

ЗАТВЕРДЖУЮ
Ректор Дніпровського
національного університету
імені Олеся Гончара
Поляков М.В.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Завдання другого туру
Всеукраїнської олімпіади з математики
для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти

1. Свіжі гриби містять 90% води. З 22 кг свіжих грибів вийшло 2,5 кг сухих. Скільки відсотків води міститься у сухих грибах?

Розв'язання. У 22 кг свіжих грибів $22 \cdot 0,1 = 2,2$ кг сухої речовини. Частка води у сухих грибах $(2,5 - 2,2)/2,5 = 0,12$, що становить 12%.

Відповідь: 12%.

2. Знайти найбільше ціле x , що задовольняє нерівність

$$\frac{x-1}{5-x} > 0.$$

Розв'язання. Досить знайти найбільше ціле $x \neq 5$, що задовольняє нерівність

$$(x-1)(5-x) > 0.$$

Відповідь: 4.

3. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = BC$) проведено бісектрису BK . Знайти кут C , якщо кут AKB дорівнює 75° .

Розв'язання. Нехай α — величина кута A . З трикутника AKB маємо $\alpha + \alpha/2 + 75^\circ = 180^\circ$. Отже кут A дорівнює 70° , а кут C дорівнює 40° .

Відповідь: 40° .

4. При якому значенні параметра a ($a \neq 0$) парабола $y = ax^2$ дотикається прямої $y = x - 1$?

Розв'язання. У точці дотику значення функцій $y = ax^2$ і $y = x - 1$ співпадають:

$$ax^2 = x - 1$$

і кутові коефіцієнти рівні:

$$(ax^2)' = (x - 1)'$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$ax^2 = x - 1$$

$$2ax = 1,$$

отримаємо $a = 0,25$.

Відповідь: 0,25.

5. Побудувати графік функції

$$y = ||x| - 1|.$$

Розв'язання. Графік функції $y = ||x| - 1|$ можна отримати з графіка функції $y = |x|$ його зсувом вздовж вісі Oy і відображенням відносно вісі Ox .

6. Розв'язати рівняння

$$\log_2 x^2 = 2.$$

Розв'язання. Рівняння

$$\log_2 x^2 = 2$$

рівносильне рівнянню

$$|x| = 2.$$

Відповідь: -2 і 2 .

7. Скільки коренів може мати рівняння

$$|x^2 - 2x| = a$$

залежно від a (a — довільне дійсне число)?

Розв'язання. Графік функції

$$y = |x^2 - 2x|$$

на проміжку $[0; 2]$ співпадає з графіком функції

$$y = -(x^2 - 2x),$$

а на множині $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ з графіком функції

$$y = x^2 - 2x.$$

Тому рівняння $|x^2 - 2x| = a$ при $a < 0$ коренів не має, при $a = 0$ має два корені, при $0 < a < 1$ має чотири корені, при $a = 1$ має три корені, при $a > 1$ має два корені,

8. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює $2\sqrt{6}$, а висота призми 2 . Визначити об'єм V кулі, описаної навколо призми.

Розв'язання. Основи призми — правильні трикутники ABC і $A'B'C'$ зі сторонами $2\sqrt{6}$. Нехай O — центр описаної кулі, $R = OA$ — радіус кулі. Трикутник AOA' — рівнобедрений ($OA = OA'$), тому висота піраміди з основою ABC і вершиною O дорівнює 1 . Бічне ребро піраміди $OA = R$ знаходимо за стороною основи піраміди і її висотою: $R = OA = 3$. Об'єм кулі дорівнює $(4/3)\pi R^3 = 36\pi$.

Відповідь: 36π .

9. Знайти площу S фігури, обмеженої кривою

$$x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0.$$

Розв'язання. Вищезгаданою кривою є коло $x^2 + (y - 5)^2 = 9$.

Відповідь: 9π .

10. Розв'язати рівняння

$$\cos 2x + \sqrt{2} \sin x = 1.$$

Розв'язання. Рівня $\cos 2x + \sqrt{2} \sin x = 1$ зводиться до квадратного відносно $\sin x$ рівняння $1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2} \sin x = 1$.

Відповідь:

$$x = k\pi, \quad k - \text{ціле},$$

$$x = \pi/4 + 2l\pi, \quad l - \text{ціле},$$

$$x = 3\pi/4 + 2n\pi, \quad n - \text{ціле}.$$