(f;\boldsymbol{x}) := \sum_{\alpha\in\Lambda_f^{\max}} (f,h_\alpha)h_\alpha(\boldsymbol{x}), \quad m = 1,2,...,$$

де $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_d) \in \mathbb{I}^d$, (f,h_α), $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ — коефіцієнти Фур'є функції f за системою H^d, а множина $\Lambda_f^{\max}$ визначається, із залученням функції $f \in L_q(\mathbb{I}^d)$, з умов $\sharp\Lambda_f^{\max} = m$ і

$$\min\{\|(f,h_\alpha)h_\alpha\|_q,\ \alpha \in \Lambda_f^{\max}\} \ge \max\{\|(f,h_\alpha)h_\alpha\|_q,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \Lambda_f^{\max}\}.$$

Інститут математики
НАН України, Київ
e-mail: vsromanyuk@imath.kiev.ua

Точні оцінки похибки в динамічних системах із дискретним часом

$\boxed{\text{Валентин Іванович Рубан}}$ і Олександр Олексійович Руденко

Динамічна система – об'єкт, що складається з двох елементів. Перший із них – множина X, яку надалі називатимемо *фазовим простором*; точки фазового простору – це *стани системи*. Другим елементом динамічної системи є однопараметрична група відображень множини X у себе (перетворень множини X), тобто сукупність відображень $f^t : X \to X$, де $t \in I \subset R$, причому, по-перше, $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ для всіх t, $s \in I$, по-друге, $0 \in I$ і f^0 – тотожне відображення X у себе.

Якщо I є множина всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ або невід'ємних дійсних чисел $\mathbb{R}^+$, маємо *динамічну систему з неперервним часом.* Якщо I – множина всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$ або невід'ємних цілих чисел $\mathbb{Z}^+$, маємо *динамічну систему з дискретним часом.*

Вважатимемо, що множиною значень часу в дискретній динамічній системі є множина $\mathbb{Z}^+$. Зрозуміло, що для $t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$, $f^t = f^1 \circ f^1 \circ \ldots \circ f^1$, де суперпозицію застосовано $(t-1)$ раз.

Точку x_0, для якої $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$ – попарно різні елементи і $f^m(x_0) = x_0$, називають *періодичною точкою періоду m*. Множину цих елементів будемо називати циклом порядку m.

В роботі [1] досліджувалась часова складність динамічних систем з дискретним часом.

В даній роботі розглянуто динамічні системи з комп'ютерними дійсними 32-бітними числами формату IEEE 754. Їх відносно мала кількість дозволяє розробляти алгоритми точного обчислення важливих параметрів ітераційних процесів, а саме порядки всіх можливих циклів, діаметрів циклів як множин, залежність діаметрів циклів від початкової умови. Обчислюються також максимальна точність системи в залежності від початкової умови, мінімальна та максімальна кількість ітерацій, які потрібні для досягнення необхідної точності.

1. В. І. Рубан. Часова складність алгоритмів повного дослідження динамічних систем із дискретним часом, визначених на скінченній множині станів / В. І. Рубан, О. О. Руденко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Математика. – 2016. – Вип. 21. – С. 95-98.

Dniprovski National University
e-mail: dnu.maitf@gmail.com

Наближення сумами Фур'є класів диференційовних функцій високої гладкості в рівномірній метриці

А.С. Сердюк та І.В. Соколенко

Нехай C і L_p, $1 \le p \le \infty$, — простори 2π-періодичних дійснозначних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$.

Через $W^r_{\beta,p}, r > 1, \beta \in \mathbb{R}, 1 \le p \le \infty$, позначимо класи Вейля-Надя, тобто множини всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \;\; a_0 \in \mathbb{R}, \;\; \|\varphi\|_p \le 1, \;\; \varphi \perp 1.$$

Досліджується задача про знаходження сильної асимптотики величин

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = \sup_{f \in W^r_{\beta,p}} \|f - S_{n-1}(f)\|_C, \tag{1}$$

де $S_{n-1}(f)$ — частинна сума Фур'є функції f порядку $n-1$, при $n+1 \le r \le n^2$.

Теорема 1. *Нехай $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при $n+1 \le r \le n^2$ рівномірно відносно всіх розлядуваних параметрів*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = \begin{cases} n^{-r}\Big(\frac{1}{\pi(1-e^{-r/n})} + O\big(rn^{-2}e^{-r/n}\big)\Big), & p = 1, \\ n^{-r}\Big(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}F^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{p'}{2}, \frac{p'}{2}; 1; e^{-2r/n}\Big) + O\big(rn^{-2}e^{-r/n}\big)\Big), & 1 < p \le \infty, \end{cases}$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $F(a,b;c;z)$ — гіпергеометрична функція Гаусса:

$$F(a,b;c;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}, \quad (x)_k := x(x+1)(x+2)...(x+k-1).$$

При $p = \infty$ теорема 1 випливає з роботи С.Б. Стєчкіна [1].

Одержана теорема доповнює результати авторів [2], де, зокрема, для довільних $1 \le p \le \infty$ було встановлено сильну асимптотику величин (1) у випадку $r \ge n^2$.

[1] Стечкин С.Б. *Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций* // Приближение функций полиномами и сплайнами, Сборник статей, Тр. МИАН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.

[2] Serdyuk A.S., Sokolenko I.V. *Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness* // arXiv:1906.02531.

Інститут математики
НАН України
e-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

Інститут математики
НАН України
e-mail: sokol@imath.kiev.ua

Найкращі наближення функцій багатьох змінних у просторах зі змішаною інтегральною метрикою

Марина Євгенівна Ткаченко і Вікторія Миколаївна Трактинська

Г.С. Смирнов вивчав питання характеризації елемента найкращого наближення функцій двох змінних у просторах зі змішаною інтегральною метрикою. Ми узагальнили його результати на випадок несиметричних наближень функцій багатьох змінних.

Для вектора $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n), 1 \le p_i < \infty, 1 \le i \le n$ через $L_{\bar{p}} = L_{\bar{p}}(K)$ будемо позначати простір сумовних на K функцій n змінних $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ з несиметричною нормою

$$\|f\|_{\bar{p};\alpha,\beta} = \left[\int\limits_{I_n} \cdots \left[\int\limits_{I_2} \left[\int\limits_{I_1} |f(x)|^{p_1}_{\alpha,\beta} dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2\right]^{\frac{p_3}{p_2}} \cdots dx_n\right]^{\frac{1}{p_n}}.$$

Покладемо

$$|f|_{p_k,\ldots,p_i;\alpha,\beta} = \left[\int\limits_{I_i} \ldots \left[\int\limits_{I_{k+1}} \left[\int\limits_{I_k} |f(x)|^{p_k}_{\alpha,\beta} dx_k\right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}} dx_{k+1}\right]^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}} \ldots dx_i\right]^{\frac{1}{p_i}},$$

де $1 \le k < i,\ 1 < i \le n$.

Теорема. *Нехай* $1 < p_i < \infty$, $1 \le i \le n$, *а* $H_m = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *для деякої системи лінійно незалежних функцій* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset L_{\bar{p}}$*.Для того, щоб поліном* $P^*_m \in H_m$ *був елементом найкращого* (α, β)*-наближення у просторі* $L_{\bar{p}}(K)$ *для функції* $f \notin H_m$ *необхідно і достатньо виконання співвідношення*

$$\int\limits_K P_m(x) g(x) dx = 0, \quad \forall P_m(x) \in H_m,$$

де

$$g(x) = \begin{cases} |f - P^*_m|^{p_1 - 1}_{\alpha,\beta} |f - P^*_m|^{p_2 - p_1}_{p_1;\alpha,\beta} \cdots |f - P^*_m|^{p_n - p_{n-1}}_{p_1,\ldots,p_{n-1};\alpha,\beta} \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(f - P^*_m), \\ \hfill |f - P^*_m|_{p_1,\ldots,p_n} \ne 0, \\ 0,\ |f - P^*_m|_{p_1,\ldots,p_n} = 0. \end{cases}$$

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
e-mail: mtkachenko2009@ukr.net

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
e-mail: traktynskaviktoriia@gmail.com

Характеризація підпросторів єдиності елемента найкращого (α,β)-наближення з вагою

Марина Євгенівна Ткаченко та Віталій Олегович Трактинський

Розглядається простір $C(Q,X)$ неперервних на метричному компакті Q функцій зі значеннями у КВ-просторі X з нормою $\|\cdot\|_X$. Через Θ позначимо множину всіх μ-вимірних дійсних функцій θ на Q таких, що $0 < inf\{\theta(x) : x \in Q\} \leq sup\{\theta(x) : x \in Q\} < \infty$, де μ – невід'ємна, скінченна, безатомна міра, додатна на будь-якій непорожній відкритій підмножині Q.

У просторі $C(Q,X)$ уведемо несиметричну вагову L_1-норму $||f||_{1;\theta;\alpha,\beta} = \int\limits_Q \theta(x)||f(x)||_{X;\alpha,\beta}d\mu(x)$, де $||f(x)||_{X;\alpha,\beta} = ||\alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x)||_X$, $f_\pm(x) = (\pm f(x)) \vee 0$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $\theta \in \Theta$.

Позначимо $Z_f = \{x \in Q : f(x) = 0\}$, $N_f = Q \backslash Z_f$.

Для $f, g \in C(Q,X)$ покладемо

$$\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f(x), g(x))_X = \lim_{t \to -0} \frac{||(f + tg)(x)||_{X;\alpha,\beta} - ||f(x)||_{X;\alpha,\beta}}{t}.$$

Нехай H – скінченномірний підпростір $C(Q,X)$,

$$H' = \{h \in C(Q,X) : \quad \exists g_h \in H \quad \forall x \in Q \quad h(x) = \pm g_h(x)\}.$$

Скінченномірний підпростір $H \subset C(Q,X)$ називається А-підпростором, якщо $\forall h \in H' \setminus \{0\}$ знайдеться функція $g \in H$ така, що

(i) $g(x) = 0$ майже всюди на Z_h;

(ii) $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x), g(x))_X \geq 0$ майже всюди на N_h, та ця нерівність є строгою на підмножині множини N_h додатної міри.

Клас H' і поняття А-простору ввів Ганс Штраус для $Q = [a,b]$, $X = \mathbb{R}$, $\alpha = \beta = 1$, Андреас Кроо узагальнив його результат на випадок, коли Q є компактом в $\mathbb{R}^n$, а X – банаховим простором. Наступна теорема є розповсюдженням результатів Ганса Штрауса та Андреаса Кроо на випадок несиметричного наближення функцій простору $C(Q,X)$.

Теорема 1. *Нехай X - строго нормований гладкий КВ-простір зі строго монотонною нормою, H – скінченномірний підпростір $C(Q,X)$. Тоді для того, щоб кожна функція $f \in C(Q,X)$ мала єдиний елемент найкращого (α,β)-наближення з вагою $\theta \in \Theta$ елементами підпростору H для будь-якої ваги $\theta \in \Theta$, необхідно і достатньо, щоб H був А-підпростором.*

Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
e-mail: mtkachenko2009@ukr.net

Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
e-mail: traktynskyivitalii@gmail.com

Застосування узагальнених моментних зображень до побудови багатовимірних багатоточкових апроксимацій типу Паде

Л.О.Чернецька

Застосовано узагальнені моментні зображення до вивчення багатовимірних багатоточкових апроксимацій типу Паде.

Сформулюємо означення двовимірної двоточкової апроксиманти типу Паде.

Нехай функція двох змінних f є аналітичною в області $D \subset \mathbb{C}^2$, що містить точки $(z_0, w_0) = (0,0)$ та (z_1, w_1) і розвивається в околі цих точок в степеневі ряди

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m$$

та

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s^{(1)}_{k,m} (z-z_1)^k (w-w_1)^m.$$

Будемо називати двовимірною двоточковою апроксимантою типу Паде функції f раціональну функцію

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f \left(\begin{array}{c} (0,0), (z_1, w_1) \\ \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 \end{array} ; z, w \right) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathcal{N}} p_{k,m} z^k w^m, Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathcal{D}} q_{k,m} z^k w^m,$$

таку, що мають місце розвинення

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)} = \begin{cases} \sum\limits_{(k,m)\in\mathbb{Z}^2_+ \setminus \mathcal{E}_0} e_{k,m} z^k w^m & \text{при } (z,w) \to (0,0), \\ \sum\limits_{(k,m)\in\mathbb{Z}^2_+ \setminus \mathcal{E}_1} e^{(1)}_{k,m} (z-z_1)^k (w-w_1)^m & \text{при } (z,w) \to (z_1,w_1). \end{cases}$$

The Institute of Mathematics of NASU

e-mail: liliia.cher.liliia@gmail.com

Апроксимативні характеристики функцій з класів Нікольського-Бєсова $\boldsymbol{S^r_{1,\theta}B}(\mathbb{R}^d)$

Сергій Якович Янченко

У доповіді йтиметься про точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ [1] за допомогою цілих функцій експоненціального типу з певними обмеженнями щодо їхнього “спектру”.

Нехай $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ визначених на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, зі стандартною скінченною нормою.

Далі, нехай $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^d_+$ — деяка скінченна множина, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{L}) = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, де $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+$ і $Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} = \big\{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_d) \colon \eta(s_j)2^{s_j-1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \lambda_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, d}\big\}$. Тоді для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, позначимо

$$S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}),$$

де $\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}} \cdot \mathfrak{F}f)$, $\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}}$ — характеристична функція множини $Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, а $\mathfrak{F}f$ і $\mathfrak{F}^{-1}f$ відповідно пряме й обернене перетворення Фур’є функції f.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо апроксимативну характеристику

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(f\big)_q = \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_q$$

і для $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d) \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ позначимо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\big)_q = \sup_{f\in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} e^{\mathfrak{F}}_M\big(f\big)_q,$$

де $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \dots \leqslant r_d$.

Справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $r_1 > 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, тоді*

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B\big)_\infty \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Робота виконана за часткової підтримки гранту НАН України дослідницьким лабораторіям/групам молодих вчених НАН України для проведення досліджень за пріоритетними напрямами розвитку науки і техніки у 2019 р., проект № 04–02/2019.

1. Аманов Т. И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1, \dots, n)$. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1695, Т. 77, С. 5–34.

2. Wang Heping, Sun Yongsheng. Approximation of functions in $\widetilde{S^r_1L}$, S^r_1H by entire functions. Approx. Theory and its Appl., 1999, V. 11, N 4, P. 88 – 93.

Інститут математики
НАН України
e-mail: yan.sergiy@gmail.com

ЗМІСТ

F.G. Abdullayev. Approximation properties of some extremal polynomials in complex plane 3

G.Akishev. On estimates of the best approximations of functions in the generalized Lorentz space 4

V.F.Babenko, Y.V.Babenko, N.A.Kriachko. Approximation of Operators in a Hilbert Space and Some Applications 5

V.F.Babenko, Yu.V.Babenko, N.V.Parfinovych, D.S.Skorokhodov. Asymptotically optimal recovery of integral operators by the values of functions with given majorant for the modulus of continuity 6

D.I.Bodnar, I.B. Bilanyk, O.G.Vozniak. Some unlimited convergence domains of branched continued fractions of the special form 7

L.G.Boytsun, T.I.Rybnikova. On the Voronoi summability of fourier integrals and its conjugate integrals 8

S. Chaichenko, A. Shydlich. Multipliers Between Musielak-Orlicz Sequence Spaces 9

O.V.Chernitskaya. The behavior of the constants of the best approximation 10

O. Davydov. Error Bounds for Meshless Finite Difference Methods 11

V.A.Kofanov. Bojanov-Naidenov and Erdös problems for the positive (negative) parts of functions 12

P.I.Kogut. On Image Segmentation Problem via Piecewise Constant Approximation of a Target Mapping 13

O. V. Kovalenko. On maximally oscillating perfect splines and some of their extremal properties 14

O.Kozynenko, D.Skorokhodov. Kolmogorov-type inequalities for the norms of low order fractional derivatives 15

O.Motorna, V.Motornyi. On simulteneous approximation in average of a function and its derivatives 16

E.Radzievskaya. On the belonging of (ψ, β)-derivatives to Lebesgue spaces 17

M.V. Savchuk, V.V.Savchuk. Approximation of holomorphic functions by Cesáro means 18

V.V.Savchuk. The Best Approximation of Holomorphic Functions 19

A.S.Serdyuk, T.A.Stepanyuk. Asymptotically best possible Lebesque-type inequalities for the Fourier sums in uniform metric 20

R. Shanin. Reverse Hölder inequality 21

A. A. Shumeiko. The approximation of the surface by spherical splines 22

S.B.Vakarchuk, M.B.Vakarchuk. Approximation on $\mathbb{R}$ by classical orthogonal polynomials with Chebyshev-Hermite weight and the widths of functional classes in $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ 23

В.Ф.Бабенко. Екстремальнi задачi теорiї апроксимацiї для функцiй зi значеннями у L-просторах 24

В.Ф.Бабенко, Р.О.Бiлiченко. Наближення необмежених функцiоналiв обмеженими в гiльбертовому просторi 25

В.Ф.Бабенко, М.С.Гунько, Н.В.Парфiнович. Оптимальне вiдновлення елементiв класу за iнформацiєю, що задана коефiцiєнтами Фур'є з похибкою 26

В.Ф. Бабенко, С.В. Конарева. Нерiвностi типу Джексона з узагальненими модулями неперервностi 27

М.В. Гембарський, С.Б. Гембарська. Лiнiйнi поперечники класiв перiодичних функцiй у просторi $B_{1,1}$ 29

Г.А.Дзюбенко. Оцiнка похибки майже коопуклого наближення тригонометричними полiномами 30

Р.І.Дмитришин. Оцінки похибок наближень для деяких функціональних гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними 31

П.В.Задерей, М.В.Гаєвський, М.А.Веремій. Умови знакосталості тригонометричних рядів 32

А.О.Кореновський. Про відносні коливання функції 33

В.К. Маслюченко, Г.-Ж.Я.Маслюченко. Спіралі у творах сучасних митців 34

В.К. Маслюченко, В.С. Мельник. Пари Гана та їх застосування 36

М.М.Пагіря. Застосування ланцюгових дробів до наближення функцій комплексної змінної 37

А.М.Пасько, В.Д.Стефура. Поточкові оцінки найкращих односторонніх наближень класів W^r_∞ при 0<r<1 38

Б.Г.Пелешенко. Про інтерполяцію операторів, які комутовані з розтягуванням, в граничних випадках 39

О.Г. Ровенська. Оцінка знизу відхилення сум Фейєра на класах інтегралів Пуассона 40

А.С.Романюк. Колмогоровські поперечники і ентропійні числа класів періодичних функцій багатьох змінних 41

В.С.Романюк. Кратний базис Хаара в задачах лінійної та нелінійної апроксимації функцій 42

В.І.Рубан, О.О.Руденко. Точні оцінки похибки в динамічних системах із дискретним часом 43

А.С.Сердюк, І.В.Соколенко. Наближення сумами Фур'є класів диференційовних функцій високої гладкості в рівномірній метриці 44

М.Є.Ткаченко, В.М.Трактинська. Найкращі наближення функцій багатьох змінних у просторах зі змішаною інтегральною метрикою 45

М.Є.Ткаченко, В.О.Трактинський. Характеризація підпросторів єдиності елемента найкращого (α, β)-наближення з вагою 46

Л.О.Чернецька. Застосування узагальнених моментних зображень до побудови багатовимірних багатоточкових апроксимацій типу Паде 47

С.Я.Янченко. Апроксимативні характеристики функцій з класів Нікольського-Бєсова $S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ 48